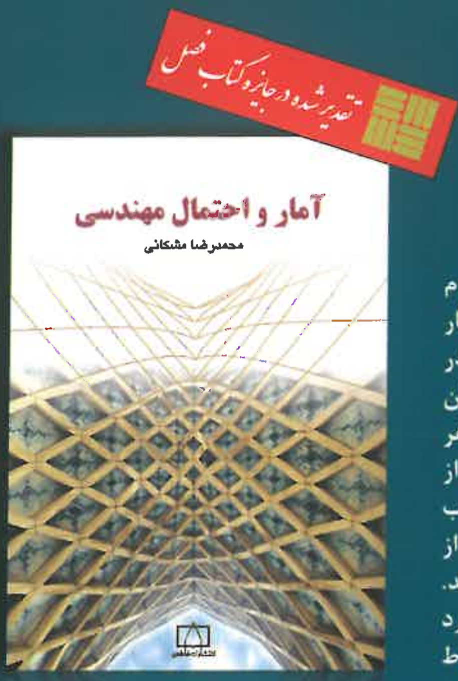
نشریهٔ

ریاضیات

سال نهم/۲
شمارهٔ پیاپی: ۳۶
پاییز و زمستان ۱۳۹۰
قیمت: ۲۵۰۰ تومان
ISSN:1735-8302

آمار و احتمال مهندسی



دکتر محمدرضا مشکانی

ویرایش دکتر احمد پارسیان

آمار و احتمال مهندسی آن مباحثی از آمار را که بیشتر مورد نیاز عموم مهندسان است عرضه می‌کند. این کتاب سرفصل مصوب درس‌های آمار و احتمال برای رشته‌های گوناگون مهندسی را در بردارد. ویژگی آن در رویکردی است که مؤلف بنا بر تجربهٔ سال‌ها تدریس آمار به دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی کسب کرده است. در این رویکرد، منطق هر روش به زبانی ساده و با استفاده از حسابان تشریح و با مثال‌های متعدد از مسئله‌های مهندسی، کاربرد آن روش نشان داده می‌شود.محتوای کتاب با تشریح فنون موسوم به آمار توصیفی شروع می‌شود. مطالب لازم از نظریهٔ احتمال به عنوان پیش‌نیاز مباحث استنباط آماری ارائه می‌شوند. توزیع‌های احتمال گوناگون که در مدل‌بندی پدیده‌های مهندسی مورد نیازند تشریح می‌شوند. در نیمهٔ دوم کتاب با بیان اصول زیر بنایی استنباط آماری، روش‌های گوناگون برآورد، بازهٔ اطمینان، آزمون فرض، رگرسیون، و تحلیل واریانس عرضه می‌شوند. هر روش با مثال‌ها و مسئله‌هایی چند پیگیری می‌شود.

معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسئله‌های مقدار مرزی

ویراست نهم

ویلیام ای. بویس، ریچارد سی. دیپریما

ترجمهٔ دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

کتاب معادلات دیفرانسیل مقدماتی بویس از اولین ویراست آن در سال ۱۹۶۵ میلادی تا کنون که ویراست نهم آن به چاپ رسیده است، همواره یکی از کتاب‌های مطرح و پرفروش معادلات دیفرانسیل مقدماتی در گسترهٔ جهانی بوده است.

از ویژگی‌های مهم کتاب، تأکید بر دیدگاه‌های هندسی و گرافیکی در بررسی رفتار جواب‌های معادلات و تعدد، تنوع و گستردگی مثال‌ها و مسئله‌های آن است. این گستردگی، در کنار استقلال حداکثری فصل‌ها از یکدیگر، باعث شده است که این کتاب علاوه بر ویژگی‌های منحصر به‌فرد فوق، انعطاف لازم را برای انتخاب راهبردهای آموزشی متفاوت داشته باشد. مدرسانی که از این کتاب استفاده می‌کنند، در تنظیم و ارائهٔ مطالب حداکثر اختیار را دارند و به‌سادگی می‌توانند مطالب درس را از آن انتخاب کنند.

به‌نام خدا

نشریهٔ

ریاضیات

سال نهم / ۲، شمارهٔ پیاپی ۳۶، پاییز و زمستان ۱۳۹۰

فهرست

مقاله‌ها

روی جلد: مقالهٔ «کاشی‌کاری مستطیل‌ها» را ببینید.

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: یحیی تابش
هیأت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، امیرحسین اصغری، یحیی تابش، بردیا حسام، محمد صالح زارع‌پور، کسری علیشاهی، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
امور مشترکان: الهه حسامیان
وب‌گاه: www.riaziat.ir
نشانی پست الکترونیکی: nashriye@riaziat.ir
ISSN: 1735-8302

ناشر: انتشارات فاطمی
مدیر فنی: فرید مصلحی
طراح جلد: علیرضا طاهرنجمی
حروفچینی و صفحه‌بندی: زهره تاجیک، اعظم توکلی
رسامی: فاطمه ثقفی
نمونه‌خوانی: مهدیه‌السادات عامل ابراهیمی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: آمیتیس
چاپ و صحافی: خاشع
نشانی انتشارات فاطمی: تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی، شمارهٔ ۱۴، کد پستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱
تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
وب‌گاه: www.fatemi.ir
نشانی پست الکترونیکی: info@fatemi.ir

نظریهٔ ریسمان و هندسهٔ بُعدهای پنهان عالم

شینگ-تونگ یائو و استیو نادیس

این مقاله برگرفته از سخنرانی شینگ-تونگ یائو به تاریخ ۱۰ فوریهٔ ۲۰۱۱ در دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، است. یائو و نادیس این سخنرانی را براساس کتابشان «شکل فضای درونی» (بیسیک بوکز، ۲۰۱۰) به نگارش درآورده‌اند. دیدگاه مطرح در این سخنرانی و کتاب مورد نظر هر دو متعلق به یائو است و داستان را او روایت می‌کند.

دوست دارم در این باره صحبت کنم که چگونه ریاضیات و فیزیک، به‌ویژه در فضاهای کالابی-یائو و نظریهٔ ریسمان، به هم پیوند می‌خورند و هر دو از این پیوند سود می‌برند. این موضوع، هر چند که اتفاقی نیست، موضوع کتاب جدیدی با عنوان «شکل فضای درونی» است که در نگارش آن مشارکت داشتم. در این کتاب داستان فضاهای کالابی-یائو روایت شده است. من گوشه‌ای از داستان زندگی خودم و نیز گوشه‌ای از تاریخ هندسه را در این کتاب بازگفته‌ام. به این ترتیب قصد دارم به گذشته بازگردم و دربارهٔ آشنایی خودم با هندسه و سیر تحول ایده‌هایی که در کتاب به آنها پرداخته‌ام سخن بگویم.

می‌خواستم کتابی بنویسم و مردم را با شیوهٔ تفکر و رویکرد ریاضی‌دان‌ها به جهان آشنا کنم. همچنین می‌خواستم به آنها بیاموزم که قرار نیست ریاضیات رشته‌ای کاملاً انتزاعی و بی‌ربط به پدیده‌های زندگی روزمره باشد، بلکه برعکس، نقش آن در فهم جهان عینی اهمیت بنیادی دارد.

بنابراین اکنون یک گام در زمان، یا بهتر است بگویم در فضازمان، به عقب بازمی‌گردیم. . .

هندسهٔ ریمانی

وقتی در سال ۱۹۶۹ برای گذراندن دورهٔ تحصیلات تکمیلی به برکلی آمدم پی بردم که مفهوم هندسه به برکت دستاوردهای گاوس و ریمان در قرن نوزدهم دگرگونی‌های بنیادی پیدا کرده است. ریمان تصورمان از فضا را از پایه دگرگون کرد و با این کار استفاده از ریاضیات را راحت‌تر.

اشیا دیگر به فضای تخت و خطی هندسهٔ اقلیدسی محصور نبودند. ریمان در عوض مفهومی بسیار انتزاعی‌تر از فضا — با هر تعداد بُعد دلخواه — معرفی کرد که در آن می‌توان فاصله و انحنا را تعریف کرد. درواقع، می‌توانیم نوعی حساب دیفرانسیل و انتگرال بسازیم که به‌طور خاص برای چنین فضای مجردی مناسب باشد.

حدود پنجاه سال بعد، اینشتین پی برد این هندسه، که شامل فضاهای خمیده است، دقیقاً همان چیزی است که

برای یکپارچه کردن گرانش نیوتونی با نسبیت خاص به آن نیاز دارد. این بینش به نظریهٔ مشهور نسبیت عام او منجر شد.

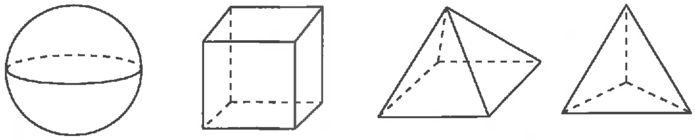
طی سال اول تحصیل در برکلی، در سال ۱۹۶۹، هندسهٔ ریمانی را فراگرفتم. این هندسه با هندسهٔ کلاسیک که در دوران کالج در هنگ‌کنگ آموخته بودم و مربوط به خم‌ها و رویه‌ها در فضای خطی بود فرق داشت. در برکلی در کلاس‌های توپولوژی جبری اسپنیر، هندسهٔ ریمانی لاوسون و معادلات دیفرانسیل جزئی موری شرکت کردم. همچنین به صورت آزاد در کلاس‌های متنوعی، از جمله نسبیت عام، حاضر شدم و تا جایی که می‌توانستم اطلاعات اندوختم.

توپولوژی جبری برایم موضوع نسبتاً جدیدی بود. اما پس از چند ماه درک خوبی از مفهوم گروه بنیادی پیدا کردم و با مقدمات نظریهٔ هوموتوپی و هومولوژی آشنا شدم.

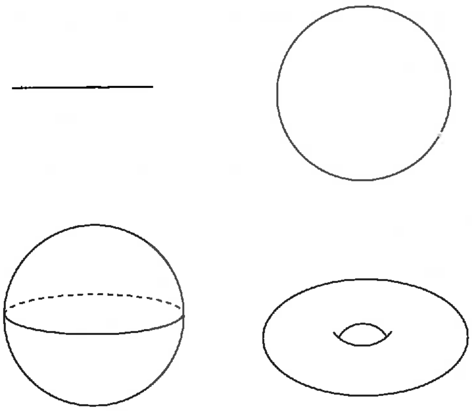
در آن زمان حدود پانصد دانشجوی کارشناسی ارشد در گروه ریاضی دانشگاه بودند و هیچ‌کدام دفتر کار نداشتند. ما در کمپل‌هال بودیم و استادان از ساختمان T ــ ساختمان چوبی روبه‌روی اوانزهال ــ استفاده می‌کردند. من همهٔ وقت آزادم را در کتابخانهٔ گروه ریاضی می‌گذراندم، که به دفتر کار غیررسمی من بدل شده بود و بی‌وقفه در جستجوی مقاله‌های جذاب بودم که وقتم را با آنها بگذرانم. در ایام تعطیلات کریسمس آن سال، که همه به خانه رفته بودند، مقالهٔ جان میلنور دربارهٔ رابطهٔ گروه بنیادی با انحنای خمینه‌ها را در مجلهٔ هندسهٔ دیفرانسیل [1] خواندم. خواندن این مقاله برایم هیجان‌انگیز بود، زیرا دربارهٔ مفاهیمی بود که به تازگی با آنها آشنا شده بودم. میلنور نویسندهٔ بسیار خوبی بود و همه چیز مقالهٔ او را فهمیدم. او به مقالهٔ دیگری از پریسمان اشاره کرده بود که برایم پرکشش به نظر می‌آمد [2].

با خواندن این مقاله‌ها آموختم که اگر انحنای فضا منفی باشد، محدودیتی اساسی روی «گروه بنیادی» ــ مفهومی از توپولوژی ــ وجود خواهد داشت. چنین گروهی از طوقه‌هایی بسته در آن فضا تشکیل شده است که نقطهٔ آغازین هر یک از آنها ثابت شده است. اعضای این گروه، که قابل تبدیل به یکدیگرند، هم‌ارز در نظر گرفته می‌شوند. براساس قضیهٔ پریسمان، در گروه بنیادی خمینه‌هایی که انحنای منفی دارند می‌توان هر دو عضو تعویض‌پذیر را به صورت مضربی از عضوی دیگر از گروه نوشت. این موضوع کنجکاوی مرا برانگیخت و از این‌رو مقالهٔ پریسمان را زیرورو کردم تا بدانم اگر انحنای نامثبت در فضا مجاز باشد چه خواهد شد. برای اولین بار به حکم‌هایی برخورده بودم که انحنای فضا را ــ که تعریف دقیقی در هندسه دارد ــ به روش ناقص‌تر و کلی‌تر مشخص کردن شکل، یعنی توپولوژی، پیوند می‌داد.

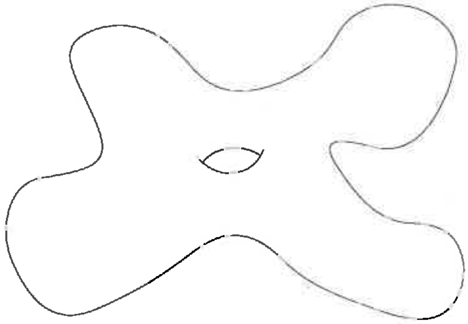
توپولوژی مفهومی دربارهٔ فضاست که به روش اندازه‌گیری فاصله در آن فضا وابستگی ندارد. با این تعبیر، دقت توصیف توپولوژی از فضا در مقایسه با هندسه بسیار کمتر است. برای اندازه‌گیری فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه باید تمام جزئیات دربارهٔ فضا را بدانیم. منظورمان از هندسه، مجموع این جزئیات است، که انحنا را در هر نقطه توصیف می‌کند (شکل‌های ۱ و ۲ و ۳).



شکل ۱ در توپولوژی، کُره، مکعب، هرم مربعی و چهاروجهی ــ در زمرهٔ شکل‌های دیگر ــ همگی هم‌ارز تلقی می‌شوند.



شکل ۲ در توپولوژی، فقط دو نوع فضای یک بُعدی وجود دارد که از بنیاد با هم متفاوت‌اند: خط و دایره. رویه‌های (جهتدار) دوبُعدی را می‌توان برمبنای گونه یا تعداد حفره‌ها دسته‌بندی کرد. کُره‌ای با گونهٔ صفر، بدون حفره، اساساً از دوناتی با گونهٔ یک، که یک حفره دارد، متمایز است.



شکل ۳ توپولوژی دونات و این شیء غیر آشنا (و شاید غیر خوشمزه) یکسان است، اما شکل (یا هندسهٔ) این دو یکسان نیست.

مثلاً، دونات و لیوان قهوه توپولوژی یکسانی دارند، اما شکل یا هندسهٔ این دو متفاوت است. همچنین کُره و بیضیوار توپولوژی یکسانی دارند، اما شکل این دو به‌طور کلی متفاوت است. کُره فضای توپولوژیکی فاقد گروه بنیادی است، زیرا هر طوقهٔ بسته روی آن را می‌توان به‌طور پیوسته تا رسیدن به یک نقطه جمع کرد. اما خم‌های بسته‌ای روی سطح چنبره وجود دارند که نمی‌توان آنها را به‌طور پیوسته تا رسیدن به یک نقطه جمع کرد.

من تعمیم خودم از قضیهٔ پریسمان را به نگارش درآوردم که توپولوژی را به هندسه پیوند می‌زند [3].

زمانی که از آن یادداشت‌ها در اتاق زیراکس نسخه‌برداری می‌کردم به‌طور اتفاقی آرتور فیشر، فیزیک ریاضی‌دان، را دیدم. او دوست داشت نوشتهٔ مرا بخواند. پس از خواندن یادداشت‌هایم گفت هر اصلی که بتواند انحنا را به توپولوژی پیوند بزند در فیزیک سودمند خواهد بود. نظرات او از آن زمان تاکنون در ذهن من مانده است.

نسبیت عام

از نسبیت خاص می‌دانیم که فضا و زمان را نباید جدا از یکدیگر درنظر بگیریم بلکه در یکدیگر ادغام می‌شوند و فضازمان را می‌سازند. اینشتین به‌طور جدی در پی دست یافتن به تعریفی بنیادی برای گرانش بود. او از دوستش مارسل گراسمان کمک گرفت که ریاضی‌دان بود و او هم اینشتین را با کارهای ریاضی‌دانان دیگری چون ریمان و ریچی آشنا کرد.

ریمان شالودهٔ فضاهای مجرد را به همراه ابزار تعریف فاصله و انحنا در چنین فضاهایی تدارک دیده بود. او به این ترتیب فضای زمینه یا صحنه‌ای را فراهم کرد که گرانش، براساس فرمول‌بندی اینشتین، در آن اجرا می‌شود.

البته اینشتین به‌کار ریچی هم توجه داشت که نوع خاصی از انحنا را تعریف کرده بود که برای توصیف توزیع ماده در فضازمان سودمند است. درواقع، انحنای ریچی را می‌توان اثر تانسور خمیدگی درنظر گرفت. ویژگی فوق‌العادهٔ این انحنا این است که در قانون پایستگیِ ناشی از اتحاد بیانکی صدق می‌کند. اینشتین دقیقاً با استفاده از همین قانون پایستگی توانست تصویری هندسی از گرانش ارائه کند. به جای اینکه گرانش را نیروی جاذبه‌ای بین دو جرم درنظر بگیریم می‌توانیم آن را پیامد انحنای فضازمانِ ناشی از حضور جرم‌ها بدانیم. تعیین دقیق نحوهٔ خمیده شدن فضازمان چگونگی توزیع ماده را آشکار می‌کند.

ذکر جمله‌های خود اینشتین برای خوانندگانی که به جنبهٔ تاریخی موضوع علاقه‌مندند مفید است. او نوشته است «از آنجا که میدان گرانشی برمبنای پیکربندی جرم‌ها تعیین می‌شود با آن تغییر می‌کند، ساختار هندسی این فضا نیز به عوامل فیزیکی بستگی دارد. براساس این نظریه، فضا ـــ دقیقاً مطابق با آنچه ریمان تصور می‌کرد ـــ دیگر مطلق نیست؛ ساختار آن وابسته به تأثیرات فیزیکی است. هندسهٔ [فیزیکی] دیگر علمی جدا و مستقل مانند هندسهٔ اقلیدسی نخواهد بود» [4].

البته سال‌ها طول کشید تا اینشتین معادلات میدان مشهورش را فرمول‌بندی کند. او ابتدا نظریهٔ نسبیت خاص را

بسط داد که هم‌ارزی دستگاه‌های مرجع لخت را محرز می‌کند. او این نظریه را در سال ۱۹۰۵ عرضه کرد. چند سال بعد او پی برد که نمی‌توان گرانش را درون نظریهٔ نسبیت خاص، که نظریه‌ای خطی است، بررسی کرد، و برای این کار باید سراغ نظریهٔ غیرخطی جداگانه‌ای رفت. او در جستجوی نظریهٔ موردنظر، که نسبیت عام نام گرفت، کارش را آغاز و اذعان کرد «مدت زیادی طول کشید که مفهوم مختصات را در فیزیک درک کنم.» مفهوم هم‌ارزی، به این معنا که قوانین گرانش باید در هر دستگاه مختصاتی دلخواهی صادق باشند، اصل راهنمای او بوده است. در سال ۱۹۱۲ او رفته‌رفته پی برد که باید پتانسیل گرانشی را با یک تانسور متقارن مرتبهٔ دوم توصیف کرد ــ متریکی ریمانی با نشان لورنتزی [5].

اینشتین در نوشته‌هایش به دو مسئلهٔ دیگر اشاره می‌کند که باید حل می‌شد: ۱ـ چگونه می‌توان یک قانون میدان را، که در چارچوب نظریهٔ نسبیت خاص بیان می‌شود، به‌صورت متریک ریمانی تبدیل کرد؟ ۲ـ قوانین حاکم بر این متریک ریمانی چیست؟ [6]

او از سال ۱۹۱۲ تا ۱۹۱۴ به همراه گراسمان در جستجوی حل این مسئله‌ها بود. آنها به این نتیجه رسیدند که ابزار ریاضی لازم برای حل مسئلهٔ اول در حساب دیفرانسیل ریچی و لوی‌ـ چی‌ویتا یافت می‌شود. سپس پی بردند که راه‌حل مسئلهٔ دوم منوط به یک ساختار ریاضیاتی («ناورداهای دیفرانسیلی از مرتبهٔ دوم») است که پیش از آن توسط ریمان بسط یافته بود.

با این وجود، همکاری او با گراسمان به کشف شکل نهایی معادلهٔ میدان گرانش منجر نشد، زیرا معادله‌ای که آن دو به‌دست آوردند هموردا نبود و در قانون پایستگی صدق نمی‌کرد. اینشتین سرانجام در نوامبر ۱۹۱۵ صورت درست معادلهٔ خود را یافت و حدود همان ایام بود که داویت هیلبرت هم به‌طور مستقل به‌صورت درست این معادله رسید. البته اینشتین یک گام دیگر برداشت و به‌تنهایی نظریهٔ خود را با «داده‌های تجربی نجومی» پیوند زد.

اینشتین با تأمل دربارهٔ موفقیت خود می‌نویسد «در پرتو دانش به‌دست آمده، این موفقیت تقریباً امری عادی به‌نظر می‌آید و هر دانشجوی باهوشی می‌تواند بدون مشکل زیاد آن را بفهمد. چه سال‌های وهن‌آلودِ جستجو در تاریکی، با اشتیاق شدید، رفت و آمد مدام بین امید و از پاافتادگی و سرانجام پدیدار شدن نورــ تنها کسانی که این تجربه را داشته‌اند معنای گفته‌ام را درمی‌یابند» [7].

تلاش اینشتین برای درک گرانش قابل توجه و موفقیت او در این حوزه قابل ستایش است. اما نباید فراموش کرد که سهم بنیادی هندسهٔ ریمانی در این راه بسیار چشمگیر بوده است.

وقتی پس از گذشت بیش از نیم قرن از آن زمان به معادلات اینشتین نظر می‌کنم از این موضوع درشگفت می‌مانم که ماده تنها بخشی از انحنای فضازمان را در کنترل خویش دارد. به این فکر می‌کنم که آیا می‌توان فضازمانی ساخت که خلأ و فاقد ماده باشد اما انحنای آن قابل اعتنا باشد، یعنی اینکه گرانش آن برابر صفر نباشد. خُب، جواب مشهوری که شوارتس‌شیلد برای معادلات اینشتین پیدا کرد نمونه‌ای از این مورد است. این جواب در

شکل ۴ چنین تصور می‌شد که سیاهچاله‌ای با جرم بسیار، که تقریباً ۷۰ میلیون بار از خورشید سنگین‌تر است و ۱۲ میلیون سال نوری از ما فاصله دارد در مرکز کهکشان حلزونی M۸۱ قرار گرفته است.

مورد یک سیاهچالهٔ ناچرخان صدق می‌کند ــ خلئی که به طرزی شگفت به دلیل گرانش فوق‌العاده زیادش جرم دارد [8]. اما این جواب شامل یک نقطهٔ تکین، یا تکینگی، است ــ مکانی که قوانین فیزیک در آنجا درست نیست (شکل ۴ را ببینید).

رفته رفته به وضعیت دیگری علاقه‌مند شدم ــ فضایی هموار و بدون تکینگی که فشرده و بسته است، برخلاف فضای باز و منبسط جواب شوارتس‌شیلد. مسئله این بود: آیا ممکن است فضای فشرده‌ای وجود داشته باشد که فاقد ماده باشد ــ به عبارت دیگر، عالم خلأ بسته ــ و نیروی گرانش آن ناصفر باشد؟ این پرسش ذهن مرا به خود مشغول کرد و معتقد بودم چنین فضایی نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگر می‌توانستم این را ثابت کنم، مطمئن بودم که قضیه‌ای زیبا در هندسه می‌شد.

حدس کالابی

در ابتدای دههٔ ۱۹۷۰ که فکر کردن به این موضوع را شروع کردم نمی‌دانستم که هندسه‌دانی به نام اوژینو کالابی دقیقاً همین سؤال را مطرح کرده است. کالابی مسئله را به زبان ریاضیاتی کاملاً پیچیده ــ شامل مفاهیم دشواری چون خمینه‌های کِهلِر، انحنای ریچی و رده‌های چِرن ــ طرح کرده بود که ظاهراً هیچ ارتباطی با فیزیک نداشت [9]. با این وجود، حدس مجرد او را می‌شد در چارچوب نظریهٔ نسبیت عام اینشتین بیان کرد. اطلاعات افزودهٔ او بر این است که فضا باید نوعی تقارن درونی به نام اَبَرتقارن ــ اصطلاحی که فیزیک‌دان‌ها وضع کرده‌اند ــ داشته باشد. (به

زبان هندسی، ابرتقارن تقارنی درونی است که برخی اسپینورهای ثابت به‌وجود آورده‌اند. در اینجا منظور از «ثابت» یعنی اسپینورها موازی‌اند. در فضایی شش بُعدی، فضاهایی که اسپینورهای ثابت ناصفر دارند خمینه‌های کهلرند، مگر اینکه فضا حاصل‌ضرب دکارتی فضاهایی با بعد پایین باشد.) در این زبان، سؤال اینشتین به این صورت ترجمه می‌شود: آیا ممکن است گرانش، یا خمش فضا، در یک خلأ بسته ــ فضای فشردهٔ ابرمتقارن فاقد ماده ــ وجود داشته باشد؟

من و دوستانم حدود سه سال تلاش می‌کردیم ثابت کنیم که امکان ندارد ردهٔ فضاهایی که کالابی پیشنهاد می‌کند وجود داشته باشد. ما، در زمرهٔ بسیاری دیگر، این حدس را «باورکردنی نیست که اوضاع این‌قدر خوب باشد» در نظر می‌گرفتیم. ما به دو جهت به حدس او شک کرده بودیم. از یک طرف این حدس مدعی وجود خلأ بسته‌ای به همراه گرانش بود و از سوی دیگر تلویحاً اشاره می‌کرد که روش نظام‌مندی برای ساختن تعداد زیادی از این نمونه‌ها وجود دارد. به‌رغم دلایلی که برای شک کردن به برهان کالابی در اختیار داشتیم نتوانستیم ثابت کنیم که چنین فضاهایی وجود ندارند (شکل ۵ را ببینید).

شکل ۵ اوژینو کالابی و شینگ‌ـتونگ یائو در مرکز علوم دانشگاه هاروارد.

در بهار سال ۱۹۷۳ من استادیار استونی‌بروک بودم. با رابرت اوسرمان دربارهٔ نظریهٔ رویه‌ها مکاتباتی داشتم و به‌نظر می‌رسید که او به کار من دربارهٔ رویه‌های مینیمال علاقه‌مند است. چون در آن ایام نامزدم در کالیفرنیا بود، تصمیم گرفتم ببینم می‌شود سال آینده به استنفورد بروم یا نه. در کمال شگفتی، اوسرمان بی‌درنگ پاسخ داد و مرا به‌عنوان استاد مهمان به آنجا دعوت کرد.

اواخر ماه می آن سال به همراه یک دانشجوی فوق‌لیسانس با ماشین به‌گردش دور امریکا رفتیم. سفری طولانی بود و تجربه‌ای فرح‌بخش، به‌ویژه از آن‌رو که هر دو به تازگی با رانندگی آشنا شده بودیم. خوشبختانه من بی‌آنکه

حادثه‌ای پیش بیاید تا برکلی رانندگی کردم و ماشین و دوست کمک‌راننده‌ام هر دو صحیح و سالم بودند. آنجا به سراغ دوستم ش.ی. چِنگ رفتم تا با هم به استنفورد برویم. من به شدت در تدارک چند مقاله بودم که قرار بود در گردهمایی بزرگ سه هفته‌ای استنفورد در ماه آگوست ارائه کنم.

سازماندهی این گردهمایی به عهدهٔ اوسرمان و استادم ش.ش. چرن (شکل ۶) بود. شاید به لطف ارتباط من با آنها بود که توانستم نه یکی بلکه دو سخنرانی در این گردهمایی ایراد کنم. پس از شروع گردهمایی به برخی از دوستان گفتم که مثال نقضی برای حدس کالابی یافته‌ام و بسیاری از هندسه‌دان‌ها اصرار کردند عصر آن روز سخنرانی جداگانه‌ای برایشان ترتیب بدهم. حدود سی هندسه‌دان در طبقهٔ سوم ساختمان ریاضیات گرد آمدند. در میان حاضران کالابی، چرن و ریاضی‌دانان برجستهٔ دیگر به چشم می‌خوردند. من نظریه‌های خودم را توضیح دادم و ظاهراً همه شادمان بودند.

شکل ۶ شینگ‌ـشن چرن و شینگ‌ـتونگ یائو در آکادمیا سینیکا در تایپه، تایوان، سال ۱۹۹۲.

من در برهان خود به منظور فراهم کردن قضیه‌ای ساختاری برای خمینه‌هایی که اولین ردهٔ چرن نامنفی دارند از قضیهٔ جدیدی از چیگر‌ـگرومول به نام قضیهٔ شکافنده استفاده کردم [10]. اگر حدس کالابی درست می‌بود، چنین خمینه‌ای متریک کهلر با انحنای ریچی نامنفی می‌داشت، از این‌رو می‌توانستم با به‌کار بستن قضیهٔ چیگر‌ـگرومول رویه‌ای جبری پیدا کنم که اولین ردهٔ چرن آن از نظر عددی نامنفی باشد و در حکم قضیهٔ ساختار صدق نکند.

چنین نتیجه‌ای، اگر بتوان آن را ثابت کرد، حدس کالابی را نقض می‌کند.

کالابی هم در آنجا به ارائهٔ برهانی دربارهٔ درستی این رویکرد پرداخت. در پایان گردهمایی چرن رسماً اعلام کرد که این مثال نقض به تحقیق بهترین نتیجهٔ کل گردهمایی بود. من مات و مبهوت امّا خوشحال بودم.

با این وجود حدود دو ماه بعد، حقیقت نمایان شد. کالابی در نامه‌ای دربارهٔ برخی نکات مبهم در برهان من سؤالاتی پرسیده بود. نامهٔ او را که دریافت کردم بی‌درنگ پی بردم که اشتباهی مرتکب شده‌ام: گرچه رویه‌های جبری که برهان من بر آنها استوار بود ممکن بود از نظر عددی اولین ردهٔ چرن نامنفی داشته باشند، اما لزوماً نامنفی نبودند. همین‌جا بود که به بیراهه رفته بودم.

من برای رسیدن به برهانی جدید به سختی تلاش کردم و به مدت دو هفته عملاً بی‌آنکه بخوابم به طور پیگیرانه‌ای کار کردم و خودم را به آستانهٔ از پا افتادن رساندم. هر بار که مثال نقضی احتمالی پیدا می‌کردم خیلی زود با دلایل ظریفی پی می‌بردم که چرا این مثال نقض نمی‌تواند درست باشد. مثلاً در مورد خمینه‌های کهلر-اینشتین به نابرابری‌های جالبی در مورد عدد چرن دست می‌یافتم، اما مانند موارد قبلی، آنها نیز کمکی به اثبات نادرستی حدس کالابی نمی‌کردند. پس از تلاش‌های بی‌حاصل بسیار به این نتیجه رسیدم که این حدس باید درست باشد. وقتی قانع شدم، جهت همه چیز را تغییر دادم و تمام انرژی خود را به‌کار بردم که درستی آن را ثابت کنم. سرانجام چند سال بعد از سال ۱۹۷۶ موفق شدم [11].

پاداش مضاعف من این بود که سال‌ها بعد که درستی حدس را ثابت کردم بسیاری از مثال نقض‌های رد شدهٔ من خودشان به قضایای مهمی بدل شدند [11، 12].

باید اضافه کنم که در گردهمایی استنفورد فیزیک‌دانی به نام رابرت گروخ دربارهٔ مسئلهٔ مهمی در نسبیت عام به نام حدس جرم مثبت سخنرانی کرد. بنابه این حدس مقدار کل جرم یا انرژی در هر سیستم فیزیکی بسته باید مثبت باشد. شوئن و من سرانجام پس از محاسبات بسیار دشوار مربوط به رویه‌های مینیمال و کار بسیار سخت این حدس را اثبات کردیم. هنوز به یاد دارم که اولین سرنخ احتمالی راه‌حل این مسئله هنگام پیاده‌روی به سمت آپارتمان من از زمین چمن محوطهٔ غربی برکلی به ذهنمان خطور کرد.

این تجربه ما را به تفکر بیشتر دربارهٔ نسبیت عام رهنمون شد و سرانجام قضایایی را دربارهٔ سیاهچاله‌ها ثابت کردیم. روابط متقابل و مورد علاقهٔ من با متخصصان نسبیت عام مرا به همکاری وسیع‌تر با فیزیک‌دانان متخصص نظریهٔ ریسمان تشویق کرد، هر چند که این همکاری چند سال دیگر محقق شد.

من در اثبات حدس کالابی سازوکاری عمومی برای ساختن فضاهایی پیدا کردم که در معادلات کالابی صدق می‌کنند و اکنون فضاهای کالابی-یائو نامیده می‌شوند. حس غریبی می‌گفت که یک جوری با بخش زیبایی از ریاضیات درگیر شده‌ام. به معنای دقیق کلمه، احساس می‌کردم این موضوع به فیزیک و فهم عمیق‌تر ما از طبیعت مربوط است. با این وجود نمی‌دانستم جایگاه واقعی این ایده‌ها کجاست، زیرا آن زمان چیز زیادی از فیزیک نمی‌دانستم.

نظریهٔ ریسمان

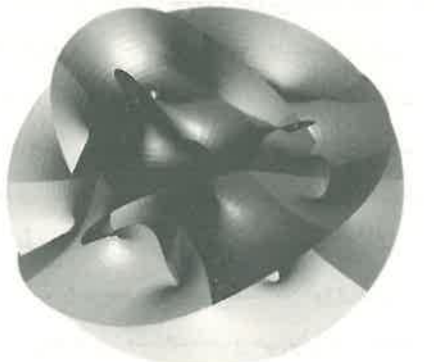
در سال ١٩٨۴ دو فیزیک‌دان به نام‌های گری هوروویتس و اندی اشترومینگر به من تلفن زدند. آنها با هیجان دربارهٔ مدلی برای توصیف حالت خلأ عالم برمبنای نظریهٔ جدیدی به نام نظریهٔ ریسمان حرف می‌زدند.

نظریهٔ ریسمان بر این فرض استوار است که ذرات، در بنیادی‌ترین سطوح، از ارتعاش‌های ریسمان‌های بسیار باریک ساخته شده‌اند. برای اینکه این نظریه (دست‌کم برخی از روایت‌های آن) با مکانیک کوانتومی سازگار باشد، باید فضا زمان دارای تقارنی خاص به نام اَبَرتقارن باشد. چنین فرض می‌شود که فضا زمان ده بعدی است.

هوروویتس و اشترومینگر به فضاهای چندبعدیی علاقه‌مند بودند که من در مسیر تأیید حدس کالابی وجود آنها را، از طریق ریاضیات، ثابت کرده بودم. آنها بر این باور بودند که این فضاها می‌توانند نقش مهمی در نظریهٔ ریسمان ایفا کنند، چون ظاهراً نوع خوبی ابرتقارن را دارند—این خاصیت در نظریه‌های مورد توجه آنها بسیار ضروری تلقی می‌شد. آنها می‌خواستند بدانند که آیا موضوع را درست ارزیابی کرده‌اند و من درکمال خوشحالی آنها تأیید کردم که چنین است یا دست‌کم می‌تواند چنین باشد.

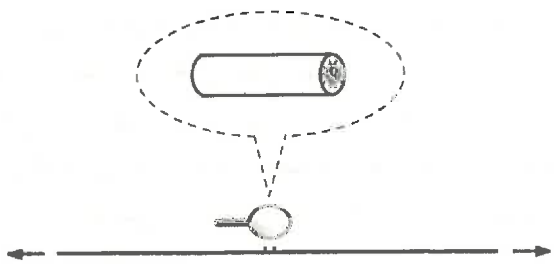
سپس ادوارد ویتن، که سال گذشته او را در پرینستون دیده بودم، به من تلفن کرد. ویتن معتقد بود دوره‌ای بس هیجان‌انگیز در فیزیک نظری فرارسیده است، درست مانند زمان گسترش مکانیک کوانتومی. او به من گفت هرکس در آن روزها در شاخهٔ مکانیک کوانتومی کاری کرده بوده نام خود را در تاریخ فیزیک ثبت کرده است. او گفت کشف‌های مهم متخصصان اولیهٔ نظریهٔ ریسمان، مانند مایکل گرین و جان شوارتز [13]، ممکن است به وحدت بزرگ تمام نیروها بیانجامد—اینشتین سی سال آخر عمر خود را در پی این هدف صرف کرد اما به موفقیتی دست نیافت.

ویتن در آن موقع با کمک کَندِلاس، هوروویتس و اشترومینگر تلاش می‌کرد از شکل، یا هندسهٔ، شش بعد «اضافی» نظریهٔ ریسمان سر درآورد. بنابه نظر فیزیک‌دانان این شش بعد در فضای بسیار کوچکی که آن را فضای کالابی-یائو می‌نامند در هم پیچیده‌اند—این فضا به خانوادهٔ فضاهایی تعلق دارد که کالابی مطرح کرده بود و من بعداً وجود آنها را ثابت کردم [14] (شکل ٧ را ببینید).



شکل ٧ «برش» دوبعدی از فضای کالابی-یائو.

براساس نظریهٔ ریسمان، فضازمان در کل ده‌بُعد دارد. سه بعد بزرگ فضایی که با آن آشنا هستیم به‌علاوهٔ زمان، فضازمان چهاربعدی نظریهٔ اینشتین را می‌سازند. اما شش بعد اضافی دیگر درون فضای کالابی-یائو پنهان است و طبق نظریهٔ ریسمان، این فضای نامرئی در هر نقطهٔ دلخواهی از «فضای واقعی» حضور دارد، گرچه ما نمی‌توانیم آن را ببینیم (شکل ۸).

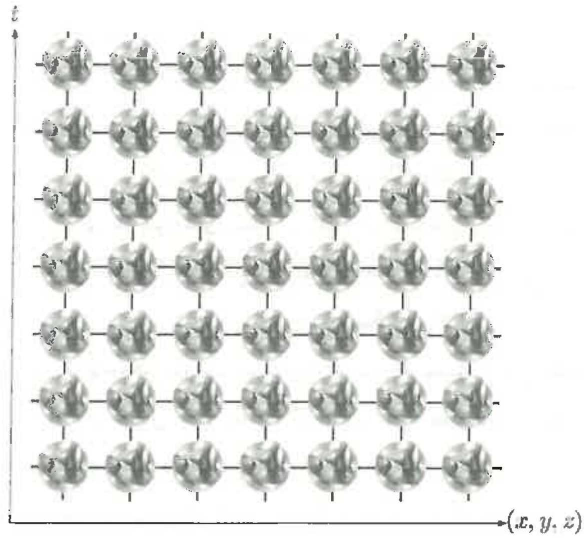


شکل ۸ فضازمان چهاربعدی ما را می‌توان با یک خط نشان داد که از دو طرف تا بی‌نهایت گسترش می‌یابد. گرچه یک خط، بنابه تعریف، ضخامت ندارد، اما در این مورد—مانند کالوتزا و کلاین—فرض می‌کنیم که اگر خط را با یک عدسی بسیار قوی نگاه کنیم پی می‌بریم که آن هم مقداری ضخامت دارد. در نظریهٔ ریسمان فرض می‌شود که این «خط» پناهگاه شش بعد اضافی در شکل فضای کالابی-یائو است. خط را از هر جا که برش بزنید، یک فضای کالابی-یائو را آشکار کرده‌اید و تمام فضاهایی که به این صورت نمایان می‌شوند هم‌ارز خواهند بود.

وجود این فضای با ابعاد اضافی به خودی خود شگفت‌انگیز است، اما نظریهٔ ریسمان از این هم فراتر می‌رود. براساس این نظریه شکل یا هندسهٔ واقعی فضای کالابی-یائو خواص عالم ما و نوع فیزیکی را که مشاهده می‌کنیم تعیین می‌کند. شکل فضای کالابی-یائو—یا «شکل فضای درونی» که، عنوان کتاب ماست—انواع ذرات موجود، جرم آنها، نحوهٔ برهم‌کنش آنها با یکدیگر و شاید حتی ثابت‌های طبیعت را تعیین می‌کند (شکل ۹ را ببینید).

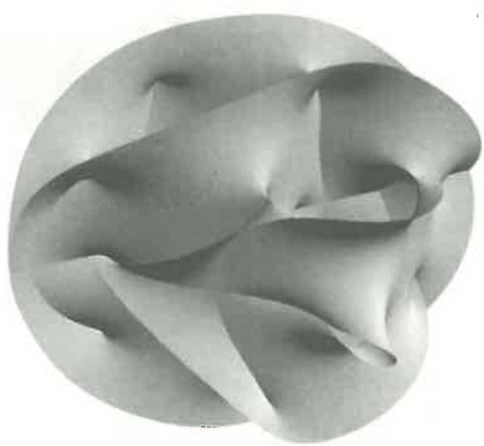
فیزیک‌دانان نظری برای استخراج ذرات طبیعت از چیزی به نام عملگر دیراک استفاده می‌کنند. تحلیل طیف این عملگر، تنوع ذراتی را نشان می‌دهد که ممکن است ببینیم. براساس اصل تفکیک متغیرها در این فضازمان ده‌بعدی، که حاصل‌ضرب فضازمان چهاربعدی با فضای شش‌بعدی کالابی-یائو است، می‌دانیم که فضای کالابی-یائو بخشی از آن طیف را می‌سازد. اگر قطر فضای کالابی-یائو بسیار کوچک باشد، ذراتی که طیف ناصفر دارند بسیار بزرگ خواهند بود. ما نمی‌توانیم این ذرات را ببینیم زیرا آنها فقط در انرژی‌های بسیار زیاد ظاهر می‌شوند.

اما ذراتی که طیف صفر دارند عموماً قابل مشاهده‌اند و می‌توان با استفاده از توپولوژی فضای کالابی-یائو خواص آنها را حساب کرد. بنابراین شاید اکنون درک کرده باشید که چرا توپولوژی این قلمرو بسیار ریز شش‌بعدی می‌تواند ایفاگر نقش مهمی در فیزیک باشد.



شکل ۹ اگر نظریهٔ ریسمان درست باشد، در هر نقطهٔ دلخواهی در فضازمان چهاربعدی یک فضای شش‌بعدیِ پنهانِ کالابی-یائو وجود دارد.

اینشتین گفته بود پدیدهٔ گرانش تجلی‌گاه هندسه است و نظریه‌پردازان ریسمان جسورانه اعلام کردند که فیزیک جهان ما ناشی از هندسهٔ فضای کالابی-یائو است. به همین دلیل است که نظریه‌پردازان ریسمان در پی یافتن شکل دقیق این فضای شش‌بعدی‌اند ــ مسئله‌ای که هنوز درگیر آن هستیم (شکل ۱۰ را ببینید).



شکل ۱۰ مقطع عرضی دوبعدی از فضای شش‌بعدی کالابی-یائو.

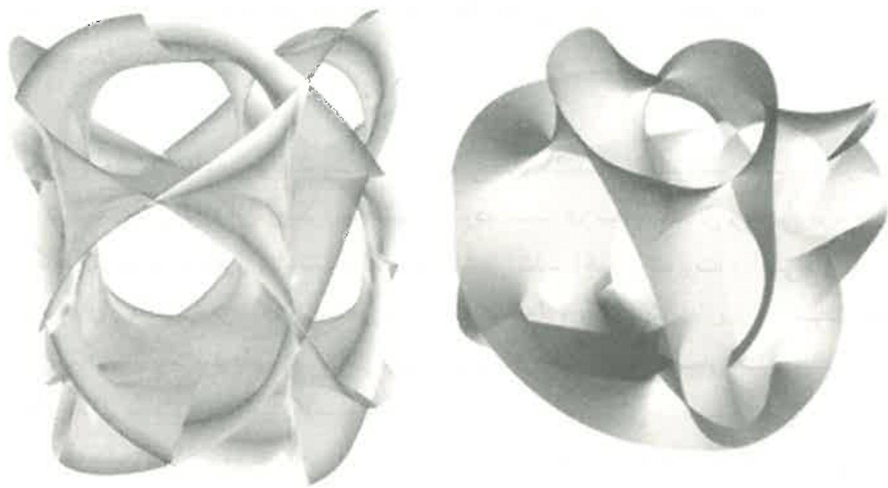
ویتن مشتاق بود چیزهای بیشتری از فضاهای کالابی-یائو بداند. او از پرینستون به سن‌دیگو آمد تا با من دربارهٔ نحوهٔ ساختن این فضاها گفتگو کند. او همچنین می‌خواست بداند چه تعداد فضای کالابی-یائو وجود دارد که فیزیک‌دان‌ها می‌توانند از آنها انتخاب کنند. فیزیک‌دان‌ها ابتدا بر این گمان بودند که احتمالاً نمونه‌های معدودی — چند توپولوژی ابتدایی — وجود دارد و به این ترتیب سازوکار تعیین شکل «درونی» عالم ما خیلی راحت قابل کنترل خواهد بود. اما خیلی زود پی بردیم که نمونه‌های بسیار زیادی از فضاهای کالابی-یائو وجود دارد — تعداد زیادی توپولوژی — که پیش از آن فکرش را نمی‌کردیم. من در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ حدس زده بودم که ده‌ها هزار فضای کالابی-یائو وجود دارد و این رقم از آن زمان تاکنون به نحو چشمگیری افزایش یافته است.

اگر معلوم می‌شد که تعداد موارد ممکن در حد بی‌نهایت است، کار تعیین شکل فضای درونی به کاری ترسناک و شاید ناممکن بدل می‌شد. برای این سؤال هنوز جوابی نداشتیم، گرچه من همواره فکر می‌کردم که تعداد فضاهای کالابی-یائو با هر تعداد بعد دلخواه متناهی است. این رقم قطعاً بسیار عظیم است، اما من معتقدم که کراندار است. یکی از دلایل من بر مبنای قضیه‌ای از کولار، میائوکا و موری [15] است که می‌گوید در هر بعد دلخواه، تعداد خمینه‌های (یافضاهای) فشرده با انحنای ریچی مثبت متناهی است. فضاهای کالابی-یائو فشرده‌اند — یعنی نمی‌توانند تا بی‌نهایت گسترش یابند — اما انحنای ریچی آنها صفر است و نه مثبت و از این‌رو باید آنها را نمونه‌های «بینابینی» درنظر گرفت. معمولاً اگر موردی در فضاهای با انحنای مثبت صدق کند، امید زیادی می‌رود در مورد فضاهای با انحنای نامنفی نیز صدق کند، و بنابراین فضاهای کالابی-یائو را نیز شامل خواهد بود. از این گذشته، پس از ۲۵ سال پژوهش دربارهٔ این فضاها، هیچ‌گونه روشی برای ساختن تعدادی بی‌نهایت از این فضاها نیافته‌ایم (شکل ۱۱ را ببینید).

شکل ۱۱ در نظریهٔ ریسمان، می‌توان دامنهٔ وسیعی از مقادیر ممکن را به انرژی فضای خالی، یا انرژی خلأ، نسبت داد. بخشی از مفهوم «چشم‌انداز» نظریهٔ ریسمان دلالت به این دارد که این نظریه راه‌حل‌های ممکن زیادی دارد — هر جواب متناظر به یک فضای کالابی-یائوی متفاوت است، که به فیزیک متفاوتی منجر می‌شود. مفهوم چشم‌انداز نظریهٔ ریسمان به ایدهٔ «چند عالمی» نزدیک است.

هیجان دربارهٔ فضاهای کالابی-یائو در سال ۱۹۸۴ آغاز شد. در آن زمان فیزیک‌دانان رفته‌رفته پی می‌بردند که این هندسه‌های پیچیده با نظریه‌های جدید آنان مناسبت دارد. این شور و هیجان چند سال پیش از آنکه کم‌رنگ شود ادامه داشت. البته در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ فضاهای کالابی-یائو دوباره کانون توجهٔ فیزیک‌دان‌ها شد، زیرا در آن زمان برایان گرین، رونان پلسر [16]، فیلیپ کندلاس [17] و دیگران مفهوم جدید «تقارن آینه‌ای» را مطرح کردند.

ایدهٔ اصلی این است که دو فضای کالابی-یائوی متفاوت، که توپولوژی متفاوتی دارند و ظاهراً هیچ وجه اشتراکی ندارند، به فیزیک واحدی منجر می‌شوند. این موضوع حاکی از خویشاوندی ناشناخته بین جفت‌های آینه‌ای معروف در فضاهای کالابی-یائو است (شکل ۱۲).

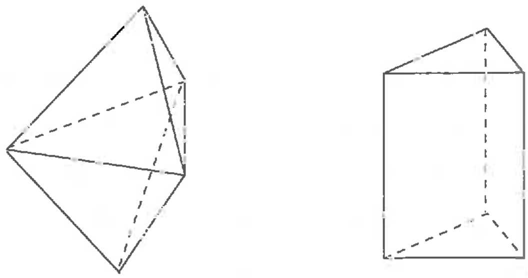


شکل ۱۲ فیزیک‌دان‌ها کشف کرده‌اند که دو فضای کالابی-یائو که متفاوت به‌نظر می‌رسند و توپولوژی متمایزی دارند باز هم ممکن است به فیزیک واحدی منجر شوند ــ این ویژگی «تقارن آینه‌ای» نام دارد.

اشترومینگر، یائو و زاسلو در ۱۹۹۵ حدسی را مطرح کردند که حاوی بینش‌هایی در مورد زیر ساختار فضاهای کالابی-یائو است [18].

طبق حدس معروف SYZ می‌توان فضای کالابی-یائوی شش‌بعدی را اساساً به دو فضای سه‌بعدی تقسیم کرد. یکی از این دو فضا چنبره‌ای سه‌بعدی است. ابتدا چنبره را بردارید و با عملیاتی شبیه عوض کردن شعاعش از r به $\frac{1}{r}$ آن را «وارونه کنید». اگر این چنبرهٔ وارونه را با فضای سه‌بعدی دوم ترکیب کنید خمینهٔ آینه‌ایِ فضای کالابی-یائوی اصلی را خواهید داشت. این حدس تصویری هندسی از تقارن آینه‌ای به‌دست می‌دهد، هر چند که فقط برای موارد خاص ثابت شده است (شکل ۱۳ را ببینید).

ارتباط بین خمینه‌های آینه‌ای، که در فیزیک آشکار می‌شود، ابزار بسیار قدرتمندی در اختیار ریاضی‌دان‌هاست.



شکل ۱۳ چهاروجهی دوگانه که پنج رأس و شش وجه دارد و منشور مثلثی که شش رأس و پنج وجه دارد، مثال‌هایی ساده از تقارن آینه‌ای‌اند. می‌توان از این چندوجهی‌ها برای ساختن یک فضای کالابی-یائو و جفت آینه‌ای آن استفاده کرد، البته جزئیات این کار تا حدی فنی است.

زمانی که آنها درگیر حل مسئله‌ای مربوط به یک فضای کالابی-یائو باشند، می‌توانند همین مسئله را در جفت آینه‌ای آن حل کنند. در بسیاری از موارد این رویکرد موفقیت‌آمیز بوده است. در نتیجه، مسائل ریاضی مربوط به خم‌های شمارشی که گاهی به مدت یک قرن حل نشده مانده بودند، حل شدند (هرمان شوبرت، ریاضی‌دان آلمانی در قرن نوزدهم، پژوهش‌های پردامنه‌ای دربارهٔ این مسائل انجام داده است). و ناگهان شاخه‌ای از ریاضیات به نام هندسهٔ شمارشی احیا شد. با این پیشرفت‌ها ریاضی‌دانان برای فیزیک‌دانان و نیز نظریهٔ ریسمان احترام بیشتری قائل شدند.

تقارن آینه‌ای مثال مهمی از آن چیزی است که دوگانی می‌نامیم. این ویژگی بر هندسهٔ غنی فضای کالابی-یائو پرتو می‌افکند و همچنین کمک کرده که برخی از دشوارترین پرسش‌ها دربارهٔ خم‌های گویای شمارشی با درجه‌های مختلف روی کویینتیک با پنج متغیر، که نوعی فضای کالابی-یائو به شمار می‌رود، حل کنیم.

پیشینهٔ این مسئله، که به نام شوبرت خوانده می‌شود، به قرن نوزدهم باز می‌گردد. شوبرت نشان داد که تعداد خم‌های گویای درجهٔ اول روی یک کویینتیک ۲۸۷۵ است. شلدون کتس در سال ۱۹۸۶ کشف کرد که ۶۰۹۲۵۰ خم درجهٔ دوم وجود دارد [19]. در حدود سال ۱۹۸۹ دو ریاضی‌دان نروژی به نام‌های گیر الینگسورد و اشتاین اشتروم—با استفاده از تکنیک‌های هندسهٔ جبری—کشف کردند که تعداد خم‌های درجهٔ سوم ۲۶۸۳۵۴۹۴۲۵ تاست. گروهی از فیزیک‌دان‌ها به رهبری کندلاس با تکیه بر رویکرد نظریهٔ ریسمان به رقم متفاوت ۳۱۷۲۰۶۳۷۵ رسیدند. با این وجود فیزیک‌دان‌ها از فرمولی استفاده کرده‌اند که، تا آن موقع، منشأ ریاضیاتی نداشته است. به معنای دقیق کلمه، تأیید قطعی این فرمول هنوز چشم به راه تأیید ریاضی‌دانان بود.

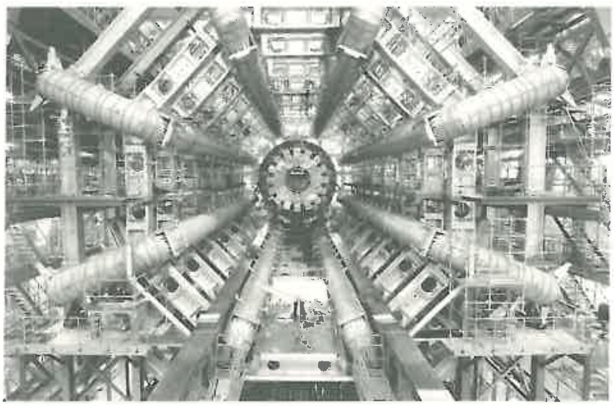
در ژانویهٔ سال ۱۹۹۰ من اولین گردهمایی مهم با حضور نظریه‌پردازان ریسمان و ریاضی‌دانان را به درخواست ایزادور سینگر سازماندهی کردم. این رویداد در مؤسسهٔ پژوهشی علوم ریاضی (MSRI) در برکلی برگزار شد. در این گردهمایی بحث شدیدی بین الینگسورد و اشتروم از یک سو و تیم کندلاس از سوی دیگر بر سر اینکه حق با کیست درگرفت. اختلاف بین آنها چند ماه به درازا کشید تا اینکه ریاضی‌دانان خطایی را در برنامهٔ کامپیوتری خود

پیدا کردند. پس از اصلاح خطا متوجه شدند که عدد به‌دست آمده درست همان عدد پیشنهادی فیزیک‌دانان است. از آن زمان تاکنون ریاضی‌دانان رفته‌رفته به عمق بینش نظریه‌پردازان ریسمان اعتراف کرده‌اند.

این رویداد همچنین گواه محکمی شد بر اینکه تقارن آینه‌ای اساس ریاضیاتی دارد. چند سال به طول انجامید، تا سرانجام، از اواسط دههٔ ۱۹۹۰ تا اواخر آن، گیونتال [20] و لیان-لیو-یائو [21] به‌طور مستقل از یکدیگر اثبات بی‌عیب و نقص ریاضی تقارن آینه‌ای—و درستی فرمول کندلاس و همکارانش—را پیدا کردند.

نتیجه‌گیری

باید حواسمان باشد که خیلی هم خوش‌خیال نباشیم، چون باید درنظر بگیریم که نظریهٔ ریسمان، همان‌طور که از نامش پیداست، یک نظریه است. این نظریه هنوز به لحاظ تجربی تأیید نشده و هیچ‌گونه آزمایشی برای ارزیابی قاطع آن طراحی نشده است. بنابراین داوران هنوز با این پرسش مواجه‌اند که آیا نظریهٔ ریسمان توصیف درستی از طبیعت، که مقصود اصلی آن است، ارائه می‌کند (شکل ۱۴ را ببینید).



شکل ۱۴ این امکان هست که آزمایش‌های برخورد دهندهٔ عظیم هادرونی در سرن در ژنو از حقایقی دربارهٔ ابعاد اضافی یا وجود ذرات ابرمتقارن پرده بردارد. گرچه چنین یافته‌هایی می‌تواند با نظریهٔ ریسمان سازگار باشد اما درستی آن را ثابت نخواهد کرد.

اگر به بخش بستانکار دفتر کل نگاهی بیندازیم می‌بینیم که ریاضیات چشمگیر و قدرتمندی از دل نظریهٔ ریسمان برخاسته است. درستی فرمول ریاضی‌ای که نتیجهٔ این پیوند بود ثابت شده است و صرف‌نظر از اعتبار علمی نظریهٔ ریسمان همچنان به این صورت خواهد ماند. گرچه نظریهٔ ریسمان به لحاظ تجربی ثابت نشده است اما تنها نظریهٔ سازگاری است که نیروهای مختلف را متحد می‌کند. این نظریه در عین حال زیباست. از این گذشته

تلاش برای متحد کردن نیروهای مختلف به‌طرز نامنتظره‌ای به اتحاد شاخه‌های مختلفی از ریاضیات منجر شده است که زمانی بی‌ارتباط تلقی می‌شدند.

ما هنوز از پایان ماجرا بی‌خبریم. در دو هزار سال گذشته مفهوم هندسه طی مراحل گوناگونی دگرگون شده و اکنون به منزلگاه هندسهٔ مدرن رسیده است. هر بار که هندسه دستخوش تحولات اساسی شده است، روایت جدید آن، فهم بهتر ما از طبیعت را که ناشی از پیشرفت‌های فیزیک نظری است دربر گرفته است. احتمال دارد که ما شاهد پیشرفت‌های اساسی دیگری در قرن بیست‌ویکم باشیم، از جمله ظهور هندسهٔ کوانتومی ــ هندسه‌ای که بتواند فیزیک کوانتومی را در مقیاس کوچک و نسبیت عام را در مقیاس بزرگ دربر بگیرد.

برای من این واقعیت که ریاضیات محض قادر است از اسرار طبیعت پرده بردارد کنجکاوی برانگیز و جالب است. این یکی از موضوعاتی است که من و نویسندهٔ همکارم در کتاب شکل فضای درونی به آن پرداخته‌ایم. امیدواریم این کتاب شما را با طرز کار ریاضی‌دانان آشنا کند. آنها لزوماً آدم‌های عجیب و غریبی نیستند که مثل قهرمان فیلم «ویل هانتینگ نابغه» به‌عنوان سرایدار ساختمان هنگام نظافت و شستن کف زمین مسئله‌هایی به قدمت یک قرن را حل کنند. از سوی دیگر قرار نیست یک ریاضی‌دان برجسته دچار بیماری روانی باشد یا کارهای عجیب و غریبی بکند، که باز سوژهٔ یک فیلم و کتاب عامه‌پسند دیگر بوده است.

ریاضی‌دانان صرفاً دانشمندانی هستند که طبیعت را از دیدگاهی متفاوت‌تر و انتزاعی‌تر، در مقایسه با تجربه‌گرایان، ارزیابی می‌کنند. اما اساس کار ریاضی‌دانان، مانند علم فیزیک، بر حقیقت و زیبایی طبیعت استوار است. ما در کتاب خود کوشیده‌ایم دربارهٔ شور و هیجان کار کردن در فصل مشترک ریاضیات و فیزیک سخن بگوییم و نشان بدهیم که چگونه ایده‌های مهم از درون رشته‌های متفاوت شکل می‌گیرند و به تولد موضوعات جدید و اثرگذار می‌انجامند.

هندسه و فیزیک در مورد نظریهٔ ریسمان دست‌به‌دست هم ریاضیاتی زیبا و فیزیکی بسیار کنجکاوی برانگیز آفریده‌اند. ریاضیات واقعاً زیباست و در حوزه‌های گوناگونی گسترش یافته است و شما را در این شگفتی فرو می‌برد که شاید فیزیک‌دان‌ها سرنخی از چیزی به‌دست آورده باشند.

بی‌تردید داستان هنوز سر دراز دارد. من خودم را آدم خوش‌شانسی می‌دانم که بخشی از این داستان بوده‌ام و امیدوارم بتوانم تاجایی که قادر باشم در پیشبرد آن سهیم باشم.

مراجع

[1] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, J. Differential. Geometry 2 (1968), 1-7.

[2] A. Preissman, Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comment. Math. Helv. 15 (1942-1943), 175-216.

[3] Shing-Tung Yau, On the fundamental group of compact manifolds of non-positive curvature, Annals of Mathematics 93 (May 1971), pp. 579-585.

[4] A. Einstein, *The Problem of Space, Ether, and the Field in Physics*, In Mein Weltbild, Querido Verlag, Amsterdam, 1934.

[5] Abraham Pais, *Subtle Is the Lord*, Oxford University Press, New York, 1982.

[6] A. Einstein, *Notes on the Origin of the General Theory of Relativity*, In Mein Weltbild, Querido Verlag, Amsterdam, 1934.

[7] A. Einstein and M. Grossman, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Teubner, Leipzig and Berlin, 1913.

[8] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physic, und Technik, 1916, 189.

[9] E. Calabi, The Space of Kähler Metrics, Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam (1954), no. 2, 206-207.

[10] J. Cheeger and Detlef Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, J. Differential Geometry 6 (1971), 119-128.

[11] Shing-Tung Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Natl. Acad. Sci. 74 (1977), no. 5, 1798-1799.

[12] A. Beauville, Variétés Kählériennes dont la premiére classe de Chern est nulle, J. Differential Geometry 18 (1938), 755-782.

[13] M. Green and J. Schwarz, Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory, Physics Letters B 149 (1984), 117-122.

[14] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, Vacuum configurations for superstrings, Nuclear Physics B 258 (1985), 46-74.

[15] JánosKollár, Yoichi Miyaoka, and Shigefumi Mori, Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds, J. Differential Geometry 36 (1992), no. 3, 765-779.

[16] B. R. Greene and M. R. Plesser, Duality in Calabi-Yau moduli space, Nuclear Physics B 338 (1990),15-37.

[17] Philip Candelas, Xenia C. De La Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Nuclear Physics B 359 (1991), 21-74.

[18] A. Strominger, S. T. Yau, and E. Zaslow, Mirror symmetry is T duality, Nuclear Physics B 479 (1996), 243-259.

[19] S. Katz, On the finiteness of rational curves on quinticthreefolds, Compositio Math. 60 (1986),151-162.

[20] A. Givental, Equivariant Gromov-Witten invariants, Int. Math. Res. Notices 13 (1996), 613-663.

[21] B. Lian, K. Liu, and S. T. Yau, Mirror principle. I, Asian J. Math. 1 (1997), 729-763.

• ترجمهٔ محمدعلی جعفری

Shing-Tung Yau, Steve Nadis, String Theory and the Geometry of Universe's Hidden Dimentions, Notices of the AMS, September 2011, pp.1067-1076.

حدس abc

اندرو گرنویل و تامس تاکر

قضیهٔ آخر فرما

در این روزگار که ریاضی‌دانان در فکر مطرح کردن تحقیقاتشان در کلاس درس، حتی در مقدماتی‌ترین سطوح، هستند، خیلی بعید است که ورق برگردد و بتوانیم از آنچه در سطح مقدماتی درس می‌دهیم در تحقیقاتمان استفاده کنیم. با این همه، معلوم شده است که برای اثبات قضیهٔ آخر فرما می‌توانیم فقط از ابزارهای حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی استفاده کنیم.

فرما ادعا کرده بود که اگر $p \geqslant ۳$، جوابی برای معادلهٔ

$$x^p + y^p = z^p \tag{۱}$$

که در آن x، y و z هر سه غیرصفر باشند وجود ندارد. اگر فرض کنیم که جواب‌هایی برای معادلهٔ (۱) وجود دارد، آن وقت می‌توانیم فرض کنیم که x، y و z عاملی مشترک ندارند، چرا که در غیر این صورت می‌توانیم دو طرف را بر این عامل مشترک تقسیم کنیم. نخستین گاممان این است که از معادلهٔ (۱) مشتق بگیریم و به دست بیاوریم

$$px^{p-۱}x' + py^{p-۱}y' = pz^{p-۱}z'$$

و پس از تقسیم کردن بر p، عامل مشترک دو طرف، می‌رسیم به

$$x^{p-۱}x' + y^{p-۱}y' = z^{p-۱}z' \tag{۲}$$

اکنون دو معادلهٔ خطی (۱) و (۲) را داریم (مجهول‌ها را $x^{p-۱}$، $y^{p-۱}$ و $z^{p-۱}$ درنظرگرفته‌ایم)، و به نظر می‌رسد که بهتر است از جبر خطی برای حذف کردن یکی از مجهول‌ها استفاده کنیم: معادلهٔ (۱) را در y' و معادلهٔ (۲) را در y ضرب کنید و معادله‌های به دست آمده را از هم کم کنید تا به دست بیاید

$$x^{p-۱}(xy' - yx') = z^{p-۱}(zy' - yz')$$

بنابراین $x^{p-۱}$، $z^{p-۱}(zy' - yz')$ را می‌شمارد، و چون x و z عاملی مشترک ندارند، پس

(۳) $x^{p-۱}$، $zy' - yz'$ را می‌شمارد.

این نتیجه کمی عجیب است، زیرا اگر $zy' - yz'$ غیر صفر باشد، آن وقت توان بالایی از x، $zy' - yz'$ را می‌شمارد، چیزی که به‌نظر نمی‌رسد با معادلهٔ (۱) بخواند.

بهتر است کمی دقیق‌تر صحبت کنیم. چون مشتق گرفته‌ایم، ظاهراً با عددهایی صحیح مانند x، y و z سروکار نداشته‌ایم، بلکه با چندجمله‌ای‌ها طرف بوده‌ایم. بنابراین اگر $zy' - yz' = 0$، آن وقت $\left(\frac{y}{z}\right)' = 0$، و درنتیجه y مضربی ثابت از z است، و این هم با اینکه y و z عاملی مشترک ندارند تناقض دارد. به این ترتیب از (۳) نتیجه می‌شود

$$(p-1)\text{degree }(x) \leqslant \text{degree }(zy' - yz') \leqslant \text{degree }(y) + \text{degree }(z) - 1,$$

زیرا $\text{degree }(y') = \text{degree }(y) - 1$ و $\text{degree }(z') = \text{degree }(z) - 1$. اگر به دو طرف $\text{degree }(x)$ را اضافه کنیم به‌دست می‌آید.

$$p\text{ degree }(x) < \text{degree }(x) + \text{degree }(y) + \text{degree }(z) \tag{۴}$$

سمت راست نابرابری (۴) نسبت به x، y و z متقارن است. سمت چپ این نابرابری تابعی از x است. به همین سادگی می‌توانیم حکم‌هایی را که در آنها به جای x در سمت چپ نابرابری (۴)، y یا z قرار دارد به‌دست بیاوریم، بنابراین

$$p\text{ degree }(y) < \text{degree }(x) + \text{degree }(y) + \text{degree }(z)$$

و

$$p\text{ degree }(z) < \text{degree }(x) + \text{degree }(y) + \text{degree }(z)$$

اگر این سه نابرابری را با هم جمع کنیم و سپس نتیجه را بر $\text{degree }(x) + \text{degree }(y) + \text{degree }(z)$ تقسیم کنیم به‌دست می‌آید $p < 3$ و به این ترتیب قضیهٔ آخر فرما ثابت شده است.

خیلی خب، این دقیقاً همان نیست، اما چیزی که ثابت کرده‌ایم (آن هم خیلی ساده) باز هم خیلی جالب است:

حکم ۱ . اگر $p \geqslant 3$، جوابی برای معادلهٔ $x(t)^p + y(t)^p = z(t)^p$ برحسب چندجمله‌ای‌های خالص $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ در $\mathbb{C}[t]$ وجود ندارد. منظورمان از «خالص» این است که سه‌تایی $(x(t), y(t), z(t))$ مضربی چندجمله‌ای از جوابی برای معادلهٔ (۱) در $\mathbb{C}$ نیست.

اینکه اثبات قضیهٔ آخر فرما برای چندجمله‌ای‌ها ساده است از مدت‌ها پیش معلوم بوده است و قطعاً از زمان لیوویل (۱۸۵۱) سابقه دارد، هر چند که اثبات او، که در آن از انتگرال‌گیری استفاده کرده است، از اثباتی که در اینجا

آوردیم پیچیده‌تر است. اثباتی که در بالا آوردیم قطعاً چندین سال سابقه دارد؛ مثلاً، شکلی دیگر از آن را می‌توان در کتاب‌های درسی معمول پنجاه سال قبل یافت. اگر این اثبات را از سر تا ته بخوانید، معلوم می‌شود که این نحوهٔ استدلال را می‌توان به سادگی به دیگر مسئله‌های دیوفانتی تعمیم داد. هر چند که معلوم نیست حد اعلای این تعمیم‌ها چیست.

تعمیم میسن

تعمیم به چیزی که خیلی ساده‌تر از مسئلهٔ اصلی باشد نبوغی واقعی می‌خواهد. اما چه چیزی ممکن است بیانی ساده‌تر از قضیهٔ آخر فرما داشته باشد، و البته از آن کلی‌تر باشد؟ ریچارد میسن (۱۹۸۳) این روشن‌بینی را نشانمان داد:

جواب‌های

$$a+b=c \tag{۵}$$

را پیدا کنید.

اثبات بالا را از اول تا آخر دنبال می‌کنیم و می‌بینیم که کار به کجا می‌کشد: ابتدا فرض می‌کنیم که، بی‌آنکه از کلی بودن استدلال‌مان چیزی کم شود، a، b و c همگی چندجمله‌ای‌هایی غیرصفرند که عاملی مشترک ندارند (مگر اینکه هر سه عاملی مشترک داشته باشند، که در این صورت می‌توانیم چندجمله‌ای‌ها را بر این عامل تقسیم کنیم). سپس مشتق می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$a'+b'=c'$$

اکنون باید از جبر خطی استفاده کنیم. دقیقاً معلوم نیست که چگونه باید مانند قبل جلو برویم، اما آنچه که در درس جبر خطی آموخته‌ایم این است که ضریب‌هایمان را در ماتریسی قرار دهیم، و به جواب‌ها می‌رسیم، به شرطی که دترمینان این ماتریس غیرصفر باشد. به این ترتیب، تعریف می‌کنیم

$$\Delta(t) := \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b(t) \end{vmatrix}$$

اکنون اگر ستون اول را با ستون دوم جمع کنیم به دست می‌آوریم

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a(t) & c(t) \\ a'(t) & c'(t) \end{vmatrix}$$

و به‌طور مشابه، با جمع کردن ستون دوم با ستون اول، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} c(t) & b(t) \\ c'(t) & b'(t) \end{vmatrix}$$

چه تقارن زیبایی.

توجه کنید که $\Delta(t) \neq ۰$، زیرا در غیر این صورت $ab' - a'b = ۰$، و در نتیجه b مضربی عددی از a است (استدلال مانند استدلال بالاست)، که با فرض تناقض دارد.

برای یافتن حکمی که شباهتی معقول با (۳) داشته باشد، آن را این طور تعبیر می‌کنیم که این حکم یعنی توان‌های بالایی از عامل‌های x (همین طور عامل‌های y و z) دترمینانمان را می‌شمارند. بنابراین اکنون فرض کنید که α ریشه‌ای از $a(t)$ باشد و $(t-\alpha)^e$ بیشترین توان $t-\alpha$ که $a(t)$ را می‌شمارد. به روشنی معلوم است که $(t-\alpha)^{e-۱}$ بیشترین توان $t-\alpha$ است که $a'(t)$ را می‌شمارد، و بنابراین بیشترین توان $t-\alpha$ است که $\Delta(t)$، $\Delta(t) = a(t)b'(t) - a'(t)b(t)$، را می‌شمارد (زیرا α ریشهٔ $b(t)$ نیست). به این ترتیب $(t-\alpha)^e$، $\Delta(t)(t-\alpha)$ را می‌شمارد. اگر همهٔ این‌گونه $(t-\alpha)^e$ها را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$a(t)،\quad \Delta(t) \prod_{a(\alpha)=۰} (t-\alpha) \text{ را می‌شمارد.}$$

در حقیقت، $a(t)$ به این دلیل در این حکم آمده است که ما عامل‌های خطی a را درنظرگرفته‌ایم؛ حکم‌های مشابه برای $b(t)$ و $c(t)$ نیز درست‌اند، و چون $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ ریشهٔ مشترک ندارند، می‌توانیم این حکم‌ها را ترکیب کنیم و نتیجه بگیریم

$$a(t)b(t)c(t)،\quad \Delta(t) \prod_{(abc)(\alpha)=۰} (t-\alpha) \text{ را می‌شمارد.} \qquad (۶)$$

گام بعدی این است که درجه‌های دو طرف را درنظر بگیریم و ببینیم چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید. با استفاده از سه نمایش مختلفی که از $\Delta(t)$ در بالا به‌دست آوردیم معلوم می‌شود که

$$\text{degree}(\Delta) \leqslant \begin{cases} \text{degree } (a) + \text{degree } (b) - ۱ \\ \text{degree } (a) + \text{degree } (c) - ۱ \\ \text{degree } (c) + \text{degree } (b) - ۱ \end{cases}$$

درجهٔ $\prod_{abc(\alpha)=\circ}(t-\alpha)$ دقیقاً برابر است با تعداد کل ریشه‌های متمایز $a(t)b(t)c(t)$. اگر همهٔ اینها را در (۶) لحاظ کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\max\{\text{degree }(a),\ \text{degree }(b),\ \text{degree }(c)\} < \#\{\alpha\in\mathbb{C}:\ abc(\alpha)=\circ\}$$

این نتیجه را می‌توان به شکل زیر تعبیر کرد:

حکم ۲. اگر $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ در $\mathbb{C}[t]$ باشند و هیچ ریشهٔ مشترکی نداشته باشند و جوابی خالص از چندجمله‌ای‌ها برای $a(t)+b(t)=c(t)$ باشند، آن وقت بزرگ‌ترین درجه در میان درجه‌های $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ از تعداد ریشه‌های متمایز $a(t)b(t)c(t)=\circ$ کمتر است.

این نتیجه «بهترین نتیجهٔ ممکن» است، به این تعبیر که می‌توانیم بی‌نهایت مثال پیدا کنیم که در آنها تعداد ریشه‌های $a(t)b(t)c(t)=\circ$ دقیقاً یکی بیشتر از بزرگ‌ترین درجه‌هاست: مثلاً، اتحاد آشنای

$$(۲t)^{۲}+(t^{۲}-۱)^{۲}=(t^{۲}+۱)^{۲}$$

یا حتی

$$t^{n}+۱=(t^{n}+۱)$$

که جذابیت کمتری دارد، مثال‌های خوبی‌اند. رده‌بندی چنین اتحادهایی از چندجمله‌ای‌ها طبیعتاً منجر به بررسی ردهٔ خاصی از تابع‌های گویا می‌شود، چیزی که در مطلب بعد می‌بینیم.

اثبات سیلورمن

سیلورمن برای رسیدن به حکم رهیافتی پیچیده‌تر را برگزیده، و در آن از نظریهٔ نگاشت‌های پوششی استفاده کرده است، شیوه‌ای که خیلی کارآمد از آب در آمده است. تابع گویای

$$\pi:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

را درنظر بگیرید؛ یعنی $\pi(t)=\frac{f(t)}{g(t)}$، که در اینجا f و g چندجمله‌ای‌اند. دستور ریمان‌ـهورویتس نتیجه‌ای کلیدی دربارهٔ نگاشت‌های گویاست؛ در این مورد، بنابر دستور ریمان‌ـهورویتس،

$$۲\text{degree }(\pi)=۲+\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}}\{\text{degree }(\pi)-\#\pi^{-۱}(z)\} \qquad (۷)$$

که در اینجا $\text{degree}(\pi) = \max\{\text{degree}(f), \text{degree}(g)\}$ و $\pi^{-1}(z)$ مجموعهٔ همهٔ xهایی در $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ است که $z = \pi(x)$. این مجموعه، مجموعهٔ ریشه‌های $f(x) - zg(x) = 0$ است، و درنتیجه تعداد عضوهای $\pi^{-1}(z)$ حداکثر $\text{degree}(\pi)$ است، و البته معمولاً همین عدد است. در غیر این صورت، $f(x) - zg(x) = 0$ ریشه‌ای مضاعف دارد، و درنتیجه $f'(x) - zg'(x) = 0$.

از روی جوابی برای معادلهٔ (۵) نگاشت π را این طور تعریف می‌کنیم: $\pi(t) := \frac{a(t)}{c(t)}$. چون هر جمله در سمت راست (۷) غیرمنفی است، اگر مجموع موردنظر را صرفاً روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ درنظر بگیریم، کرانی پایینی به‌دست می‌آوریم. زیرمجموعه‌مان را $\{0, 1, \infty\}$ انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که اگر $\pi(\infty) \neq 0$، آن وقت وقتی و فقط وقتی $\pi(t) = 0$ که $a(t) = 0$، درنتیجه $\pi^{-1}(0)$ مجموعهٔ ریشه‌های متمایز $a(t)$ است. به‌طور مشابه، اگر $\pi(\infty) \neq 1$، آن وقت $\pi^{-1}(1)$ مجموعهٔ ریشه‌های متمایز b است؛ و اگر $\pi(\infty) \neq \infty$، آن وقت $\pi^{-1}(\infty)$ مجموعهٔ ریشه‌های متمایز c است. چون ∞ حداکثر ممکن است عضو یکی از مجموعه‌های $\pi^{-1}(0)$، $\pi^{-1}(1)$ و $\pi^{-1}(\infty)$ باشد، با لحاظ کردن همهٔ این اطلاعات در تساوی (۷)، نتیجه می‌گیریم که

$$\text{degree}(\pi) \leqslant \#\{abc \text{ ریشه‌های متمایز}\} - 1 \tag{۸}$$

که معادل با حکم (۲) است.

در نابرابری (۸) تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که زیرمجموعه‌هایی که در (۷) درنظر گرفتیم واقعاً همهٔ جمله‌های غیرصفر را شامل باشند؛ یعنی، به‌ازای هر z که $z \notin \{0, 1, \infty\}$، $\#\pi^{-1}(z) = \text{degree}(\pi)$. نگاشت‌های با این ویژگی را، به افتخار گ. و. بِلی، که پیش از دیگران اهمیت این نگاشت‌ها را دریافته بود، نگاشت‌های بِلی می‌نامند. او، علاوه بر چیزهای دیگر، ثابت کرد که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی از $\overline{\mathbb{Q}}$ مانند S نگاشتی مانند $\pi : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ وجود دارد که به‌ازای آن $\pi(S) \subseteq \{0, 1, \infty\}$ و به‌ازای zهایی که $z \neq \{0, 1, \infty\}$، $\#\pi^{-1}(z) = \text{degree}(\pi)$. می‌توانیم این حکم را برحسب چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر تعبیر کنیم.

حکم ۳. به‌ازای هر چندجمله‌ای مانند $f(t)$ در $\mathbb{Z}[t]$ چندجمله‌ای‌هایی مانند $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ در $\mathbb{Z}[t]$ وجود دارند که ریشه‌ای مشترک ندارند و جوابی از چندجمله‌ای‌های خالص برای $a(t) + b(t) = c(t)$ هستند که $f(t)$، $a(t)b(t)c(t)$ را می‌شمارد و بزرگ‌ترین درجه در میان درجه‌های $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ دقیقاً یکی کمتر از تعداد ریشه‌های متمایز $a(t)b(t)c(t) = 0$ است.

به این ترتیب می‌توانیم از نگاشت‌های بِلی برای ساختن «بهترین مثال‌های ممکن» در حکم (۲) استفاده کنیم. همان‌طور که بعداً خواهیم دید، این طرز ساخت زیبا در به‌دست آوردن چندین نتیجهٔ مهم محوریت دارد.

حکمی مشابه در مورد عددهای صحیح وجود دارد؟

خیلی نتیجه‌ها در مورد معادله‌های دیوفانتی در عددهای صحیح مشابه نتیجه‌هایی برای معادله‌های دیوفانتی در چندجمله‌ای‌ها هستند. با داشتن نابرابری فوق‌العاده سادهٔ میسن برای جواب‌های $a+b=c$ در چندجمله‌ای‌ها (یعنی حکم (۲))، می‌توان پرسید که آیا نتیجه‌ای مشابه برای عددهای صحیح وجود دارد (که اگر وجود داشته باشد، منجر به اثباتی سرراست برای قضیهٔ آخر فرما می‌شود!)

معمولاً عددهای اول را مشابه مناسبی برای عامل‌های تحویل‌ناپذیر چندجمله‌ای‌ها می‌دانند، بنابراین می‌توان حدس زد که مشابهی برای حکم (۱) چیزی شبیه به این است:

اگر $a+b=c$، که در اینجا a، b و c عددهایی صحیح و نسبت به هم اول‌اند، آن وقت تعداد کل عامل‌های اول a (یا b یا c) با احتساب تکراری‌ها از تعداد کل عامل‌های اول متمایز abc کمتر است.

اگر بخواهیم درستی این حدس را بررسی کنیم خیلی زود برایش مثال‌های نقضی پیدا می‌کنیم، مانند $۱+۱=۲$ یا $۳+۱=۴$ یا $۷+۱=۸$؛ و هر چه بیشتر بگردیم مثال‌های نقض بیشتری پیدا می‌کنیم.[۱]

حدس بدی از آب در آمد! شاید اگر این حدس را کمی دست‌کاری کنیم، به این سادگی برایش مثال نقض پیدا نشود. طبق سنتی در نظریهٔ تحلیلی اعداد، هنگام شمردن عددهای اول بهتر است آنها را با وزن $\log p$ بشماریم. بنابراین، شاید اندازه‌ای مناسب برای عدد صحیح a، $a=\prod_p p^{e_p}$، مشابه درجهٔ چندجمله‌ای $a(t)$، $\sum_p e_p$ نباشد، بلکه $\sum_p e_p \log p$ باشد که برابر است با $\log a$. سپس به جای تعداد کل عامل‌های متمایز $a(t)b(t)c(t)$، $\sum_{p|abc} \log p$ را قرار می‌دهیم، که در اینجا مجموع مورد نظر روی مقسوم‌علیه‌های اول متمایز abc مانند p است. اگر نماهای دو طرف را در نظر بگیریم به حدس زیبای زیر می‌رسیم:

اگر $a+b=c$، که در اینجا a، b و c عددهایی صحیح و نسبت به هم اول‌اند، آن وقت

$$\max\{a,b,c\} \leqslant \prod_{\substack{p \text{ اول است} \\ p \mid abc}} p \qquad (۹)$$

متأسفانه، خیلی راحت می‌توان برای این حدس مثال نقض پیدا کرد: $۹=۸+۱$، بنابراین $۳۲=۲۷+۵$، $۴۹=۴۸+۱$، $۶۴=۶۳+۱$، $۸۱=۸۰+۱$، $۸۱=۴۹+۳۲$، …، هر چند که در همهٔ این مثال‌ها نسبت دو طرف خیلی بزرگ نیست. درحقیقت، وقتی که $۱\leqslant a,b,c \leqslant ۱۰۰۰$، بزرگ‌ترین نسبتی که به آن برمی‌خوریم $\frac{۹}{۲}$ است، که مربوط به مثال $۱۹\times ۳^۳ = ۲^۹+۱$ است. با توجه به این مطالب به‌نظر می‌رسد که اگر سمت راست نابرابری (۹) را در عدد ثابت بزرگی (شاید ۵) ضرب کنیم، به نابرابری درستی برسیم. متأسفانه،

۱. درحقیقت، اگر $۲^n-۱$ اول باشد، از حکم بالا نتیجه می‌شود $n < ۱+۱$!

حتی این هم درست نیست، زیرا اگر $a = ۱$ و $c = ۲^{p(p-۱)}$، که در اینجا p عددی اول و بزرگ است، آن وقت $b = ۲^{p(p-۱)} - ۱$ و b بر $p^۲$ بخش‌پذیر است، درنتیجه سمت راست نابرابری (۹) حداکثر $\frac{۲b}{p}$ است، یعنی اینکه نابرابری (۹) را فقط با کمی تغییر نمی‌توان درست کرد.

به نظر می‌رسد که هرگونه تلاش برای رسیدن به حدسی دقیق ناکام می‌ماند، هر چند که مثال‌های عددی حاکی است که داریم به چیزی درست می‌رسیم. در این وضعیت به شگرد ریاضی‌دانان متوسل می‌شویم (که فقط وقتی از آن استفاده می‌کنند که می‌دانند به چیزی نزدیک‌اند اما نمی‌توانند آن را درست فرمول‌بندی کنند): با وارد کردن ε چیزها را تغییر کمی دهید.

حدس abc اُسترله و مَسِر. به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی ثابت مانند κ_ε وجود دارد که اگر a، b و c عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول باشند و

$$a + b = c$$

آن وقت

$$c \leqslant \kappa_\varepsilon \Bigg(\prod_{\substack{\text{اول است } p \\ p \mid abc}} p \Bigg)^{۱+\varepsilon}$$

اصلاً این حدس به درد می‌خورد؟

یکی از هدف‌هایمان در فرمول‌بندی این حکمِ مشابه برای قضیهٔ مِیسن این بود که بتوانیم قضیهٔ آخر فرما روی عددهای صحیح را از آن نتیجه بگیریم. باید تحقیق کنیم که چنین چیزی درست است. اگر

$$x^n + y^n = z^n$$

که در اینجا x، y و z عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، آن وقت در حدس abc فرض می‌کنیم

$$a = x^n, \quad b = y^n, \quad c = z^n$$

راهی روشن برای مشخص کردن حاصل‌ضرب عددهای اولی که $x^n y^n z^n$ را می‌شمارند نداریم، اما می‌دانیم که اینها دقیقاً همان عددهای اولی هستند که xyz را می‌شمارند، و بنابراین حاصل‌ضربشان حداکثر xyz است. علاوه بر این، چون x و y مثبت‌اند، هر دو از z کوچک‌ترند، درنتیجه $xyz < z^۳$. به این ترتیب از حدس abc به‌دست می‌آید که به‌ازای هر عدد مثبت مانند ε،

$$z^n \leqslant \kappa_\varepsilon (z^۳)^{۱+\varepsilon}$$

اگر فرض کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۶}$ و $n \geqslant ۴$، و درنتیجه $\frac{n}{۸} \geqslant (۱+\varepsilon)۳ - n$، از حدس abc به‌دست می‌آوریم

$$z^n \leqslant \kappa_{۱/۶}^{۸}$$

به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که وقتی $n \geqslant ۴$، در هر جواب معادلهٔ (۱) عددهای x^n، y^n و z^n همگی از کرانی مطلق کمترند، و درنتیجه تعداد چنین جواب‌هایی متناهی است (و اویلر ثابت کرده است که وقتی $n = ۳$، جوابی برای معادلهٔ (۱) وجود ندارد).

اگر صورتی دقیق از حدس abc داشته باشیم (یعنی، مقدار κ_ε معلوم باشد)، آن وقت می‌توانیم کرانی مشخص برای همهٔ جواب‌های معادلهٔ فرما به‌دست آوریم و از طریق محاسبه تا این کران مشخص کنیم که بالاخره جوابی وجود دارد یا نه. این اثبات بهترین اثبات قابل تصور برای قضیهٔ آخر فرما نیست، اما خواستهٔ ما را برآورده می‌کند.

شواهد حاکی است که ممکن است حدس abc وقتی که $\varepsilon = \kappa_\varepsilon = ۱$ درست باشد، درنتیجه

$$c \leqslant \Big(\prod_{\substack{p \text{ اول است} \\ p \mid abc}} p \Big)^{۲}$$

اگر چنین باشد، آن وقت قضیهٔ آخر فرما به‌ازای $n \geqslant ۶$ خیلی فوری به‌دست می‌آید، و تکلیف حالت‌هایی که $n = ۳, ۴, ۵$ حدود دویست سال است که معلوم است ([Ri] را ببینید).

کاری جذاب این است که به دنبال معادله‌های دیوفانتی دیگری باشیم که بتوانیم از حدس abc مستقیماً در مورد آنها استفاده کنیم. واضح است که می‌توان از این حدس در مورد معادلهٔ فرما با ضریب‌های دلخواه، یعنی

$$Ax^n + By^n = Cz^n$$

که در اینجا A، B و C عددهایی صحیح و ثابت‌اند، و نیز معادلهٔ کاتالان، یعنی

$$x^p - y^q = ۱, \qquad p, q \geqslant ۲$$

مستقیماً استفاده کرد. به‌عنوان تمرین از خواننده می‌خواهیم که از حدس abc برای بررسی معادلهٔ سه‌جمله‌ای کلی‌تر

$$Ax^p + By^q = Cz^r \tag{۱۰}$$

استفاده کند. درضمن، خیلی دوست داریم که معادلهٔ فرما را علاوه‌بر معادله‌های سه‌جمله‌ای دیگر به معادله‌هایی با تعداد جمله‌های دلخواه نیز تعمیم دهیم. معادله‌های یک متغیره از نظر معادله‌های دیوفانتی خیلی جذاب نیستند،

اما بررسی جواب‌های گویای معادله‌های دومتغیره[۱]، یعنی، نقطه‌های گویا روی منحنی‌ها، خیلی در کانون تحقیقات نظریهٔ اعداد قرار دارند.

در سال ۱۹۳۰ موردل [Mo] یکی از مهم‌ترین مقاله‌ها در تاریخ ریاضیات را نوشت، مقاله‌ای که به دو دلیل آن را بررسی می‌کنیم.[۲] موردل در انتهای این مقاله پنج سؤال پرسیده است که در جهت‌دهی به اکثر تحقیقات مهم در حساب دیوفانتی در قرن بیستم مؤثر بوده‌اند. بهترین و دشوارترین این سؤال‌ها را فالتینگس در سال ۱۹۸۳ با ابداع تعدادی از عمیق‌ترین و قوی‌ترین ایده‌ها در تاریخ ریاضیات پاسخ داده است. در بخش بعد سعی می‌کنیم برخی ایده‌های مربوط به قضیهٔ فالتینگس را بیان کنیم.

حدس abc و «تالار افتخارات» نظریهٔ اعداد

قضیهٔ فالتینگس با نام خانوادگی حدس موردل (نشان فیلدز ۱۹۸۶)

فرض کنید $f(x,y)$ چندجمله‌ایی دومتغیره با ضریب‌های صحیح در $\mathbb{Z}[x,y]$ باشد. می‌خواهیم عددهایی گویا مانند u و v پیدا کنیم که $f(u,v)=0$. گاهی انجام چنین کاری خیلی ساده است: مثلاً، اگر $f(x,y)=x+y-1$، آن وقت می‌توانیم به‌ازای هر عدد گویا مانند t قرار دهیم $u=\frac{1}{2}+t$ و $v=\frac{1}{2}-t$، و همهٔ جواب‌های گویای این معادله به این شکل‌اند. مثالی دیگر، که به سادگی قبلی نیست اما خیلی مشهور است، $f(x,y)=x^2+y^2-1$ است، که جواب‌هایش $u=\frac{2t}{1+t^2}$ و $v=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ هستند، که در اینجا t هر عدد گویایی می‌تواند باشد. هر دو اینها مثال‌هایی از معادله‌هایی‌اند که می‌توان بی‌نهایت جواب گویا برای آنها به شکل پارامتری شده (یعنی، به شکل تابعی گویا از متغیر t) به دست آورد.

گرد فالتینگس

۱. خوب است خوانندهٔ ناآشنا توجه کند که جواب‌های گویای معادلهٔ دومتغیره معادل جواب‌های صحیح معادله‌ای سه‌متغیره‌اند که در آن درجهٔ کل همهٔ تک‌جمله‌ای‌ها یکسان است، مثلاً به این ترتیب که دو طرف معادله را در مخرج‌ها ضرب کنیم.

۲. موردل در «خاطرات آدمی هشتاد ساله» خاطرنشان می‌کند که اولین مجله‌ای که این مقاله را برایش فرستاده بوده است به دلیل اینکه چیز جالبی ندارد آن را پس فرستاده بوده است!

ردهٔ دوم از مثال‌هایی که ممکن است بی‌نهایت جواب گویا برای آنها به‌دست آوریم «خم‌های درجهٔ سوم» هستند. مثلاً، منحنی تاکسی،[۱]

$$x^3 + y^3 = 1729$$

را درنظر بگیرید. دوتا جواب رامانوجان $1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$ است؛ به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اینها تنها جواب‌ها در مجموعهٔ عددهای صحیح‌اند. با این وجود، پیداکردن بی‌نهایت جواب در مجموعهٔ عددهای گویا دشوار نیست. در حقیقت، اگر جوابی مانند (u, v) در دست باشد، خیلی راحت می‌توان با درنظرگرفتن

$$U = \frac{u(u^3 - 3458)}{1729 - 2u^3}$$

و

$$V = \frac{v(u^3 + 1729)}{1729 - 2u^3}$$

جوابی دیگر پید کرد. اگر ابتدا $(1, 2)$ را درنظر بگیریم، به جواب‌های دیگر

$$(20760/1727,\ -3457/1727),$$
$$(184026330892850640/15522982448334911,$$
$$61717391872243199/15522982448334911),$$

می‌رسیم، و نوشتن جواب بعدی بی‌فایده است، زیرا هر درایه‌اش هفتاد رقم دارد! نگرانی اصلی‌مان این است که دیدیم، در مورد رده‌ای از خم‌ها، می‌توان جواب‌های دیگری را به شکل تابعی از جواب‌های قبلی به‌دست آورد و به این ترتیب به بی‌نهایت جواب رسید (و چون درایه‌ها خیلی سریع رشد می‌کنند، می‌توان ثابت کرد که از صورتی پارامتری شده به‌دست نمی‌آیند).

به این ترتیب دو حالت سراغ داریم که معادله‌ای مانند $f(x, y) = 0$ ممکن است بی‌نهایت جواب گویا داشته باشد. در حقیقت، فضیهٔ فالتینگس می‌گوید که اینها تنها حالت‌هایی هستند که معادله‌ای شبیه اینها ممکن است بی‌نهایت جواب گویا داشته باشد؛ به عبارت دیگر، فقط تعدادی متناهی جواب «پراکنده» وجود دارد. در حقیقت، اگر همهٔ جواب‌های $f(x, y) = 0$ را که از دو روش بالا به‌دست می‌آیند یک طرف بگذاریم، ما می‌مانیم و تعدادی

۱. هنگامی که رامانوجان دوران نقاهت بیماری ذات‌الریه را در بیمارستانی انگلیسی می‌گذارند، گ. ه. هاردی، دوستش و کسی که با او مقالهٔ مشترک نوشته است، به عیادتش می‌رود. هاردی که می‌خواست سر حرف را باز کند خاطرنشان کرد که شمارهٔ ۱۷۲۹ روی تاکسی‌ای که از ایستگاه قطار تا بیمارستان سوارش بوده خیلی ابلهانه بوده است. رامانوجان نظرش را رد می‌کند و یادآوری می‌کند که این عدد کوچک‌ترین عددی است که به دو طریق مختلف به شکل مجموع دو مکعب است. البته، رامانوجان به این نکتهٔ جالب توجه نکرده بود که این عدد سومین عدد کارمایکل است!

متناهی جواب دیگر. حتی پذیرفتنی است که کران تعداد نقطه‌های گویایی که مانده‌اند تابعی از درجهٔ f باشد. این قضیهٔ استثنایی چندین نتیجهٔ حیرت‌انگیز دارد. مثلاً به‌ازای $p \geqslant 4$، برای معادلهٔ (۱) فقط تعدادی متناهی جواب طبیعی و نسبت به هم اول وجود دارد. به‌طور مشابه، فقط تعدادی متناهی جواب طبیعی و نسبت به هم اول برای معادلهٔ (۱۰) وجود دارد، گو اینکه حدس abc چنین چیزی را پیش‌بینی کرده است. بنابراین، مثلاً، هر یک از معادله‌های

$$x^4 + y^4 = 17z^4, \qquad x^2 + y^3 = z^7 \tag{۱۱}$$

فقط تعدادی متناهی جواب صحیح نسبت به هم اول دارند.

یکی از ضعف‌های مهم قضیهٔ فالتینگس این است که هیچ کران بالایی برای اندازهٔ جواب‌ها به‌دست نمی‌دهد، و به این ترتیب هیچ «الگوریتمی» برای پیدا کردن همهٔ جواب‌ها، با اینکه می‌دانیم تعدادشان متناهی است، پیشنهاد نمی‌کند (اثبات اینکه می‌دانیم همهٔ جواب‌های دو معادلهٔ (۱۱) چه عددهایی هستند روشنی جدید می‌خواهد).

الکیس در سال ۱۹۹۱ با استفاده از صورتی روشن از حدس abc (یعنی، صورتی که در آن به‌ازای هر ε مقداری به κ_ε نسبت داده شده است) ثابت کرد که می‌توان صورتی روشن از قضیهٔ فالتینگس را نتیجه گرفت. این اثبات بر محور بررسی دقیق نگاشت‌های بِلی (به‌ویژه ایده‌هایی که در حکم (۳) دخیل بودند) بوده است.

موره‌ـبیلی، براساس ایده‌های اشپیرو، یک گام به جلوتر رفت. او ثابت کرد که اگر بتوان کران‌های بالایی خوبی برای اندازهٔ مختصات نقطه‌های گویا روی[1] $y^2 = x^5 - x$ در هر هیأت عددی[2] به‌دست آورد، آن وقت حدس abc نتیجه می‌شود. (در اینجا کران‌های «خوب» کران‌هایی هستند که به‌طور صریح به مبین هیأت عددیی که این نقطه‌ها روی آن گویا هستند وابسته‌اند.) به این ترتیب، به تعبیری، این مسئله و حدس abc معادل‌اند.

قضیهٔ روث (نشان فیلدز ۱۹۵۸)

کلاوس روث

فرض کنید α عدد حقیقی جبری گنگی از درجهٔ d باشد. با استدلالی ساده براساس اصل لانه‌کبوتری معلوم می‌شود که بی‌نهایت عدد گویا مانند $\frac{m}{n}$ وجود دارد که $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$. از طرف دیگر، اگر $\frac{m}{n}$ را در چندجمله‌ای مینیمال α قرار دهیم معلوم می‌شود که عددی ثابت و مثبت مانند c_α وجود دارد که $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| > \frac{c_\alpha}{n^d}$.

سؤال مشهوری در نظریهٔ اعداد این بوده که آیا می‌توان این کران پایینی را بهتر کرد، و روث (۱۹۵۵) «بهترین نتیجهٔ ممکن» از این دست را به‌دست آورد: به‌ازای هر عدد

۱. یا، برای تازه‌کارها، روی هر خم جبری یا گونهٔ بزرگ‌تر از ۱.

۲. یعنی، توسیع هیأتی متناهی $\mathbb{Q}$.

ثابت و مثبت مانند ε عددی ثابت و مثبت مانند $c_{\alpha,\varepsilon}$ وجود دارد که

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{n^{۲+\varepsilon}}$$

فرض کنید $F(x,y)$ در $\mathbb{Z}[x,y]$ صورت همگن دومتغیره‌ای بدون عامل تکراری باشد.[۱] در این صورت بنابر قضیهٔ روث، به‌ازای هر دو عدد صحیح و نسبت به هم اول مانند m و n،

$$|F(m,n)| \gg_F n^{\deg(F)} \prod_{\alpha:F(\alpha,۱)=۰} \left|\alpha - \frac{m}{n}\right|$$
$$\gg_{F,\varepsilon} n^{\deg(F)-۲-\varepsilon} \qquad (۱۲)$$

(ممکن است معنی «$A \gg_F B$» برای خیلی از خوانندگان معلوم نباشد. معنی این عبارت این است که عددی ثابت و مثبت مانند c_F، که فقط وابسته به F است، وجود دارد که «$A \geqslant c_F B$»؛ به همین ترتیب، «$A \gg_{F,\varepsilon} B$» یعنی اینکه نابرابری مشابهی که در آن عدد ثابت و مثبت $c_{F,\varepsilon}$ فقط به F و ε وابسته است برقرار است. این نمادگذاری در نوشتن خیلی چیزها در نظریهٔ تحلیلی اعداد صرفه‌جویی می‌کند.) از خواننده می‌خواهیم که تحقیق کند این حکم واقعاً معادل قضیهٔ روث است.

از حدس abc حکمی نتیجه می‌شود که تا حدودی از قضیهٔ روث قوی‌تر است: به‌ازای هر دو عدد صحیح و نسبت به هم اول مانند m و n،

$$\prod_{p|F(m,n)} p \gg_{F,\varepsilon} \left(\max\{|m|,\ |n|\}\right)^{\deg(F)-۲-\varepsilon} \qquad (۱۳)$$

توجه کنید که $|F(m,n)| \geqslant \prod_{p|F(m,n)} p$ (به شرطی که $F(m,n) \neq ۰$)، بنابراین قضیهٔ روث (به آن صورتی که در (۱۲) آمده) فوری نتیجه می‌شود، همچنین توجه کنید که اگر فرض کنیم $F(x,y) = xy(x+y)$، دوباره به حدس abc اصلی می‌رسیم. به این ترتیب، این حدس معادل حدس abc است، هر چند که به نظر می‌رسد قوی‌تر است.

می‌توان طرحی از اثبات اینکه (۱۳) از حدس abc نتیجه می‌شود آورد: فرض کنید $f(t) = F(t,۱)$ و از حکم (۳) استفاده کنید. فرض کنید $f(t)g(t)$ برابر با حاصل‌ضرب عامل‌های خطی متمایزی باشد که $a(t)b(t)c(t)$ را می‌شمارند (که در اینجا $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ همان‌هایی هستند که در حکم (۳) بودند) و با قرار دادن $t = \frac{m}{n}$ همگن‌سازی کنید تا به معادله‌ای به شکل $A(m,n) + B(m,n) = C(m,n)$ برسید. بدون اینکه از کلی بودن استدلال‌مان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $A(m,n)$، $B(m,n)$ و $C(m,n)$ همگی مثبت‌اند، زیرا اگر لازم شد می‌توانیم جای آنها را عوض کنیم، و توجه کنید که $\gcd(A,B)$ باید برایند $a(t)$ و $b(t)$ را بشمارد، درنتیجه

۱. به عبارت دیگر، اگر درجهٔ F برابر با d باشد، آن وقت $F(t,۱)$ چندجمله‌ایی است که درجه‌اش دست‌کم $d-۱$ است، ریشهٔ تکراری ندارد و $F(x,y) = y^d F\left(\frac{x}{y}, ۱\right)$.

کراندار است. اکنون اگر از حدس abc در مورد این معادله استفاده کنید معلوم می‌شود که حاصل‌ضرب عددهای اولی که ABC را می‌شمارند محدود به $|G(m,n)|$ ضرب‌در عددهای اولی است که $F(m,n)$ را می‌شمارند. توجه کنید که تعداد عامل‌های خطی FG حداکثر یکی بیشتر[1] از تعداد ریشه‌های fg است، یعنی، حداکثر $d+2$ است، که در اینجا d بیشترین درجه در میان درجه‌های a، b و c است (بنابر حکم (۳)). نتیجه مورد نظر از ترکیب این مطالب با این نکته که

$$\max\{A(m,n),\ B(m,n),\ C(m,n)\} \gg \max\{|m|,\ |n|\}^d$$

به دست می‌آید.

قضیهٔ بیکر (نشان فیلدز ۱۹۷۰)


آلن بیکر

زیگل در سال ۱۹۲۹ ثابت کرد که اگر $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$، آن وقت بجز تعدادی متناهی از جفت‌هایی از عددهای صحیح مانند u و v که $f(u,v) = 0$ بقیه را می‌توان پارامتری به دست آورد. هر چند که، در عمل، پیدا کردن همهٔ جواب‌های پارامتری آسان است، اما زیگل نتوانست راهی پیشنهاد کند که کران آن تعداد متناهی جواب صحیح را مشخص کند (درست مانند قضیهٔ فالتینگس که راهی برای پیدا کردن کران نقطه‌های گویا مانند u و v که $f(u,v) = 0$ پیشنهاد نمی‌کند). بیکر در سال ۱۹۶۸ موفقیت خارق‌العاده‌ای در «صورت‌های خطی از لگاریتم‌ها» به دست آورد، که به کمک آن می‌توان، در حالت‌های خیلی مهمی، کران‌هایی برای اندازهٔ نقطه‌های صحیح پیدا کرد. با این همه، قضیه‌اش را فقط می‌توان به صورت تکنیکی بیان کرد!

فرض کنید p_1، p_2، ... و p_k عددهایی اول باشند. فرض می‌کنیم $L = \log\left|\log\left(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}\right)\right|$، که در اینجا a_iها عددهایی صحیح‌اند.

با استفاده از اصل لانه‌کبوتری می‌توان ثابت کرد که، به ازای هر عدد طبیعی مانند A که $A > 1$، عددهایی صحیح مانند a_1، a_2، ... و a_k وجود دارند که $|a_i| \leqslant A$، $1 \leqslant i \leqslant k$، و $L \leqslant -(k-1)\log A + \log\log(p_1p_2\cdots p_k)$.

بنابر قضیهٔ بیکر (به شکل که در مقاله‌ای جدید با ووستلتس آمده و کران‌هایش بهتر شده است)

$$L \geqslant -(16k)^{2(k+2)}(\log A)\prod_{i=1}^{k}\log p_i$$

۱. «یکی بیشتر» به این دلیل است که ممکن است در اینجا عاملی مانند n باشد که در معادلهٔ abc متناظر با یکی از a، b یا c است که درجهٔ کمتری نسبت به دو تای دیگر دارد.

به نظر می‌رسد که خیلی مانده تا این نتیجه «بهترین نتیجه ممکن» باشد. وانگهی، از حدس abc نتیجه می‌شود

$$L \gg -(\log A) \sum_{i=۱}^{k} \log p_i$$

که به طور چشمگیری بهتر از قبلی و نزدیک به بهترین نتیجهٔ ممکن است، و کران بالایی را که در بالا ذکر کردیم به دست می‌دهد. علاوه بر این، این کران بالایی برای L صورتی تغییر یافته از حدس abc را نتیجه می‌دهد، در نتیجه این دو سؤال، به تعبیری، معادل‌اند.

باید خاطرنشان کنیم که از تکنیک‌های این حوزه برای پرداختن به حدس abc استفاده کرده‌اند. استوارت و یو در سال ۱۹۹۱ ثابت کردند که اگر $a + b = c$، که در اینجا a، b، c عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، آن وقت

$$c \ll \exp\left(O\Big(\big(\prod_{p|abc} p\big)^{۲/۳}\Big)\right)$$

یک «exp» را بردارید، ما همان جائیم! متأسفانه در مورد نتیجه‌هایی که با این تکنیک به دست می‌آیند چنین چیزی معمول است: با تمام زیبایی‌هایی که دارند هدفمان را برآورده نمی‌کنند؛ با وجود این، از هیچی بهترند.

بیکر اخیراً با الهام گرفتن از کاربردهای تخمین‌های صورت‌های خطی از لگاریتم‌ها صورت صریح زیر را برای حدس abc به دست آورده است:

$$c \ll N \sum_{\substack{n \leq N \\ p \mid n \Rightarrow p \mid N}} ۱$$

که در اینجا $N = \prod_{p|abc} p$.

قضیهٔ بومبیری (نشان فیلدز ۱۹۷۴)


انریکو بومبیری

فرض کنید χ مشخصهٔ دیریشله‌ای به پیمانهٔ q باشد.[۱] فرض تعمیم یافتهٔ ریمان این است که اگر $L(s,\chi) = ۰$، آن وقت یا s عددی صحیح و منفی است («صفری بدیهی») یا $\mathrm{Re}(s) = \frac{۱}{۲}$. امید کمی می‌رود که این حکم یا چیزی خیلی شبیه به آن به زودی ثابت شود. با این همه، خیلی از نتیجه‌های فرض تعمیم یافتهٔ ریمان از اینکه اگر $L(s,\chi) = ۰$، آن وقت $\mathrm{Re}(s)$ خیلی بزرگ نیست، یا اینکه تعداد sهایی که $L(s,\chi) = ۰$ و $\mathrm{Re}(s)$ «بزرگ» است زیاد نیست، نتیجه می‌شوند. یکی از

۱. یعنی هم‌ریختی‌ای از $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ به $\mathbb{C}$.

صورت‌های نتیجهٔ معروف بومبیری (۱۹۶۵) را می‌توان به شکل زیر تعبیر کرد.

به‌ازای «تقریباً همهٔ[۱]» χهای به پیمانهٔ q، صفرهای $L(s,\chi)$ «خیلی دورتر» از $\operatorname{Re}(s) = \frac{۱}{۲}$ پراکنده‌اند.

پیش از ۱۹۳۰ ثابت شده بود که، به‌ازای عددی مثبت و تا حد کافی کوچک مانند c، اگر $L(s,\chi) = ۰$ و $\operatorname{Re}(s) > ۱ - \frac{c}{\log q}$، آن وقت s حقیقی است، χ مشخصه‌ای حقیقی و درجهٔ دوم است، و به‌ازای هر عددی به حد کافی بزرگ مانند Q، حداکثر یک عدد مانند q بین Q و $Q^۲$ وجود دارد. چنین صفرهایی به «صفرهای زیگل» مشهورند.[۲]

گرانویل و استارک در سال ۱۹۹۵ ثابت کردند که، با فرض درستی حدس abc، به‌ازای هر χ به پیمانهٔ q، که (به پیمانهٔ ۴) $q \equiv ۳$، $L(s,\chi)$ صفر زیگلی ندارد.

قضیهٔ وایلز (لوح جامعهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان ۱۹۹۸)


اندرو وایلز

وایلز قضیهٔ آخر فرما را مستقیماً ثابت نکرد. در عوض، او به حدس مشهور و قدیمی‌ای در مورد خم‌های بیضوی به نام «حدس تانیاما»[۳] پرداخت و ثابت کرد که درستی این حدس برای نتیجه گرفتن قضیهٔ آخر فرما کافی است. بعداً دیگران حدس تانیاما را ثابت کردند. در اینجا فقط می‌توانیم توصیفی مختصر، و در جاهایی غیردقیق، از این حدس را بیاوریم. در بالا دیدیم که چگونه خم $x^۲ + y^۲ = ۱$ را می‌توان با $x = \frac{۲t}{۱+t^۲}$ و $y = \frac{۱-t^۲}{۱+t}$، که در اینجا $t \in \mathbb{C}$، پارامتری کرد. انواع دیگری از روش‌های پارامتری کردن وجود دارند: مثلاً، دیدیم که چگونه بی‌نهایت نقطهٔ گویا روی خم $C : x^۳ + y^۳ = ۱۷۲۹$ را با استفاده از نگاشتی که نقطه‌ای از C را به نقطه‌ای «بزرگ‌تر» روی C می‌فرستد، به‌عبارت دیگر، نگاشتی مانند $\phi : C \to C$ که در مختصات این نقطه‌ها تابعی گویاست[۴]، به دست آوریم. می‌توان این مثال را تعمیم داد و گفت که خم C خم X را «پارامتری می‌کند»، به شرطی که نگاشتی مانند $\phi : C \to X$ وجود داشته باشد که در مختصات نقطه‌ای روی C گویا باشد.

حدس تانیاما (که اکنون قضیه است) این است که هر خم بیضوی را می‌توان با خمی «پیمانه‌ای» پارامتری کرد:

۱. یعنی، ۱۰۰٪.

۲. از بخت بد زیگل، پس از این کار درخشانش، معلوم شد که این صفرها به‌طور ناباورانه‌ای وجود دارد.

۳. صورت غیردقیقی که از این حدس آورده‌ایم به صورت اصلی آن که تانیاما مطرح کرده است نزدیک است. پس از آن شیمورا صورت این حدس را دقیق‌تر کرد، و ثابت کرد که در بی‌نهایت حالت درست است. مشهور شدن این حدس قطعاً به دلیل کارها و نفوذ ویل بوده است، و به این ترتیب این حدس را با زیرمجموعه‌های مختلفی از این سه نام می‌خوانند!

۴. علاوه بر این، درجهٔ ϕ چهار است، که نشان می‌دهد چرا اندازهٔ عددهای موردنظر یک مرتبه این قدر زیاد می‌شود.

خم‌های پیمانه‌ای $\{X_\circ(N)\}_{N=1,2,\ldots}$ مجموعه‌ای خیلی خاص از خم‌ها هستند که در حوزه‌ای دیگر به‌طور طبیعی بررسی می‌شوند. برای اینکه از اینها در مورد معادله‌هایی به شکل $a+b=c$ استفاده کنیم، خم بیضوی

$$E = y^2 = x(x-a)(x+b)$$

را درنظر بگیرید که در حال حاضر می‌دانیم می‌توانیم آن را با خم $X_\circ(N)$، که در اینجا

$$(N = N_E) \quad \text{تقریباً} \quad \prod_{p|abc} p \quad \text{است،}$$

پارامتری کرد، (در اینجا «تقریباً» یعنی اینکه نسبت دو طرف عددی گویا با صورت و مخرج کوچک است.)

چندین پارامتری‌سازی مانند $\phi : X_\circ(N_E) \to E$ وجود دارد. فرض کنید ϕ_E یکی از آنها باشد که درجه‌اش کمترین مقدار ممکن است. از قضیه‌ای افسانه‌ای از ویل نتیجه می‌شود که همهٔ چنین ϕهایی را می‌توان به شکل ترکیبی از ϕ_E و نگاشت‌هایی دیگر (که خودریختی‌اند) نوشت. بنابراین پیدا کردن ϕ_E، یا دست‌کم یافتن درجه‌اش، اهمیت دارد. معلوم شده است که

$$\deg(\phi_E) = cN_E^{1+o(1)}$$

(منظورمان از «$o(1)$» عددی است که وقتی N به بی‌نهایت میل می‌کند این عدد به صفر میل می‌کند.) با توجه به اینها، معلوم می‌شود که حدس abc با این حدس که

$$\deg(\phi_E) \ll N_E^{2+o(1)}$$

معادل است. نتیجه‌ای از استوارت و یو که در بالا به آن اشاره کردیم این است که، بی‌هیچ شرطی،

$$\deg(\phi_E) \ll \exp\left(N_E^{2/3+o(1)}\right)$$

چشم‌انداز حدس abc

دیدیم که حدس abc با تعمیم‌های چندتا از مهم‌ترین قضیه‌های نظریهٔ اعداد معادل است: قضیهٔ روث، قضیهٔ فالتینگس، قضیهٔ بیکر و قضیهٔ وایلز.[1] به این ترتیب، حل و فصل کردن حدس abc تأثیر چشمگیری در شناخت ما از نظریهٔ اعداد دارد. اثبات یا رد کردن این حدس حیرت‌انگیز خواهد بود. کمترین چیزی که می‌توان انتظار داشت این است که معلوم شود حدس abc تصمیم‌ناپذیر است، و درنتیجه این تعمیم‌ها از این تعداد سؤال مهم در این مبحث!

۱. این مقاله براساس سخنرانی مؤلف اول در یکی از جلسات مشترک انجمن ریاضی امریکا و جامعهٔ ریاضی‌دانان امریکا نوشته شده است. در این لحظه یکی از حضار خاطرنشان کرد که به این ترتیب نظریهٔ اعداددان‌ها چندین نشان فیلدز را برای نتیجه‌ای یکسان کسب کرده‌اند!

ما درکار نوشتن کتابی هستیم که مفصل نشان دهیم حدس abc چطور به همهٔ این مسئله‌ها مربوط است و از این طریق چشم‌انداز چندین موضوع مهم در نظریهٔ اعداد را ترسیم کنیم. در این کتاب طرح اثبات قضیه‌های روث و فالتینگس را می‌آوریم، زیرا، این اثبات‌ها، به شرطی که از راهش وارد شویم، دلالت بر فلسفه‌ای متفاوت (هر چند کم) از حساب دارند، که اول بار وویتا [Vo] مطرح کرده، و ما آن را از منظر نگاشت‌های بِلی بسط خواهیم داد. امیدواریم بتوانیم سبک نگارش این مقاله را درکل این کتاب حفظ کنیم.

مراجع

[Ba] A. BAKER, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, London and New York, 1975.

[Be] G. V. BELYĬ, On the Galois extensions of the maximal cyclotomic field (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **43** (1979), 267-76.

[Bo] E. BOMBIERI, Le grand crible dans la théorie analytique des nombres, *Astérisque* **18** (1987).

[El] N. ELKIES, *ABC* implies Mordell, *Int. Math. Res. Not.* **7** (1991), 99-109; *Duke Math. J.* **64** (1991).

[Fa] G. FALTINGS, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.* **73** (1983), 349-66.

[La] M. LANGEVIN, *Imbrications entre le théoréme de Mason, la descente de Belyĭ et les différentes formes de la conjecture* (*abc*), J. Théor. Nombres Bordeaux, **11** (1999), 91-109.

[Ma] R. C. MASON, *Diophantine Equations over Function Fields,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 96, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[Mo] L. J. MORDELL, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, *proc. Cambridge Philos. Soc.* **21** (1922), 179-92.

[Md] ——, Reminiscences of an octogenarian mathematician, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 952-61.

[Ri] P. RIBENBOIM, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem,* Springer-Verlag, New York and Heidelberg, 1979.

[Ro] K. F. ROTH, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955),1-20.

[Se] J. P. SERRE, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem,* Viewig, Braunschweig, 1990.

[Vo] P. VOJTA, *Diophantine Approximations and Value Distribution Theory,* Lecture Notes in Math., vol. 1239, Springer, New York, 1987.

[Wi] A. WILES, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann. of Math.* **141** (1995),443-551.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

Andrew Granville, Thomas J. Tucker, It's As Easy As abc, Notices of the AMS, November 2002, pp. 1224-1231.

آیا می‌توان از مکعب چهاروجهی ساخت؟

دیمیتری فوکس و سرژ تاباچنیکُف

۱. مسئله سوم هیلبرت

آیا می‌توان مکعبی را با تعدادی متناهی صفحه طوری برید که با کنار هم قرار دادن چندوجهی‌های حاصل، چهاروجهی منتظمی با همان حجم ساخته شود؟

این پرسش با اندکی تغییر یکی از بیست‌وسه مسئله‌ای است که داویت هیلبرت در سخنرانی مشهورش در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در هشتم آگوست سال ۱۹۰۰ در پاریس مطرح کرد؛ این سومین مسئله بود. مسئله‌های هیلبرت تأثیر بسیار شگرفی بر ریاضیات داشته‌اند. بیشتر آنها در قرن بیستم حل شدند و هر کدام تاریخچهٔ ویژهٔ خود را دارد، اما هنوز مسئلهٔ سوم از بسیاری جهات بی‌نظیر است.

نخست اینکه این مسئله پیش از مسئله‌های دیگر هیلبرت حل شد. این مسئله را ماکس دِن، هندسه‌دان بیست‌وسه سالهٔ آلمانی، که در آن زمان دانشجوی هیلبرت بود، حل کرد [1]. مقاله‌اش دو سال بعد از همایش پاریس منتشر شد، اما راه‌حل را شاید حتی پیش از آنکه هیلبرت مسئله را مطرح کند یافته بود.

اثبات دِن (که کمابیش همان است که در ادامه می‌آید) کوتاه و روشن بود و از این‌رو به یکی از موضوعات جالب در سخنرانی‌های عمومی، مقالات و کتاب‌های هندسه بدل شد، اما در میان ریاضی‌دانان فعال تقریباً فراموش شد.

بی‌شک نام دِن از یادها نرفت. او یکی از متخصصان برجسته انگشت‌شمار در زمینهٔ توپولوژی خمینه‌های سه‌بعدی شد و اثرش در سال ۱۹۰۲ فقط یکی از دستاوردهایش بود.

در سال ۱۹۷۶ انجمن ریاضی امریکا مجموعه مقالاتی دوجلدی با عنوان «پیشرفت‌های ریاضی ناشی از مسئله‌های هیلبرت» [2] منتشر کرد. این کتاب شرح بسیار کاملی از سه ربع قرن تاریخچهٔ این مسئله‌ها بود: راه‌حل‌های کامل و ناقص، تعمیم‌ها، مسئله‌های مشابه و غیره. این اثر بررسی تمام و کمال بیست‌ودو تا از بیست‌وسه مسئلهٔ هیلبرت را در بر داشت. فقط مسئلهٔ سوم در آن بررسی نشده بود. نظر گردآورندگان اثر هم که خوب معلوم بود: این مسئله هیچ پیشرفتی در ریاضیات ایجاد نکرده و تأثیری بر ریاضیات نگذاشته بود؛ پس ارزش بررسی نداشت.

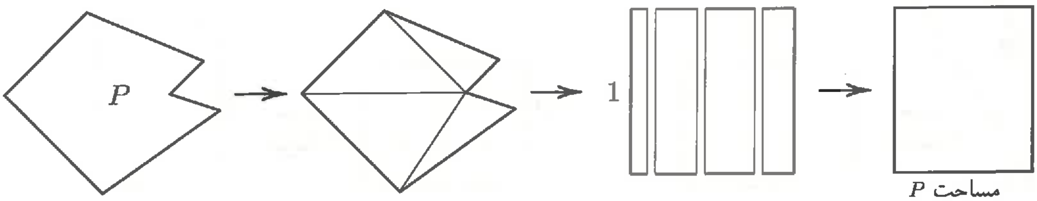
بسیار شگفت‌انگیز است که یکی دو سال طول نکشید که قضیهٔ دِن، نظریهٔ دِن و ناوردایِ دِن به یکی از جذاب‌ترین موضوعات هندسه بدل شد. آنچه که در آن موقع باعث این تحول شد نظریهٔ نوظهور K بود؛ نظریه‌ای هیجان‌انگیز که در قلمرو بینابینی جبر و توپولوژی شکل گرفت. در اینجا دیگر این تحول را دنبال نمی‌کنیم و به جای آن فقط قضیهٔ دِن و اثباتش را می‌آوریم.

۲. در مورد مسئله‌ای مشابه در صفحه، پاسخ مسئله مثبت است

قضیهٔ ۱ (والیس، بویایی، گِروین). فرض کنید P_1 و P_2 دو چندضلعی مسطحِ هم‌مساحت باشند. در این صورت می‌توان P_1 را با خط‌های راست به چند تکه طوری برید که با کنار هم گذاشتنِ این تکه‌ها P_2 به‌دست آید.

اثبات. پیش از همه، معلوم است که کافی است حالتی را درنظر بگیریم که در آن P_2 مستطیلی است که طول یک ضلع آن ۱ و مساحتش P_1 است؛ در اینجا برای سادگی نمادگذاری P_1 را با P نشان می‌دهیم.

بعد، از آنجا که هر ناحیهٔ چندضلعی‌شکل را می‌توان به تعدادی مثلث تقسیم کرد می‌توانیم به جای حالت کلی استدلال را به حالتی خلاصه کنیم که P مثلث باشد (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱ تبدیل کردن حالت چندضلعی دلخواه به حالتی که در آن P مثلث است.

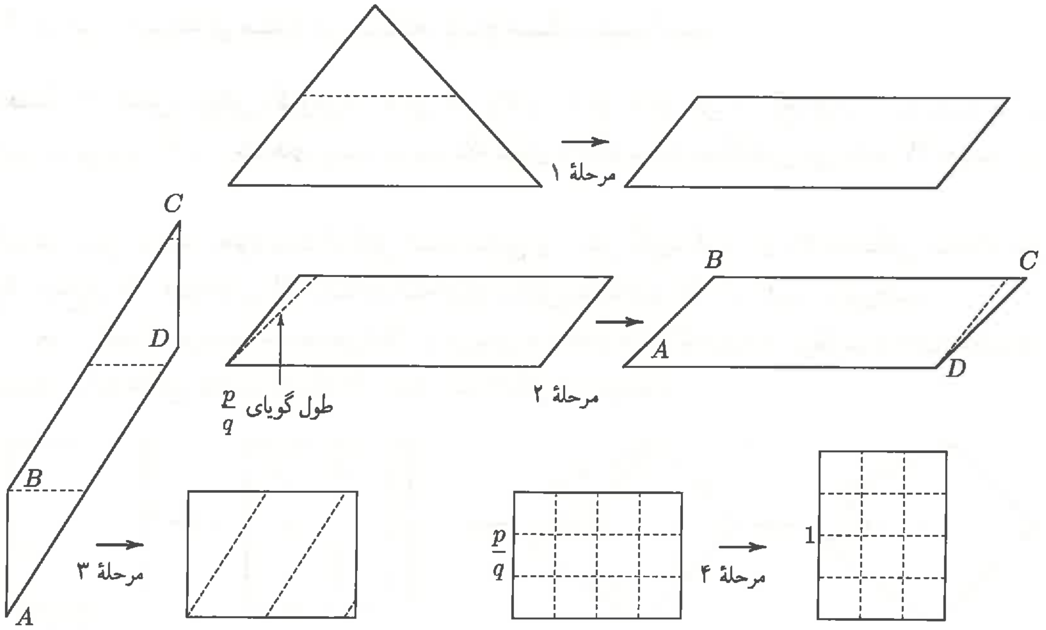
پس از اینها باید مثلثی دلخواه را با بریدن و چسباندن تکه‌های حاصل به مستطیلی تبدیل کنیم که طول یک ضلعش ۱ است. این کار را در چهار مرحله در شکل ۲ انجام داده‌ایم.

ابتدا از مثلثمان یک متوازی‌الاضلاع می‌سازیم (مرحلهٔ ۱). بعد طوری از یک طرفِ این متوازی‌الاضلاع مثلثی کوچک می‌بُریم و آن را به طرف دیگرش می‌چسبانیم که طول یک ضلع متوازی‌الاضلاع عدد گویایی مانند $\frac{p}{q}$ شود (مرحلهٔ ۲). در مرحلهٔ ۳ از این متوازی‌الاضلاع یک مستطیل می‌سازیم (تعداد برش‌های افقی لازم به شکل متوازی‌الاضلاع بستگی دارد). در مرحلهٔ آخر مستطیل حاصل را با $p - ۱$ خط افقی و $q - ۱$ خط عمودی (با این شرط که طول ضلع عمودی مستطیل $\frac{p}{q}$ است) به pq تکهٔ برابر می‌بریم؛ بعد این pq تکه را کنار هم به شکل مستطیلی می‌چینیم که طول ضلع عمودیش ۱ است.

۳. مسئله‌ای در صفحه که شبیه مسئلهٔ سوم هیلبرت نیست اما راه‌حلش شبیه راه‌حل آن است

آیا می‌توان مستطیلی ۲×۱ را به تعدادی متناهی مستطیل کوچک‌تر که ضلع‌هایشان موازی ضلع‌های مستطیل موردنظرند طوری برید که با کنار هم گذاشتن آنها مربعی $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ ساخته شود؟

پاسخ منفی است. اثبات مسئله بیشتر از آنکه هندسی باشد جبری است اما باز هم برخلاف مسئلهٔ هیلبرت کمی زمینه‌سازی هندسی لازم است.

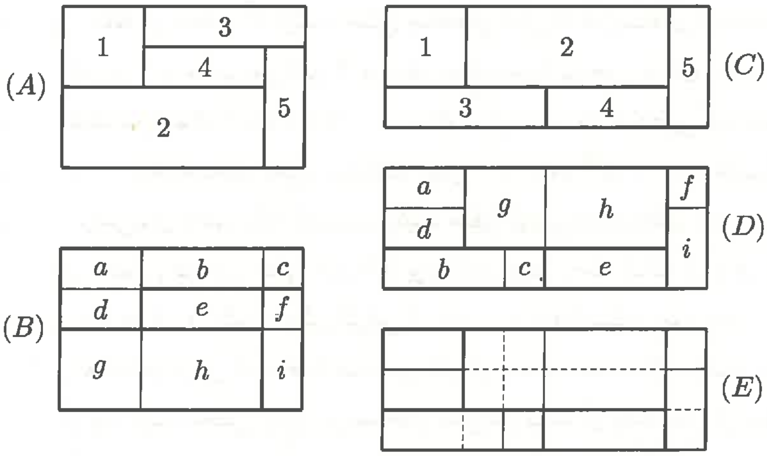


شکل ۲ تبدیل کردن مثلثی دلخواه به مستطیل

۱.۳. زمینه‌سازی هندسی. فرض کنید دو مستطیل داریم که ضلع‌هایشان عمودی و افقی‌اند (در ادامه چنین مستطیل‌هایی را به اختصار مستطیل‌های راست می‌نامیم) و درضمن بتوان آن را به مستطیل‌های راست کوچک‌تر طوری برید که تکه‌های اولی برابر با تکه‌های دومی باشند.

در این صورت گردایه‌ای از N مستطیل راست (باز هم کوچک‌تر) وجود دارد که هر کدام از مستطیل‌های اولیه را می‌توان با دنباله‌ای از $N-1$ حرکت مجاز از آنها به‌دست آورد. حرکتی را مجاز می‌نامیم که در آن دوتا از این مستطیل‌های کوچک را که عرض یا طولشان برابر است برداریم و آنها را به‌طور عمودی یا افقی طوری به هم بچسبانیم که مستطیلی با همان عرض و طول به‌دست آید. بدین ترتیب فرایند چسباندن مستطیل‌ها جایگزین فرایند بریدن مستطیل‌های اولیه می‌شود. چگونگی انجام این کار در شکل ۳ نشان داده شده است.

اکنون فرض کنید دو مستطیل همان‌طور که در مسئله خواسته شده است به تکه‌های برابر بریده شده‌اند (مستطیل‌های (A) و (C) در شکل ۳؛ تکه‌های برابر را با یک شماره نشان داده‌ایم). بعد ضلع‌های تکه‌های مستطیل (A) را تا کل عرض یا طول این مستطیل امتداد می‌دهیم (مستطیل (B) در شکل ۳ را ببینید). درنتیجه بعضی از تکه‌های این تقسیم‌بندی به تکه‌های کوچک‌تر بریده می‌شوند (که اینها را در مستطیل (B) با حروف نشان داده‌ایم: با این حساب تکهٔ ۱ اجتماع تکه‌های a و d و تکهٔ ۲ اجتماع تکه‌های g و h می‌شود و همین‌طور



شکل ۳ ساختن مستطیل با حرکت‌های مجاز

تا آخر). بعد به همین ترتیب تکه‌های دومین مستطیل را تقسیم می‌کنیم (مستطیل (D) در شکل ۳ را ببینید؛ مستطیل ۱ از مستطیل (C) را به تکه‌های برابر با a و d و مستطیل ۲ را به تکه‌های برابر با g و h تقسیم می‌کنیم و همین‌طور تا آخر). به این ترتیب تقسیم‌بندی جدیدی از دومین مستطیل، C، به مستطیل‌های کوچک‌تر به‌دست می‌آید و باز ضلع‌های این تکه‌های کوچک‌تر را تا کل عرض یا طول مستطیل (C) امتداد می‌دهیم (مستطیل E در شکل ۳ را ببینید). این تکه‌های آخری گردایهٔ موردنظرمان را تشکیل می‌دهند. روشن است که می‌توان با استفاده از حرکت‌های مجاز با این تکه‌ها مستطیل (C) را ساخت. با حرکت‌های مجاز بیشتر، از مستطیل‌های کوچک‌مان، اجزای تقسیم‌بندی ظریف‌تری از مستطیل (A) به‌دست می‌آید (یعنی مستطیل‌های a، b، c، ...، i) و با این تکه‌ها می‌توان با حرکت‌های مجاز مستطیل (A) را ساخت. به این ترتیب زمینه‌سازی هندسی به پایان می‌رسد.

۲.۳. اثبات جبری. فرض کنید گردایه‌ای متناهی از مستطیل‌های راست با مساحت کل ۲ داریم. علاوه بر این فرض کنید بتوان از این مستطیل‌ها فقط با استفاده از حرکت‌های مجاز مستطیلی ۲×۱ ساخت. در این صورت نمی‌توان با این مستطیل‌ها، فقط با استفاده از حرکت‌های مجاز، مربعی $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ ساخت.

این همان چیزی است که لازم داریم تا ثابت کنیم پاسخ پرسش این بخش منفی است.

فرض کنید $w_{۱}$، ...، w_N عرض‌های مستطیل‌های گردایه‌مان (N تعداد این مستطیل‌هاست) و $h_{۱}$، ...، h_N طول‌های آنها باشند.

دنبالهٔ

$$۱, \sqrt{۲}, w_{۱}, \ldots, w_N \qquad (۱)$$

را درنظر بگیرید؛ از این دنباله هر جمله را که ترکیب خطی جمله‌های قبلی با ضریب‌های گویاست (ترکیب خطی گویا) حذف می‌کنیم. (بنابراین ۱ را حذف نمی‌کنیم؛ $\sqrt{2}$ را هم حذف نمی‌کنیم چون عددی گنگ است؛ جملهٔ w_1 را وقتی و فقط وقتی حذف می‌کنیم که $w_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$ که در آن r_1 و r_2 عددهایی گویا باشند و همین‌طور تا آخر.) فرض کنید $a_1, \ldots, a_m$ عددهای باقی‌مانده باشند (پس $a_1 = 1$ و $a_2 = \sqrt{2}$). دقت کنید که هرکدام از عددها در دنبالهٔ (۱) را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت ترکیب خطی گویایی از عددهای $a_1, \ldots, a_m$ نوشت.

(این حکم، قضیه‌ای معمولی در جبر خطی است اما برای کامل بودن بحث اثبات آن را در اینجا می‌آوریم. ابتدا توجه کنید که چون $a_1 = 1$، ۱ ترکیب خطی گویایی از $a_1, \ldots, a_m$ است و چون $a_2 = \sqrt{2}$، $\sqrt{2}$ هم همین‌طور است. اکنون به استقرا فرض کنید همهٔ عددهای قبل از w_k در دنبالهٔ (۱) ترکیب خطی گویایی از $a_1, \ldots, a_m$ باشند. اگر w_k ترکیب خطی گویایی از عددهای قبلی‌اش نباشد آن وقت یکی از عددهای a_j است و از این‌رو ترکیب خطی گویایی از $a_1, \ldots, a_m$ است؛ اگر هم که w_k ترکیب خطی گویایی از عددهای قبلی‌اش باشد آن وقت ترکیب خطی گویایی از $a_1, \ldots, a_m$ است، زیرا همهٔ عددهای قبل از آن، این ویژگی را دارند. دست آخر می‌ماند که یکتایی را ثابت کنیم؛ اگر دو ترکیب خطی گویای متمایز از $a_1, \ldots, a_m$ برابر باشند، مثلاً، $\sum_{i=1}^{m} r'_i a_i = \sum_{j=1}^{m} r''_j a_j$، و s بزرگ‌ترین عدد در میان عددهای $1, \ldots, m$ باشد که به‌ازای آن $r'_s \neq r''_s$، آن‌وقت، $a_s = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{r'_i - r''_i}{r''_s - r'_s} a_i$ و درنتیجه a_s ترکیب خطی گویایی از عددهای a_j قبلی است که این با انتخاب $a_1, \ldots, a_m$ تناقض دارد.)

اکنون همین کار را در مورد دنبالهٔ

$$1, \sqrt{2}, h_1, \ldots, h_N \tag{2}$$

انجام می‌دهیم. عددهای $b_1, \ldots, b_n$ را باید طوری انتخاب کنیم که $b_1 = 1$، $b_2 = \sqrt{2}$ و هرکدام از عددهای دنبالهٔ (۲) را بتوان به‌طور یکتا به‌صورت ترکیب خطی گویایی از عددهای $b_1, \ldots, b_n$ نوشت.

مستطیلی دلخواه را درصورتی مجاز می‌نامیم که عرضش ترکیب خطی گویایی از $a_1, \ldots, a_m$ و طولش ترکیب خطی گویایی از $b_1, \ldots, b_n$ باشد. فرض کنید P مستطیلی مجاز به عرض w و طول h باشد و درضمن $w = \sum_{i=1}^{m} r_i a_i$ و $h = \sum_{j=1}^{n} s_j b_j$ که در اینجا r_iها و s_jها عددهایی گویا هستند. برای مستطیل P نماد $\mathrm{Symb}(P)$ را ماتریس $m \times n$، $[S_{ij}]_{m\times n}$ تعریف می‌کنیم که در آن، $S_{ij} = r_i s_j$. در ادامه از نمادگذاری

$$\mathrm{Symb}(P) = \sum_{i,j} r_i s_j a_i \otimes b_j$$

برای این نمادها استفاده می‌کنیم (این فقط نمادگذاری دیگری برای ماتریس بالاست). بنابراین نمادها را به شکل «ترکیب‌های خطی گویای صوریِ» «عبارت‌های» $a_i \otimes b_j$ درنظر می‌گیریم. ترکیب‌های خطی صوری از این دست

را به‌طور بدیهی می‌توان با هم جمع کرد؛ دو ترکیب خطی گویای صوری مانند $\sum_{i,j} t'_{ij} a_i \otimes b_j$ و $\sum_{i,j} t''_{ij} a_i \otimes b_j$ را درصورتی برابر به حساب می‌آوریم که به‌ازای هر i و j، $t'_{ij} = t''_{ij}$.

اکنون فرض کنید P' و P'' دو مستطیل مجاز باشند که طول یا عرض آنها برابر است. در این صورت می‌توانیم این دو مستطیل را با استفاده از یک حرکت مجاز به هم بچسبانیم تا یک مستطیل مانند P به‌دست آید. روشن است که P هم مستطیلی مجاز است و $\mathrm{Symb}(P) = \mathrm{Symb}(P') + \mathrm{Symb}(P'')$. در واقع، اگر عرض‌های P' و P'' به‌ترتیب $w' = \sum_{i=1}^{m} r'_i a_i$ و $w'' = \sum_{i=1}^{m} r''_i a_i$ و طول هر دو آنها $h = \sum_{j=1}^{n} s_j b_j$ باشد، آن‌وقت عرض P برابر با $w' + w'' = \sum_{i=1}^{m} (r'_i + r''_i) a_i$ و ارتفاعش h است و

$$\begin{aligned} \mathrm{Symb}(P) &= \sum_{i,j} (r'_i + r''_i) s_j a_i \otimes b_j \\ &= \sum_{i,j} r'_i s_j a_i \otimes b_j + \sum_{i,j} r''_i s_j a_i \otimes b_j \\ &= \mathrm{Symb}(P') + \mathrm{Symb}(P'') \end{aligned}$$

بنابراین اگر گردایه‌ای از مستطیل‌های مجاز مانند P_1، …، P_N داشته باشیم و بتوانیم از آنها با $N - 1$ حرکت مجاز مستطیلی مانند P بسازیم آن وقت $\mathrm{Symb}(P) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Symb}(P_i)$. اگر بتوانیم به همین ترتیب دو مستطیل متمایز P و P' بسازیم آن وقت $\mathrm{Symb}(P') = \mathrm{Symb}(P)$. اکنون از آنجایی که نماد مستطیلی 2×1، $2(a_1 \otimes b_1)$ و نماد مربعی $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$، $a_2 \otimes b_2$ است، که با هم برابر نیستند، قضیه‌مان ثابت می‌شود.

۴. اثبات قضیهٔ دِن

می‌خواهیم قضیهٔ زیر را اثبات کنیم:

قضیهٔ ۲ . فرض کنید C و T به‌ترتیب مکعب و چهاروجهی منتظمی هم‌حجم باشند و درضمن بتوان هر دو آنها را با صفحه‌ها به یک تعداد تکه برید. (یعنی چهاروجهی را به دو تکه می‌بریم، بعد یکی از دو تکه را به دو تکهٔ دیگر و بعد یکی از این سه تکه را به دو تکه می‌بریم و همین‌طور تا آخر.) در این صورت ممکن نیست که دو گردایهٔ تکه چندوجهی‌های حاصل یکی باشند.

اثبات. فرض کنید l_1، …، l_N طول یال‌های همهٔ چندوجهی‌های حاصل در دو فرایند برش مکعب و چهاروجهی و φ_1، …، φ_N زاویه‌های دووجهی متناظر باشند (فرض می‌کنیم به‌ازای هر i، $0 < \varphi_i < \pi$). دنبالهٔ l_1، …، l_N را درنظر می‌گیریم و از آن هر جمله را که ترکیب خطی گویایی از جمله‌های قبلی است حذف می‌کنیم؛ در این صورت دنباله‌ای مانند a_1، …، a_m به‌دست می‌آوریم که هر کدام از عددهای l_k برابر با ترکیب خطی گویای

یکتایی از عددهای a_i است. بعد همین کار را در مورد دنبالهٔ π، φ_1، ...، φ_N انجام می‌دهیم؛ دنبالهٔ حاصل را با $\pi = \alpha_0$، α_1، ...، α_n نشان می‌دهیم. به این ترتیب هر کدام از عددهای φ_k برابر با ترکیب خطی یکتایی از عددهای α_j است. اکنون چندوجهی‌ای محدب را درصورتی مجاز می‌نامیم که طول هر یالش ترکیب خطی گویایی از α_0، α_1، ...، α_n باشد.

فرض کنید m_1، ...، m_q طول یال‌های چندوجهی محدب مجازی مانند P و ψ_1، ...، ψ_q زاویه‌های دووجهی متناظرش باشند. علاوه بر این فرض کنید $m_k = \sum_{i=1}^{m} r_{ki}a_i$ و $\psi_k = \sum_{j=0}^{n} s_{kj}\alpha_j$. درست همانند نمادی که برای مستطیل‌های مجاز در بخش قبل تعریف کردیم، در اینجا هم برای چندوجهی محدب مجازی مانند P، ناوردای دِن P را این طور تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Dehn}(P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{q} r_{ki}s_{kj}\Big)a_i \otimes \alpha_j$$

تذکر مهم: اینکه مجموع دوم از $j = 1$ تا n محاسبه می‌شود و نه از $j = 0$ تا n اشتباه چاپی نیست؛ در ناوردای دِن جمعوند $s_{k0}\pi$ را نیاورده‌ایم. بنابراین اگر زاویه‌ای به اندازهٔ مضرب گویایی از π تغییر کند آن وقت این تغییر بر ناوردای دِن تأثیری نمی‌گذارد؛ اگر زاویهٔ دووجهی‌ای مضرب گویا از π باشد آن وقت طول یال متناظرش در عبارت ناوردای دِن اصلاً نمی‌آید.

مثال ۱ . ناوردایِ دِن مکعب (یا هر قوطی مستطیلی شکل) صفر است. در واقع اندازهٔ همهٔ زاویه‌ها $\frac{\pi}{2}$ است.

لم ۱ . فرض کنید P چندوجهی محدبی باشد. اگر P را با صفحه‌ای مانند L به دو تکهٔ P' و P'' ببریم آن وقت (به شرطی که P، P' و P'' مُجاز باشند)

$$\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P') + \mathrm{Dehn}\ (P'')$$

اثبات. فرض کنید $S = \{e_1, \ldots, e_q\}$ مجموعهٔ همهٔ یال‌های P، l_k طول یال e_k و ψ_k زاویهٔ دووجهی متناظر باشد. مجموعهٔ S را به چهار زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم: زیرمجموعهٔ S_1 که از همهٔ یال‌هایی تشکیل شده است که هیچ نقطهٔ اشتراکی با L ندارند و در طرف تکهٔ P' قرار دارند؛ S_2 از همهٔ یال‌هایی تشکیل شده است که هیچ نقطهٔ اشتراکی با L ندارند و در طرف تکهٔ P'' قرار دارند؛ S_3 از همهٔ یال‌هایی مانند e_k تشکیل شده است که صفحهٔ L آنها را به دو یال مانند e'_k و e''_k به‌ترتیب از P' و P'' تقسیم می‌کند؛ دست آخر، S_4 از همهٔ یال‌هایی تشکیل شده است که کاملاً در L قرار دارند. به‌ازای هر عضو از S_4 مانند e_k، L زاویهٔ دووجهی ψ_k را به دو بخش مانند ψ'_k و ψ''_k تقسیم می‌کند. اکنون $L \cap P$ را هم درنظر بگیرید. این ناحیه چندضلعی‌ای محدب است؛ هر عضو S_4

مانند e_k یکی از ضلع‌هایش است. فرض کنید $T = \{f_1, \dots, f_p\}$ مجموعهٔ ضلع‌های دیگرش باشد. هر کدام از ضلع‌های f_k هم ضلع P' است و هم ضلع P''. فرض کنید m_k طول f_k باشد و χ'_k و χ''_k زاویه‌های دووجهی متناظر در P' و P'' باشند. روشن است که $\chi'_k + \chi''_k = \pi$.

یال‌های P' اینها هستند:

- اعضای S_1 مانند e_k؛ طول این یال l_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ_k است.
- یال‌هایی مانند e'_k که یک تکه از یال‌های عضو S_3 مانند e_k است. طول این یال l'_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ_k است.
- اعضای S_4 مانند e_k؛ طول این یال l_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ'_k است.
- اعضای T مانند f_k؛ طول این یال m_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش χ'_k است.

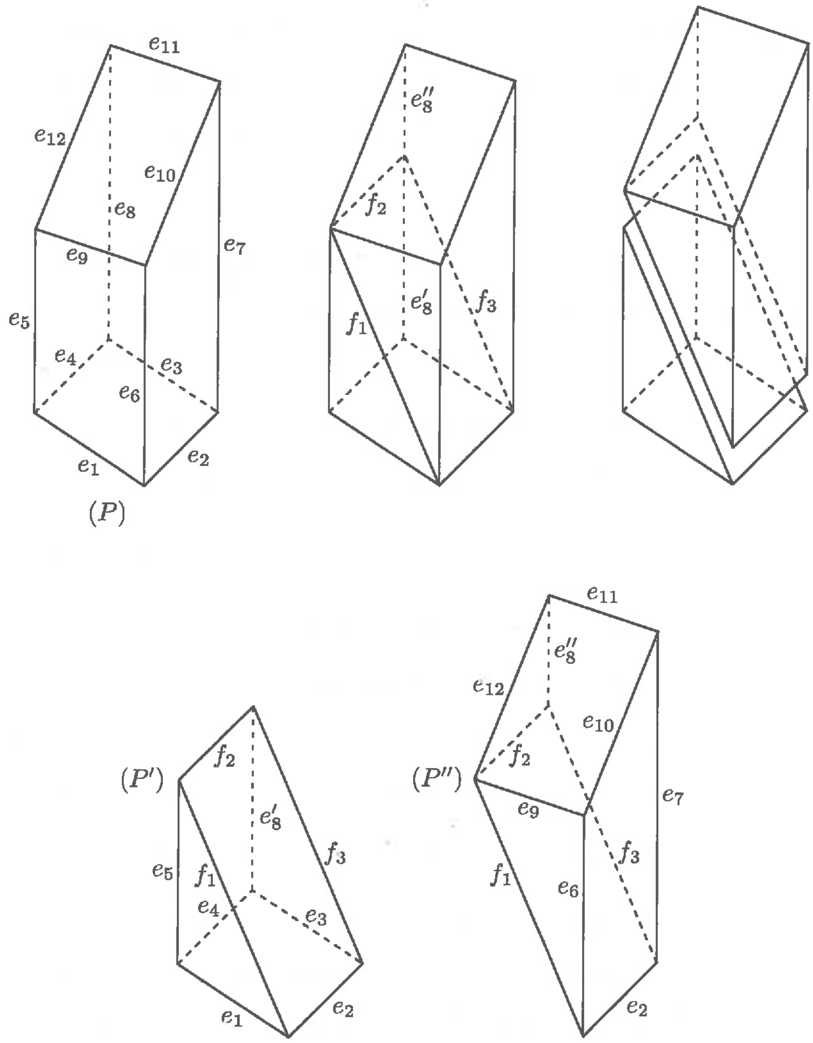
یال‌های P'' هم اینها هستند:

- اعضای S_2 مانند e_k؛ طول این یال l_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ_k است.
- یال‌هایی مانند e''_k که یک تکه از یال‌های عضو S_3 مانند e_k است. طول این یال l''_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ_k است.
- اعضای S_4 مانند e_k؛ طول این یال l_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش ψ''_k است.
- اعضای T مانند f_k؛ طول این یال m_k و زاویهٔ دووجهی متناظرش χ''_k است.

ناوردایِ دِن هر کدام از چندوجهی‌های P'، P'' و P از چهار گروه جمعوند تشکیل شده است؛ در مورد P' و P'' این گروه‌ها متناظر با چهار گروه یال‌های بالا هستند؛ در مورد P این گروه‌ها متناظر با مجموعه‌های S_1، S_2، S_3 و S_4اند. گروه اول جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P')$ همان گروه اول جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P)$ است. گروه اول جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P'')$ همان گروه دوم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P)$ است. مجموع گروه دوم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P')$ و $\mathrm{Dehn}(P'')$ گروه سوم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P)$ است، زیرا $l'_k + l''_k = l_k$. مجموع گروه سوم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P')$ و $\mathrm{Dehn}(P'')$ همان گروه چهارم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P)$ است، زیرا $\psi'_k + \psi''_k = \psi_k$. دست آخر، مجموع گروه چهارم جمعوندها در $\mathrm{Dehn}(P')$ و $\mathrm{Dehn}(P'')$ صفر است، زیرا $\chi'_k + \chi''_k = \pi$. بنابراین همان‌طور که در صورت لم آمده است

$$\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P') + \mathrm{Dehn}(P'')$$

■



شکل ۴ اثبات لم ۲

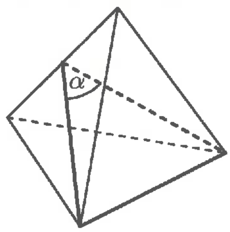
مثالی از اثبات لم ۲ را در شکل ۴ نشان داده‌ایم. چندوجهی P (منشوری چهارضلعی با قاعده‌های غیرموازی که در سمت چپ ردیف اول شکل نشان داده شده است) را با صفحه‌ای به دو چندوجهی بریده‌ایم (چگونگی برش را در ردیف اول و چندوجهی‌های P' و P'' را در ردیف دوم نشان داده‌ایم). یال‌های P، e_1، ...، e_{12}اند؛ $S_1 = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}$، $S_2\{e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$، $S_3 = \{e_8\}$ و $S_4 = \{e_2\}$.

اکنون به اثبات قضیهٔ ۲ باز می‌گردیم. اگر دو چندوجهی را بتوان به یک گردایه از تکه‌های چندوجهی برید، آن‌وقت ناورداهای دِن هر دو آنها برابر با مجموع ناورداهای دِن این تکه‌هاست و بنابراین ناورداهای دِن دو چندوجهی

موردنظر با هم برابرند. اما ناوردای دِن مکعب برابر با صفر است زیرا همهٔ زاویه‌هایش $\frac{\pi}{2}$ است (مثال ۱ را ببینید). ناوردای دِن چهاروجهی منتظم برابر با $6(\ell\otimes\alpha)$ است که در آن ℓ طول یال و α زاویهٔ دووجهی است. اکنون فقط باید بررسی کنیم که α مضرب گویایی از π نیست.

زاویهٔ دووجهیِ چهاروجهی‌ای منتظم بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلثی متساوی‌الساقین است که طول ضلع‌هایش ℓ، $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ است (شکل ۵ را ببینید). بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$\cos\alpha=\frac{\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\ell^2}{2\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$



شکل ۵ زاویهٔ دووجهی چهاروجهی‌ای منتظم

لم ۲ . اگر $\cos\alpha=\frac{1}{3}$، آن وقت $\frac{\alpha}{\pi}$ عددی گنگ است.

اثبات. اگر $\frac{\alpha}{\pi}$ عددی گنگ نباشد آن وقت به‌ازای عددی طبیعی مانند n، $\cos n\alpha=1$. از طرفی بنابر قضیه‌ای در مثلثات،

$$\cos n\alpha=P_n(\cos\alpha)$$

که در آن P_n چندجمله‌ایی از درجهٔ n با ضریب پیشرو (ضریب جملهٔ با بزرگ‌ترین درجه) 2^{n-1} است. این را به استقرا ثابت می‌کنیم؛ به بیان دقیق‌تر ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\cos n\alpha=P_n(\cos\alpha),\quad \sin n\alpha=Q_n(\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$$

که در اینجا، $\deg P_n=n$، $\deg Q_n=n-1$ و ضریب پیشرو هر دو چندجمله‌ای P_n و Q_n برابر با 2^{n-1} است. اگر $n=1$ به‌وضوح حکم درست است: $P_1(t)=t$ و $Q_1(t)=1$. اکنون فرض کنید که حکم به‌ازای

عددی طبیعی مانند n درست باشد؛ در این صورت

$$\begin{aligned}\cos(n+۱)\alpha &= \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha\\ &= P_n(\cos\alpha)\cos\alpha - Q_n(\cos\alpha)\sin^۲\alpha\\ &= P_n(\cos\alpha)\cos\alpha + Q_n(\cos\alpha)(\cos^۲\alpha - ۱)\\ \sin(n+۱)\alpha &= \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha\\ &= Q_n(\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\\ &= (Q_n(\cos\alpha)\cos\alpha + P_n(\cos\alpha))\sin\alpha\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}P_{n+۱}(t) &= P_n(t)t + Q_n(t)(t^۲ - ۱)\\ Q_{n+۱}(t) &= Q_n(t)t + P_n(t)\end{aligned}$$

پس حکم استقرا درمورد درجه‌ها و ضریب‌های پیشرو چندجمله‌ای‌های $P_{n+۱}$ و $Q_{n+۱}$ ثابت می‌شود.

دست آخر، بنابر حکمی که ثابت کردیم،

$$\cos n\alpha = P_n\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲^{n-۱}}{۳^n} + \frac{\text{عددی صحیح}}{۳^{n-۱}}$$

پس ممکن نیست $\cos n\alpha$ عددی صحیح و به‌ویژه ۱ باشد.

بنابراین لم ۳ ثابت و اثبات قضیهٔ دِن کامل می‌شود. ■

۵. نتیجه‌های دیگر

با نمادگذاری جبری (که ممکن است خواننده با آن آشنا نباشد، اما به‌نظرمان رابطه‌های زیر برای خوانندهٔ این مقاله مفهوم و روشن است) بنابر ساختاری که در بخش قبلی بیان شد به هر چندوجهی محدب مانند P (در واقع لازم نیست چندوجهی محدب باشد) ناوردای معینی، $\mathrm{Dehn}(P)$، که

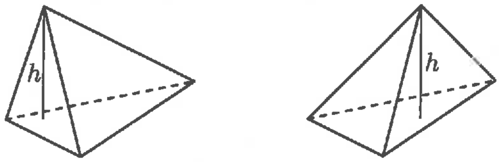
$$\mathrm{Dehn}(P) \in \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Q})$$

نسبت می‌دهیم؛ بنابر قضیهٔ دِن اگر دو چندوجهی مانند $P_۱$ و $P_۲$ هم‌تکه باشند (یعنی آنها را بتوان با تعدادی صفحه به گردایهٔ یکسانی از تکه‌ها برید) آن وقت

$$\mathrm{Dehn}(P_۱) = \mathrm{Dehn}(P_۲)$$

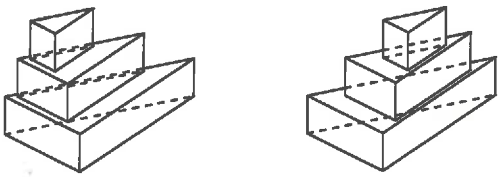
این درست نتیجهٔ بخش قبلی است.

بدون تردید این حکم را می‌توان درمورد چندوجهی‌های دیگری غیر از مکعب‌ها و چهاروجهی‌ها هم به‌کار برد. در واقع مسئلهٔ اولیهٔ هیلبرت درمورد مثالی دیگر بود؛ هیلبرت حدس زد که دو چهاروجهی با قاعدهٔ برابر و ارتفاع برابر (مانند آنهایی که در شکل ۶ نشان داده شده‌اند) ممکن است هم‌تکه نباشند.



شکل ۶ این چهاروجهی‌ها ممکن است هم‌تکه نباشند.

خاستگاه این مسئله مبانی هندسه است. کل نظریهٔ حجم اجسام براساس لمی است که طبق آن حجم چهاروجهی‌های شکل ۶ برابر است. لم مشابهی در صفحه (شامل مساحت مثلث‌ها) اثبات سرراستی براساس بریدن و چسباندن تکه‌های مثلث‌ها دارد. اما برای اثبات لم در حالت سه‌بعدی «ساختار پله‌ای» حدی شامل شکل‌هایی مانند شکل ۷ لازم است (می‌توانید شکلی شبیه این را درکتاب‌های درسی هندسهٔ فضایی بیابید). اکنون پرسش این است که آیا این شرط در واقع شرطی لازم است؟ پاسخ «مثبت» است: از قضیهٔ دِن به‌آسانی نتیجه می‌شود که چهاروجهی‌هایی مانند آنهایی که در شکل ۶ نشان داده شده‌اند در حالت کلی هم‌تکه نیستند.



شکل ۷ محاسبهٔ حجم چهاروجهی با روش حدی

بیش از شصت سال بعد از اثر دِن، سیدلِر ثابت کرد که دو چندوجهی با حجم برابر و ناوردای دن برابر هم‌تکه‌اند [3]. نتیجه‌های مشابهی از این دست در هندسه‌های کروی و هذلولولی وجود دارد.

ناوردای دِن را می‌توان به چندوجهی‌های با بُعد دلخواه هم تعمیم داد: به‌ازای هر چندوجهی nبعدی مانند P،

$$\mathrm{Dehn}(P) = \sum_{\substack{\text{وجه‌های } n-2 \text{ بُعدیِ} \\ P \text{ مانند } s}} \text{حجم } s \otimes \left[\begin{array}{c} \text{زاویهٔ دووجهی} \\ \text{در } s \end{array} \right] \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{R}/\pi\mathbf{Q})$$

(دو وجه $n-1$ بعدی P که با s مجاورند زاویهٔ دووجهی تشکیل می‌دهند). در بُعد ۴ مانند بُعد ۳ دو چندوجهی وقتی و فقط وقتی هم‌تکه‌اند که حجم‌هایشان برابر و ناورداهای دِن آنها هم یکی باشد. اما در بُعد ۵ این حکم دیگر درست نیست: در این فضا ناوردای جدیدی به نام «دومین ناوردای دِن» درنظر گرفته می‌شود که شامل مجموعی روی یال‌های P است (درمورد چندوجهی n بعدی روی وجه‌های $n-4$ بعدی). حدس زده شده است که «نوع هم‌تکه»ای از چندوجهی‌ای n بعدی با دنباله‌ای از $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ناوردا مشخص می‌شود: حجم، ناوردای دِن، دومین ناوردای دِن و همین‌طور تا آخر، که مقدارهای آنها برحسب حاصل‌ضرب‌های تانسوری بیش از پیش پیچیده بیان می‌شوند (kاُمین ناوردای دِن شامل مجموعی روی وجه‌های $n-2k$ بُعدی است؛ به‌ویژه درمورد چندوجهی‌های یک‌بُعدی و دوبُعدی (پاره‌خط‌ها و چندضلعی‌ها) فقط «حجم» (طول و مساحت) به حساب می‌آید؛ در بُعدهای ۳ و ۴ هم ناوردای دِن داریم و همین‌طور تا آخر).

برای آشنایی بیشتر با این موضوع کتاب سادهٔ بولتیانسکی [4]، سخنرانی کارتیه در سمینار بورباکی [5] و کتاب‌های [6، 7، 8] را توصیه می‌کنیم.

تمرین

۱. ثابت کنید ناوردای دِن هر منشور قائم با قاعدهٔ چندضلعی صفر است.

تمرین‌های ۲ تا ۴ حالت‌های ویژهٔ قضیهٔ سیدلرند (بخش ۵ را ببینید). از آنجایی که این قضیه را اینجا ثابت نکردیم توصیه می‌کنیم برای حل کردن این تمرین‌ها مستقیماً ساختارهای لازم را بسازید.

۲. ثابت کنید دو گردایه از متوازی‌السطوح‌ها که حجم کل آنها برابر است هم‌تکه‌اند.

۳. هشت‌وجهی منتظمی مانند O به‌طول یال ۱ را می‌توان از چهاروجهی منتظمی مانند $\tilde{T}$ به‌طول یال ۲ این طور به‌دست آورد که آن را به چهار تا چهاروجهی منتظم مانند T به‌طول یال ۱ که شامل چهار رأس $\tilde{T}$اند ببریم؛ در این صورت روشن است که $\mathrm{Dehn}(\tilde{T}) = ۲\mathrm{Dehn}(T)$ و بنابراین

$$\mathrm{Dehn}(O) = \mathrm{Dehn}(\tilde{T}) - ۴\mathrm{Dehn}(T) = -۲\mathrm{Dehn}(T)$$

ثابت کنید گردایهٔ هشت‌وجهی O و دوتا از این چهاروجهی‌های T با مکعبی با حجم مناسب (شش برابر حجم T) هم‌تکه‌اند.

۴. الف) فرض کنید $\tilde{T}$ و T همان چهاروجهی‌های تمرین ۳ باشند. ثابت کنید $\tilde{T}$ با گردایه‌ای از دوتا T و یک مکعب هم‌تکه است.

ب) تعمیم. فرض کنید P چندوجهی‌ای دلخواه و $\tilde{P}$ دو برابر شدهٔ P باشد (بنابراین حجمش هشت برابر حجم P است). ثابت کنید $\tilde{P}$ با گردایه‌ای از دوتا P و مکعبی به حجم شش برابر حجم P هم‌تکه است.

راهنمایی. حکم قسمت (الف) به‌آسانی از تمرین ۳ نتیجه می‌شود؛ برای اثبات قسمت (ب) ابتدا توجه کنید که حکم قسمت (الف) درمورد هر چهاروجهی (که لازم نیست منتظم هم باشد) برقرار است و بعد P را به اجتماع چهاروجهی‌ها ببرید.

۵. چندوجهی‌ای مانند P را درصورتی بلور می‌نامند که بتوان کل فضا را با چندوجهی‌های برابر با P آجر فرش کرد. ثابت کنید ناوردای دِن بلور ۰ است.

مراجع

[1] M. Dehn. *Über raumgleiche Polyeder*, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math-phys. k1. (1900). pp. 345-354.

[2] *Mathematical developments arising from Hilbert's problems*, F. Browder, ed., Proc. Symp. Pure Math., **XXVIII** (1976).

[3] J. -P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimension*, Comment. Math. Helv. **40** (1965), pp. 43-80.

[4] V. Boltianskii. *Hilbert's third problem*, John Wiley & Sons, Wash., New York, 1978.

[5] P. Cartier. *Decomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert*, Astèrisque **133 – 134** (1986), pp.261-288.

[6] J. Dupont. *Scissors congruences, group homology and characteristic classes*, World Scientific, River Edge, NJ, 2001.

[7] C. Sah. *Hilbert's third Problem: Scissors congruence*, Research Notes in Mathematics, 33. Pitman, Boston-London, 1979

[8] B. Yandell. *The honors class: Hilbert's problems and their solvers*, A. K. Peters, 2001.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Dmitry Fuchs, Serge Tabachnikov, *Mathematical Omnibus*, AMS, 2007, pp.307-317.

کاشی‌کاری مستطیل‌ها

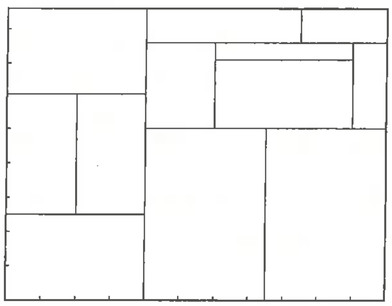
مارتین آیگنر، گونتر تسیگلر

بعضی از قضیه‌های ریاضی از جنبهٔ خاصی قابل توجه‌اند: صورت قضیه ابتدایی و ساده است، اما اثبات آن غیرممکن به‌نظر می‌رسد ــ مگر اینکه دری جادویی باز شود و همه چیز واضح و ساده شود.

مثالی از این دست، حکم زیر است که متعلق به نیکلاس دوبروین است:

قضیهٔ ۱. اگر بتوان مستطیلی را با مستطیل‌هایی که هر کدامشان دست‌کم یک ضلع به‌طول صحیح دارند کاشی‌کاری کرد، طول دست‌کم یکی از ضلع‌های مستطیل کاشی‌کاری شده هم صحیح است.

منظورمان از کاشی‌کاری مستطیل بزرگ R، چیزی مانند شکل ۱ است که در آن، مستطیل‌های $T_1, \ldots, T_m$ که درونشان دوبه‌دو مجزا است R را پوشانده‌اند.



شکل ۱ طول ضلع‌های مستطیل بزرگ، ۱۱ و ۸٫۵ است.

در واقع، دوبروین این حکم را ثابت کرده است که اگر بتوان مستطیلی $c \times d$ را با نسخه‌هایی از مستطیل‌های $a \times b$ کاشی‌کاری کرد و a و b و c و d عددهایی صحیح باشند، هرکدام از a و b باید یکی از c یا d را بشمارند. این حکم با دو بار استفاده از قضیه‌ای که مطرح کردیم به‌دست می‌آید: کل شکل را به مقیاس $\frac{1}{a}$ کوچک می‌کنیم؛ در این صورت مستطیل با مستطیل‌هایی کاشی‌کاری شده که هرکدامشان دست‌کم یک ضلع به‌طول ۱ دارند و درنتیجه، دست‌کم یکی از $\frac{c}{a}$ یا $\frac{d}{a}$ باید صحیح باشد. به همین ترتیب، با تغییر مقیاسی با ضریب $\frac{1}{b}$ نتیجه می‌شود که دست‌کم یکی از $\frac{c}{b}$ یا $\frac{d}{b}$ هم صحیح است.

تقریباً همه اول سعی می‌کنند که حکم را به استقرا روی تعداد مستطیل‌های کوچک ثابت کنند. البته استقرا هم به‌کار می‌آید؛ اما باید آن را با دقت فراوان به‌کار گرفت، و اصلاً زیباترین انتخاب ممکن نیست. در واقع، استن واگن در مقاله‌ای جانانه ناکمتر از چهارده اثبات را آورده که ما سه‌تا از آنها را انتخاب کرده‌ایم و در هیچ کدام از این راه‌ها از استقرا استفاده نشده است. اولین اثبات اساساً متعلق به خود دوبروین است و در آن از حقهٔ حسابانیِ بسیار هوشمندانه‌ای استفاده شده است. دومین اثبات، از ریچارد راشبرگ و شرمن استاین نسخه‌ای گسسته از اولین اثبات است که کمی هم ساده‌تر است. اما برندهٔ مسابقه اثبات سوم از مایک پَترسن است که چیزی نیست جز شمردن از دو طریق، و تقریباً یک‌خطی است.

از این به بعد، فرض می‌کنیم که ضلع‌های مستطیل بزرگ (یعنی R) موازی محورهای مختصات هستند و رأس چپ-پایین آن روی $(۰,۰)$ است. به این ترتیب، ضلع‌های T_iها هم موازی محورها هستند.

اثبات اول. فرض کنید T مستطیلی دلخواه در صفحه باشد که ضلع‌هایش موازی محورهای مختصات هستند و تصویرش روی محور xها از a تا b است و تصویرش روی محور yها از c تا d است. حقهٔ دوبروین این است. روی T، انتگرال دوگانهٔ

$$\int_c^d \int_a^b e^{۲\pi i(x+y)} dx dy \qquad (۱)$$

را درنظر بگیرید. چون

$$\int_c^d \int_c^b e^{۲\pi i(x+y)} dx dy = \int_a^b e^{۲\pi i x} dx \cdot \int_c^d e^{۲\pi i y} dy,$$

انتگرال (۱) صفر است اگر و فقط اگر دست‌کم یکی از $\int_a^b e^{۲\pi i x} dx$ یا $\int_c^d e^{۲\pi i y} dy$ صفر باشد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\int_a^b e^{۲\pi i x} dx = ۰ \text{ اگر و فقط اگر } \quad b-a \text{ صحیح است} \qquad (۲)$$

اما در این صورت کار تمام است: بنابر فرض، مقدار هر $\iint_{T_i}$ صفر است؛ پس چون

$$\iint_R f(x,y) = \sum_i \iint_{T_i} f(x,y),$$

باید $\iint_R$ هم صفر باشد و درنتیجه، طول دست‌کم یکی از ضلع‌های R صحیح است.

مانده بررسی درستی (۲). از اینکه

$$\int_a^b e^{2\pi ix}dx = \frac{1}{2\pi i}e^{2\pi ix}|_a^b = \frac{1}{2\pi i}\left(e^{2\pi ib} - e^{2\pi ia}\right)$$
$$= \frac{e^{2\pi ia}}{2\pi i}\left(2^{2\pi i(b-a)} - 1\right)$$

نتیجه می‌شود

$$\int_a^b e^{2\pi ix}dx = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad e^{2\pi i(b-a)} = 1$$

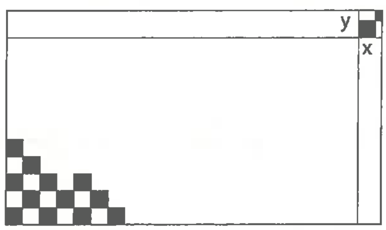
از اینکه $e^{2\pi ix} = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x$ هم نتیجه می‌شود که معادلهٔ آخری به نوبهٔ خود معادل است با

$$\cos 2\pi(b-a) = 1, \qquad \sin 2\pi(b-a) = 0.$$

چون $\cos x = 1$ اگر و تنها اگر x مضرب صحیحی از 2π باشد، باید $b - a \in \mathbb{Z}$، که ایجاب می‌کند $\sin 2\pi(b-a) = 0$. ∎

اثبات دوم. صفحه را با مربع‌های سیاه و سفید $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ شطرنجی کنید، طوری که (مثل شکل ۲) مربع سیاه در کنج مربع اول باشد. بنا به فرض، در هر کدام از T_iها، تعداد مستطیل‌های سیاه با تعداد مستطیل‌های سفید برابر است؛ پس در R هم همین‌طور است.

اما به این ترتیب طول دست‌کم یکی از ضلع‌های R باید صحیح باشد. چون در غیر این صورت می‌توان R را به چهار قسمت تقسیم کرد که تعداد مستطیل‌های سیاه و مستطیل‌های سفید در سه‌تا از آنها برابر است، اما در چهارمی این طور نیست. در واقع، اگر $x = a - \lfloor a \rfloor$ و $y = b - \lfloor b \rfloor$ و $0 < x, y < 1$، تعداد سیاه‌ها بیشتر از تعداد سفیدها خواهد بود (شکل ۲ را ببینید).



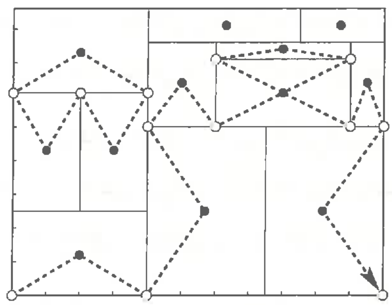
شکل ۲ تعداد سیاه‌ها در مستطیل گوشهٔ راست‌ـ بالا برابر است با

$$\min\left\{x, \tfrac{1}{2}\right\} \times \min\left\{y, \tfrac{1}{2}\right\} + \max\left\{x - \tfrac{1}{2}, 0\right\} \times \max\left\{y - \tfrac{1}{2}, 0\right\}$$

که همیشه از $\frac{1}{2}xy$ بزرگ‌تر است.

∎

اثبات سوم. فرض کنید C مجموعهٔ همهٔ رأس‌هایی از T_iها باشد که هر دو مؤلفه‌شان صحیح‌اند (پس مثلاً $C \ni (0,0)$) و فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ کاشی‌ها باشد. گراف دوبخشی G را با مجموعهٔ رأس‌های $C \cup T$ این طور بسازید که هر عضو از C مانند c را به همهٔ کاشی‌هایی که c رأسی از آنها است وصل کنید. از فرض کاشی‌کاری نتیجه می‌شود که هر کاشی به ۰، ۲ یا ۴ رأس در C وصل است، چون اگر رأسی در C باشد، سر دیگر ضلع به‌طول صحیح که از آن رأس شروع می‌شود هم در C است و بنابراین، تعداد یال‌های G زوج است. حالا C را درنظر بگیرید. هر رأس در داخل R یا روی یکی از ضلع‌های آن به تعداد زوجی از کاشی‌ها متصل است، اما رأس $(0,0)$ فقط به یک کاشی متصل است. به این ترتیب، عضوی دیگر از C مانند c هم هست که درجه‌اش فرد است، و این c فقط می‌تواند رأس دیگری از R باشد (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳ گراف دوبخشی G. رأس‌هایی را که در C هستند سفید کرده‌ایم و رأس‌های T را سیاه.

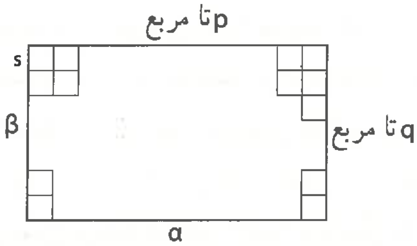
■

هر سه اثبات را به‌سادگی می‌توان طوری تغییر داد که صورت nبُعدی حکم دو بروین به‌دست بیاید؛ اگر جعبهٔ nبعدی R با جعبه‌هایی کاشی‌کاری شود که هر کدامشان دست‌کم یک ضلع به‌طول صحیح دارند، طول دست‌کم یک ضلع R صحیح است.

با این حال، بحث را در صفحه نگه می‌داریم و نگاهی به «قُل» حکم دوبروین می‌اندازیم که ماکس دِن چندین سال پیش از دوبروین آن را ثابت کرده است. این حکم به‌نظر کاملاً شبیه حکم دوبروین است؛ اما برای اثبات آن باید از ایده‌های دیگری استفاده کرد.

قضیهٔ ۲ . مستطیلی دلخواه را می‌توان با مربع‌ها کاشی‌کاری کرد اگر و فقط اگر نسبت طول ضلع‌هایش عددی گویا باشد.

یک طرف قضیه واضح است. اگر طول ضلع‌های R، α و β باشد و $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$، عددهایی طبیعی مانند p و q

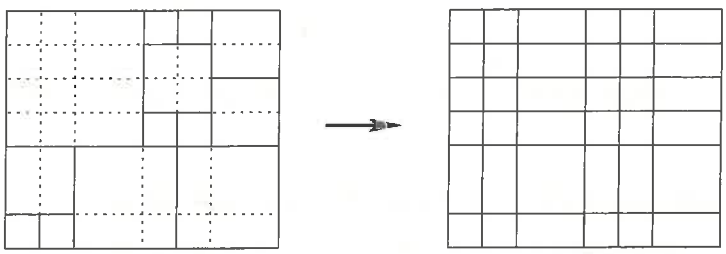


شکل ۴

هستند که $\frac{p}{q} = \frac{\alpha}{\beta}$. اگر قرار بدهیم $s := \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$، می‌توانیم R را با مربع‌های $s \times s$ مانند شکل ۴ کاشی‌کاری کنیم.

ماکس دِن برای اثبات طرف دیگر قضیه از استدلال زیبایی استفاده کرد که پیش‌تر در حل مسئلهٔ سوم هیلبرت به‌کار گرفته بود. در واقع، دو مقالهٔ او در دو سال متوالی در ماتماتیشه آنالن چاپ شدند.

اثبات. فرض کنید R با مربع‌هایی با اندازه‌های احتمالاً مختلف کاشی‌کاری شده است. با تغییر مقیاس، می‌توانیم فرض کنیم که R مستطیلی $۱ \times a$ است. فرض می‌کنیم $a \notin \mathbb{Q}$ و به تناقض می‌رسیم. اولین گام این است که ضلع‌های مربع‌ها را امتداد بدهیم تا به ضلع‌های مستطیل برسند (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵

حالا R به چند مستطیل کوچک تجزیه شده است. فرض کنید طول ضلع‌های این مستطیل‌ها $a_۱$، ...، a_M (به هر ترتیبی) باشند، و مجموعهٔ

$$A = \{۱, a, a_۱, \dots, a_M\} \subseteq \mathbb{R}$$

را درنظر بگیرید.

گام بعدی، با جبر خطی سروکار دارد. $V(A)$ را فضای برداری همهٔ ترکیب‌های خطی اعضای A با ضرایب گویا تعریف می‌کنیم. توجه کنید که طول همهٔ ضلع‌های مربع‌های کاشی‌کاری اولیه در $V(A)$ است، چون هر کدام

از آن طول‌ها حاصل‌جمع بعضی از a_iها است. چون a گویا نیست، می‌توانیم $\{۱, a\}$ را به پایه‌ای مانند B برای $V(A)$ گسترش بدهیم؛ فرض کنید

$$B = \{b_۱ = ۱, b_۲ = a, b_۳, \dots, b_m\}$$

تابع $f : B \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$f(۱) = ۱, \quad f(a) = -۱, \quad f(b_i) = ۰ \quad (i \geqslant ۳)$$

تعریف کنید و آن را به‌طور خطی روی $V(A)$ گسترش بدهید (یعنی اگر $q_۱$، ...، q_m عضوهایی از $\mathbb{Q}$ باشند، مقدار $f(q_۱ b_۱ + \cdots + q_m b_m)$ را برابر $q_۱ f(b_۱) + \cdots + q_m f(b_m)$ تعریف کنید).

حالا، این تعریف «مساحت» مستطیل‌ها، اثبات را در سه گام کوتاه کامل می‌کند: به‌ازای عضوهایی از $V(A)$ مانند c و d، مساحت مستطیل $c \times d$ را با

$$S\Big(\underset{c}{\boxed{}}\; d\Big) = f(c)f(d)$$

تعریف می‌کنیم.

۱) $$S\Big(\underset{c_۱}{\boxed{}}\underset{c_۲}{\boxed{}}\; d\Big) = S\Big(\underset{c_۱}{\boxed{}}\; d\Big) + S\Big(\underset{c_۲}{\boxed{}}\; d\Big)$$

این از خطی بودن f نتیجه می‌شود. بالطبع، حکم مشابه برای نوارهایی که به‌طور عمودی قرار گرفته‌اند هم برقرار است.

۲) $S(R) = \sum_{\square} S(\square)$، که جمع روی همهٔ مربع‌های کاشی‌کاری انجام می‌شود.

توجه کنید که طبق (۱)، $S(R)$ برابر است با حاصل‌جمع مقدارهای S روی همهٔ مستطیل‌های کوچک که پس از امتداد دادن ضلع‌های مربع‌های کاشی‌کاری به‌دست می‌آمدند. چون هرکدام از مربع‌های کاشی‌کاری به چندتا از این مستطیل‌ها تقسیم شده و هر مستطیل کوچک هم فقط در یکی از مربع‌های اولیه است، باز هم بنابر (۱) این حاصل‌جمع با طرف راست (۲) برابر است.

۳) می‌دانیم که

$$S(R) = f(a)f(۱) = -۱$$

در حالی که اگر طول ضلع مربعی t باشد، $S\Big(\underset{t}{\square}\Big) = f(t)^۲ \geqslant ۰$ و درنتیجه

$$\sum_{\square} S(\square) \geqslant ۰$$

و این همان تناقض موردنظر ماست.

به خوانندگانی که مایل‌اند در دنیای کاشی‌کاری‌ها گشت‌وگذار بیشتری کنند، مقالهٔ مروری زیبای [1] را که کار فدریکو آردیلا و ریچارد استنلی است اکیداً توصیه می‌کنیم.

مراجع

[1] F. ARDILA AND R. P. STANLEY: *Tilings*, Preprint, January 2005, 21 Pages, http:// arxiv. org/abs/math/0501170; German translation: "Pflasterungen", Math. Semesterberichte **53** (2006), 17-43.

[2] N. G. DE BRUIJN: *Filling boxes with bricks*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 37-40.

[3] M. DEHN: *Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*, Mathematische Annalen **57** (1903), 314-332.

[4] S. WAGON: *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, Amer. Math. Monthly **94** (1987). 601-617.

• ترجمهٔ بردیا حسام

Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Fourth Edition, Springer, 2010, pp. 173-177.

مینیاتور ۱: عددهای فیبوناچی، محاسبهٔ سریع

پیرژی ماتوئوشِک

عددهای فیبوناچی، که در اینجا آنها را با $F_۰$، $F_۱$، $F_۲$، ... نشان می‌دهیم، با رابطه‌های $F_۰ = ۰$، $F_۱ = ۱$ و $F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n$ (به‌ازای n مساوی ۰، ۱، ۲، ...) تعریف می‌شوند. واضح است که F_n را با تقریباً n عمل حسابی می‌توان حساب کرد.

با این حقه، می‌توان F_n را سریع‌تر با تقریباً $\log n$ عمل حسابی حساب کرد. ماتریس ۲ × ۲ی M را با

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

تعریف می‌کنیم؛ در این صورت

$$\begin{pmatrix} F_{n+۲} \\ F_{n+۱} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_{n+۱} \\ F_n \end{pmatrix}$$

و درنتیجه، با استفاده از شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{pmatrix} F_{n+۱} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

به‌ازای $n = ۲^k$، می‌توانیم M^n را با مربع کردن متوالی، با k بار ضرب ماتریس‌های ۲ × ۲ حساب کنیم. به‌ازای n دلخواه، n را دودویی به‌صورت $n = ۲^{k_۱} + ۲^{k_۲} + \cdots + ۲^{k_t}$ (که $k_۱ < k_۲ < \cdots < k_t$) می‌نویسیم و M^n را به‌صورت حاصل‌ضرب $M^{۲^{k_۱}} M^{۲^{k_۲}} \cdots M^{۲^{k_t}}$ حساب می‌کنیم. برای این کار، حداکثر به $۲k_t \leqslant ۲\log_۲ n$ ضرب ماتریس‌های ۲ × ۲ نیاز داریم.

توجه کنید که می‌توانیم از همین حقه درمورد هر دنباله مانند $y_۰$، $y_۱$، $y_۲$، ... که در رابطهٔ بازگشتی $y_{n+k} = a_{k-۱}y_{n+k-۱} + \cdots + a_۰ y_n$ (به‌ازای k و $a_۰$، ...، $a_{k-۱}$ ثابت) صدق می‌کند استفاده کنیم.

اگر بخواهیم عددهای فیبوناچی را به این روش حساب کنیم، باید دقت کنیم، چون F_n خیلی سریع رشد می‌کند. از فرمولی در مینیاتور ۲، معلوم می‌شود که تعداد رقم‌های F_n در مبنای ۱۰ از مرتبهٔ n است؛ پس باید از

محاسبات دقت مضاعف استفاده کنیم و درنتیجه، عمل‌های حسابی نسبتاً کند خواهند بود.

منبع. این حقه معروف است؛ اما تا حالا نتوانسته‌ام مرجعی برای آن پیدا کنم.

• ترجمهٔ بردیا حسام

Jiří Matoušek, *Thirty-three Miniatures*, AMS, 2010, pp. 1-2.

مینیاتور ۲: عددهای فیبوناچی، فرمول

ییرژی ماتوئوشِک

می‌خواهیم فرمولی برای nامین عدد فیبوناچی (که آن را با F_n نشان می‌دهیم) به‌دست بیاوریم. می‌دانیم که $F_0 = 0$، $F_1 = 1$ و به‌ازای $n = 0, 1, \ldots$، $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. فضای برداری همهٔ دنباله‌هایی مانند $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ از عددهای حقیقی را با جمع مؤلفه به مؤلفه و ضرب در عددهای حقیقی درنظر می‌گیریم. در این فضا، زیرفضای W را مجموعهٔ همهٔ دنباله‌هایی تعریف می‌کنیم که جمله‌هایشان به‌ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$، در $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ صدق می‌کنند. هر انتخاب دلخواه x_0 و x_1، عضوی یکتا از W به‌دست می‌دهد؛ پس $\dim(W) = 2$ (در واقع، دنباله‌هایی که با $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ و $(1, 0, 1, 1, 2, \ldots)$ شروع می‌شوند، پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند).

حالا می‌خواهیم پایهٔ دیگری برای W پیدا کنیم: دو دنباله که جمله‌هایشان با فرمول ساده‌تری تعریف شده‌اند. باید کمی «خلاقیت» به خرج بدهیم: دنبال عضوهایی از W مانند $\mathbf{x}$ می‌گردیم که به‌ازای مقدار حقیقی مناسبی برای τ، $x_n = \tau^n$.

برای پیدا کردن مقدار τ باید معادلهٔ درجه دوم $\tau^2 = \tau + 1$ را حل کنیم. این معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد که عبارت‌اند از

$$\tau_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

دنباله‌های $\mathbf{u} = (\tau_1^0, \tau_1^1, \tau_1^2, \ldots)$ و $\mathbf{v} = (\tau_2^0, \tau_2^1, \tau_2^2, \ldots)$ هر دو عضو W هستند و به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که مستقل خطی هم هستند (کافی است دو مؤلفهٔ اول آنها را درنظر بگیرید)؛ پس پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

دنبالهٔ $\mathbf{F} = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$ را در این پایه نمایش می‌دهیم؛ پس می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{F} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. ضریب‌های α و β را می‌توان با درنظرگرفتن دو جملهٔ اول دنباله‌ها حساب کرد؛ در واقع کافی است دستگاه خطی $\alpha\tau_1^0 + \beta\tau_2^0 = F_0$ و $\alpha\tau_1^1 + \beta\tau_2^1 = F_1$ را حل کنیم.

بالاخره، فرمول این است:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

شگفت‌آور است که فرمولی که پر از عددهای گنگ است، به‌ازای هر n مقداری صحیح به‌دست می‌دهد.

تکنیک مشابهی را می‌توان درمورد دنباله‌های بازگشتی به شکل $y_{n+k} = a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n$ به‌کار گرفت؛ اما در بعضی از حالت‌ها کار پیچیده‌تر می‌شود. مثلاً، درمورد $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n$ باید پایه‌ای از نوع دیگری پیدا کرد که در اینجا به آن نمی‌پردازیم.

منبع. گاهی به این فرمول F_n فرمول بینه گفته می‌شود، اما معلوم شده که دانیل برنولی، اویلر و دوموآور در قرن هیجدهم و پیش از کارهای بینه این فرمول را می‌دانستند.

راه طبیعی به‌دست آوردن این فرمول، استفاده از تابع‌های مولد است؛ اما استفاده از آنها بدون پیش‌زمینه نیاز به‌کار بیشتری دارد.

• ترجمهٔ بردیا حسام

Jiří Matoušek, *Thirty-three Miniatures*, AMS, 2010, pp. 3-4.

حساب دیفرانسیل وانتگرال توماس

ویراست دوازدهم

جیمز. بی. توماس

ترجمهٔ سیامک کاظمی

طرح مشترک با انتشارات دانشگاه صنعتی شریف

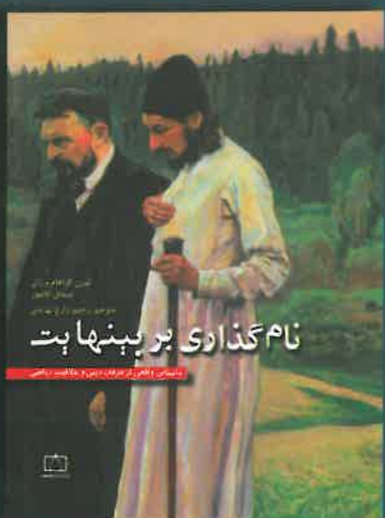
در دست انتشار

نام‌گذاری بر بینهایت

داستانی واقعی از عرفان دینی و خلاقیت ریاضی

لورن گراهام و ژان - میشل کانتور

مترجم: دکتر رحیم زارع نهندی



این کتاب روایتی است مستند از وقایعی در تاریخ ریاضیات در یک برههٔ زمانی از نیمهٔ اول قرن بیستم که حاصل تحقیقات لورن گراهام، متخصص تاریخ ریاضیات، از آمریکا و ژان - میشل کانتور، ریاضیدان فرانسوی، است. محتوای کتاب آمیزه ای است پر هیجان از توصیف بحرانی در ریاضیات و اندیشه ای دینی تحت عنوان «نام پرستی» که از طرف کلیسای ارتدکس بدعتی خطرناک محسوب می شود و نقشی که ریاضیدانان پیرو این اندیشه در برخورد با این بحران ایفا می کنند.

برای مطالعهٔ کتاب آشنایی مختصری با مفاهیم اولیهٔ ریاضی تنها برای بخش کوچکی از آن مورد نیاز است. قسمت اعظم کتاب توصیفی است و برای طیف بسیار گسترده ای از دانشجویان، دبیران و استادان دانشگاه قابل استفاده است.

امتیاز ترجمهٔ این کتاب (Copy Right) به زبان فارسی در ایران طبق قراردادی با انتشارات دانشگاه هاروارد به انتشارات فاطمی واگذار شده است.