ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم شمارهٔ چهارم، مهر ۱۳۸۰

۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ چهارم، مهر ۱۳۸۰

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول

یحیی تابش

هیأت تحریریه

یحیی تابش

رویا درودی

سپیده چمن‌آرا

بردیا حسام

نجمه سروشی

آزاده فرجی

امید نقشینه ارجمند

حمایت‌کننده

محمدمهدی عابدی‌نژاد

حروف‌چینی، طراحی و صفحه‌آرایی

آتلیهٔ ماهنامهٔ ریاضیات

مولود اسدی

چاپ و صحافی

محمد امین (خیابان آزادی، بلوار استاد معین)

نشانی دفتر ماهنامه

تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵

تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: نگاه کنید به

مقالهٔ قضیهٔ چهاررنگ.

یادداشت‌ها

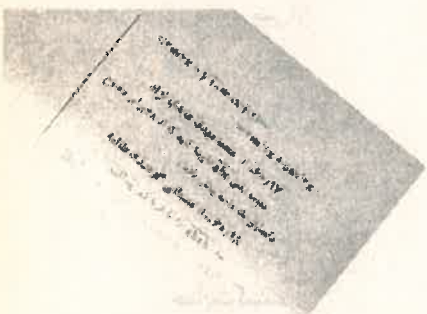
داستانی نه تازه

سال‌های چهل خورشیدی که به دبیرستان می‌رفتیم، یک عشق داشتیم و آن این که روز اول ماه، مجلهٔ یکان را بخریم و به مدرسه برویم! یکان، گذشته از این که به گردن یک نسل حق دارد و خیلی‌ها را با طرز تفکر ریاضی و علمی آشنا کرده، به نوعی یک کلوب ریاضی در سطح کشور هم شده بود و بسیاری از علاقمندان از طریق آن با هم مرتبط می‌شدند و همین، مایهٔ حرکت و جوشش خلاقیت می‌شد. سال‌ها گذشت تا در اوایل دههٔ هفتاد، شوق خفته‌ای ـ که شاید منبع آن یکان بود ـ انگیزهٔ راه‌اندازی ماهنامهٔ ریاضیات شد. چند سالی طول کشید، تا بالاخره مجوز انتشار در روز ۷۶/۱۲/۲۵ صادر شد؛ روزی که در شامگاه آن، به‌خاطر سانحه‌ای که برای دانشجویان ریاضی رخ داد، دل ما داغ‌دارترین دل عالم شد ....

مدت‌ها طول کشید تا به خود آمدیم و توانستیم ماهنامه را راه بیندازیم؛ هر چند که دیگر آن اشتیاق نبود. امید نقشینه و بردیا حسام به یاری آمدند و چند شمارهٔ آغازی حاصل کوشش آنهاست. سرمایهٔ کمی که فراهم کرده بودیم، صرف انتشار سه شماره شد که فروششان نتوانست سرمایه‌مان را برگرداند. دوباره یکان به یاری‌مان آمد: در بسیاری از شماره‌های یکان، نام «محمدمهدی عابدی‌نژاد» در کنار مسأله‌هایش به چشم می‌خورد. همان سال‌ها که یکان می‌خواندیم، اسم او را دیده بودم و نمی‌دانم چه چیزی باعث شده‌بود که نامش در ذهنم بماند ـــ شاید نوع مسأله‌هایی که طرح می‌کرد. دانشگاه که آمدیم، با او هم‌دوره شدیم و همیشه تیز هوشی او در درس‌های مشترکمان توجه همه را جلب می‌کرد. بعد از دانشگاه، سال‌ها از او بی‌خبر بودم تا سال گذشته که دکتر عابدی‌نژاد به ایران آمد، با این ایده که نشریه‌ای راه بیندازیم؛ ولی کار شروع شده‌بود و او پشتیبانی را کامل کرد. ماهنامه دفتر و دستکی پیدا کرد و دوستان دیگرم سپیده چمن‌آرا، رویا درودی، نجمه سروشی و آزاده فرجی هم با تمام تجربه و علاقه‌شان به هیأت تحریریه پیوستند.

اکنون، افق را روشن می‌بینیم تا در واقع «داستانی نه تازه» را آغاز کنیم ....

ی. ت.



دربارهٔ این شماره

از این شماره، ماهنامه دوره آزمایشی خود را پشت سر گذاشته و دوره جدید خود را آغاز می‌کند. بخش‌های مختلف ماهنامه به این ترتیب در نظر گرفته شده‌اند: یادداشت و گزارش، مقاله‌ها و مقاله‌های درسی و آموزشی، مسأله‌های درسی و جایزه‌دار، بازی و سرگرمی، المپیاد، تاریخ ریاضیات. امیدواریم در هر بخش بتوانیم مطالب متنوعی عرضه کنیم. به مباحث جدید هم توجه خواهیم‌کرد و در شماره‌های آینده، بخش جدید «ریاضیات و فن‌آوری اطلاعات و اینترنت» به مجله اضافه خواهد شد.

ماهنامه ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۳ــ۴

لازم به ذکر است که در این شماره، مقالهٔ «آرش در سیارهٔ تویاپ» که در شماره قبل نیمه‌تمام مانده بود مجدداً منتشر می‌شود تا علاقه‌مندانی که به شمارهٔ قبل دسترسی نداشته‌اند بتوانند این مقاله جالب را از ابتدا مطالعه کنند.

ما می‌خواهیم اول هر ماه ماهنامهٔ ریاضیات را به‌دست شما برسانیم؛ ولی این امر بدون همکاری شما میسر نیست. همهٔ خوانندگان و علاقه‌مندان به عنوان اعضای خانوادهٔ ماهنامه باید در این راه با ما همکاری کنند. آثار خود را برایمان بفرستید، نظرتان را دربارهٔ مطالب ماهنامه ارایه کنید، در حل مسأله و مسابقه‌ها شرکت کنید، و برای فروش ماهنامه و مشترک شدن نیز به ما یاری برسانید. مطمئن هستیم که با یاری یکدیگر قله‌های ناگشوده را خواهیم گشود.

چهل و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی

چهل و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی از ۱ تا ۱۴ جولای ۲۰۰۱ درشهرواشینگتن در ایالات متحده آمریکا برگزار شد. امسال، ایمان ستایش (دبیرستان علامه حلی تهران) و امین جعفریان (دبیرستان شهید بهشتی شهرکرد) مدال نقره و حمید فروغی (دبیرستان شهید صدوقی یزد)، سیامک احمدپور (دبیرستان امام خمینی تهران) و محمدحسین موسوی و میرامید حاجی‌میرصادقی (دبیرستان علامه حلی تهران) مدال برنز دریافت کردند. از لحاظ رتبه‌بندی تیمی نیز تیم ما در ردهٔ هفدهم قرار گرفته است.

در ده سال گذشته، کشور ما همواره بین ده تیم برتر قرار داشت و در سال ۱۳۷۷ با کسب ۵ مدال طلا و یک مدال نقره مقام اول را کسب کرد و امید امینی با کسب نمرهٔ کامل در این المپیاد، نفر اول مطلق جهان شد. با توجه به این سابقه، نتیجهٔ امسال قدری دور از انتظار بود. برای ریشه‌یابی این امر و احیاناً راه‌گشایی و ارایهٔ طریق به مسؤولان مربوطه، گزارش ویژه‌ای در شماره‌های آینده درج خواهدشد.

دهمین دورهٔ آشنایی با ریاضیات

دهمین دورهٔ آشنایی با ریاضیات، امسال در دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف از ۲۰ تا ۲۴ مرداد برگزار شد. شرکت کنندگان اکثراً دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان بودند. برای این دوره ۱۱۰ نفر از تهران و ۳۷ نفر از کرج و شهری، با همکاری مدارس مربوطه، دعوت شده بودند که ۱۲۵ نفر از ایشان در برنامه شرکت کردند.

دوره شامل ۱۳ سخنرانی بود که توسط دانش‌جویان و فارغ‌التحصیلان دانشکده ارایه شد.

سمینارهای ارایه شده در این دوره عبارتند از: از تقسیم چراگاه تا افلاطون (هادی سلماسیان)، لم‌اسپرنر (مازیار میررحیمی)، رسم پذیری با خط‌کش و پرگار (بردیا حسام)، رسم فرکتال‌ها (رضا رضازادگان)، آینه‌های بیضوی (سلمان ابوالفتح‌بیگی)، هندسهٔ لاستیکی (محسن بهرامگیری)، life جادوی ریاضیات (علی شهبازی)، هندسه (هیربد آسا)، چند کاربرد فرمول اویلر (ایمان افتخاری)، تجربیات احتمالاتی (امید نقشینه‌ارجمند) و ساختار فضا و زمان (بابک مدامی).

مدرسهٔ تابستانی علوم پایه

اولین مدرسهٔ تابستانی علوم پایه، به کوشش انجمن توسعهٔ ایران نوین، مرداد ماه امسال در دانشکدهٔ فیزیک دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد.

در این مدرسه که مخاطبان آن دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان بودند علاوه بر کلاس‌های مختلفی در زمینهٔ علوم پایه ـ ریاضی و فیزیک ـ آزمایشگاه‌ها و کارگاه‌های متعددی نیز بر پا بود که هدف آنها آشنا کردن دانش‌آموزان با علوم پایه بود.

در کنار برنامه‌های آموزشی، سمینارهایی هم دربارهٔ آموزش ریاضیات و مشکلات آموزشی توسط اساتید این رشته ارایه گردید.

برنامهٔ کلاس‌های این مدرسه به صورت زیر بود:

ریاضیات: پدیدهٔ آشوب، نظریهٔ مهمانی در گراف، تاریخچهٔ هندسه، نظریهٔ گراف، نظریهٔ بازی‌ها.

فیزیک: هولوگرافی، فیزیک ابر، ذرات بنیادی، نجوم، موسیقی در فیزیک، کاربرد لیزر در صنعت نظامی، انرژی خورشیدی، انتقال موج عصبی، پژوهش در فیزیک.

آزمایشگاه‌ها: فیزیک سطح، تحقیقات کیهانی، فیزیک پزشکی و اسپاترینگ.

کارگاه‌ها: کارگاه هولوگرافی، آونگ فوکو، ساخت گلایدرهای یونولیتی، نظریهٔ بازی‌ها.

میزگردی هم با حضور آقایان بابلیان، دیبایی و لالی به منظور بررسی و ارایه راه حل مشکلات آموزش ریاضیات برگزار شد.

قضیهٔ چهار رنگ

امید نقشینه ارجمند

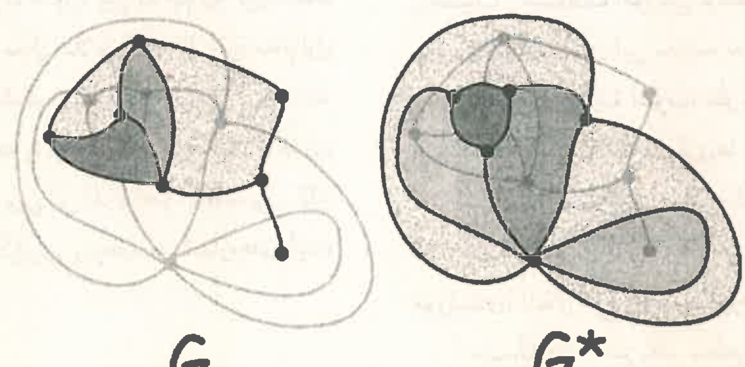
آیا هیچ‌گاه به رنگ‌آمیزی نقشه‌های سیاسی توجه کرده‌اید؟ در این نقشه‌ها همیشه آب‌ها با رنگ آبی مشخص می‌شوند و بقیهٔ نواحی با رنگ‌های دیگر. نکتهٔ بسیار مهم این است که اگر دو ناحیه (کشور یا استان) مجاور باشند نباید رنگ یکسان داشته باشند تا به این وسیله تشخیص مرزها ساده باشد. سؤالی که می‌تواند به‌طور طبیعی مطرح باشد این است که برای رنگ‌آمیزی یک نقشه حداکثر چند رنگ لازم است. آیا عددی وجود دارد که هر نقشه را بتوان با آن تعداد رنگ، رنگ‌آمیزی کرد یا این که به‌ازای هر عددی می‌توان نقشه‌ای مثال زد که با آن تعداد رنگ قابل رنگ‌آمیزی نباشد؟

نقشه‌ها و گراف‌های مسطح

هر نقشه را می‌توان گرافی مسطح دانست. پس مسألهٔ مورد بحث، رنگ‌آمیزی ناحیه‌های یک گراف مسطح است به‌طوری که دو ناحیه که در یک یال مشترک‌اند هم‌رنگ نباشند. می‌توان رنگ‌آمیزی ناحیه‌ها را به رنگ‌آمیزی رأس‌ها تبدیل کرد. با این کار به مسأله‌ای می‌رسیم که برای یک گراف دلخواه، و نه لزوماً مسطح، قابل بررسی است.

تعریف ۱ . فرض کنید G گرافی مسطح باشد که روی صفحه رسم شده‌است. اگر در هر ناحیه یک رأس قرار دهیم و دو رأس را به هم وصل کنیم در صورتی‌که ناحیه‌های آن‌ها در یک یال G مشترک باشند، آنگاه گراف مسطحی به‌دست می‌آید که به آن دوگان G می‌گوییم. توجه کنید که اگر دو ناحیه از G در بیش از یک یال اشتراک داشتند، رأس‌های متناظر در دوگان G را با همان تعداد یال به هم وصل می‌کنیم. اگر دو طرف یک یال یک ناحیه باشد، رأس متناظر با آن ناحیه در دوگان G باید با یک یال به خودش وصل شود.

مثال زیر مفهوم دوگان را به خوبی روشن می‌کند.



G G^*

در این مثال، G^* دوگان G است. به رأسی از G^* که متناظر با ناحیهٔ خارجی G است توجه کنید. این رأس یک‌بار به خودش وصل شده‌است و این به این دلیل است که ناحیهٔ خارجی G با خودش یال مشترک دارد!

ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۹ـ۴

نکتهٔ جالب توجه این است که اگر G همبند باشد آنگاه دوگان دوگان G یک‌ریخت با G می‌شود. یعنی اگر G^* دوگان G باشد آنگاه G نیز دوگان G^* است.

با توجه به تعریف اخیر، رنگ‌آمیزی ناحیه‌های یک گراف مسطح معادل با رنگ‌آمیزی رأس‌های دوگان همان گراف است و در نتیجه مسألهٔ ما به بررسی تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی رأس‌های یک گراف مسطح منجر می‌شود.

قضیه ۱. *رأس‌های هر گراف مسطح را می‌توان با شش رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.*

برای اثبات این قضیه به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۱. *فرض کنید G یک گراف ساده و مسطح باشد. آنگاه G رأسی دارد که درجهٔ آن کوچک‌تر از ۶ است.*

برهان. فرض کنید G، e یال و v رأس داشته باشد و درجهٔ رأس‌های آن $d_۱$، ...، d_v باشد. بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد G همبند است (در غیر این‌صورت یکی از مؤلفه‌های همبندی G را در نظر بگیرید). با توجه به ساده و مسطح بودن G داریم[۱]

$$e \leq ۳(v - ۲)$$

اگر d_iها را با هم جمع کنیم حاصل، دو برابر تعداد یال‌ها خواهد بود زیرا هر یال دقیقاً متصل به دو رأس است.

$$\sum_{i=۱}^{v} d_i = ۲e$$

اکنون فرض کنید که $\delta = \min\{d_۱, \dots, d_v\}$. باید نشان دهیم $\delta < ۶$. واضح است که $v\delta \leq \sum_{i=۱}^{v} d_i$. پس

$$v\delta \leq ۶(v - ۲) = ۶v - ۱۲$$

و اگر دو طرف را بر v تقسیم کنیم نامساوی زیر به‌دست می‌آید.

$$\delta \leq ۶ - \frac{۱۲}{v} < ۶$$

∎

اکنون قضیهٔ ۱ را به کمک این لم ثابت می‌کنیم.

برهان. روی v، تعداد رأس‌های گراف، استقرا می‌زنیم. به‌عنوان پایهٔ استقرا، به‌وضوح هر گراف که تعداد رأس‌های آن حداکثر ۶ باشد، با ۶ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

اکنون فرض کنید هر گراف مسطح با کمتر از n رأس را بتوان با ۶ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. اگر G گرافی مسطح باشد که $v = n$ آنگاه طبق لم ۱ رأسی مثل x دارد که درجهٔ آن از ۶ کمتر است. این رأس را حذف کنید و گراف حاصل را G' بنامید. G' مسطح است و $n - ۱$ رأس دارد، پس طبق فرض استقرا می‌توان آن را با ۶ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. تنها رنگ کردن رأس x باقی مانده‌است. توجه کنید که x حداکثر به ۵ رأس دیگر متصل است و لذا حتماً می‌توان آن را رنگی کرد که با رنگ تمام همسایه‌هایش متفاوت باشد و به این ترتیب گراف G را رنگ کرده‌ایم. ∎

با کمی دقیق کردن اثبات این قضیه، می‌توان تعداد رنگ‌ها را یکی کم کرد و قضیهٔ قوی‌تری را ثابت کرد.

قضیه ۲. *رأس‌های هر گراف مسطح را می‌توان با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.*

۱) رک به امید نقشینهٔ ارجمند، شاخص اویلر (قسمت اول)، ماهنامهٔ ریاضیات سال اول، شمارهٔ دوم، خرداد ۱۳۷۹

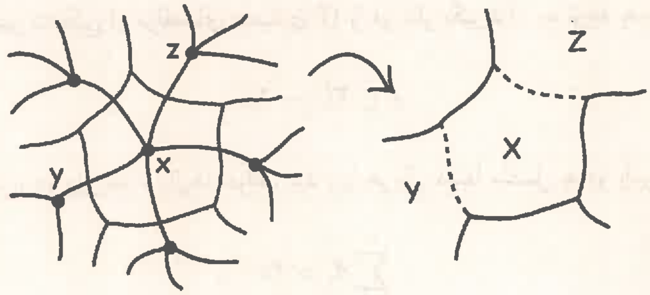
برهان. باز هم از لم ۱ استفاده می‌کنیم و قضیه را با استقرا روی تعداد رأس‌ها ثابت می‌کنیم.

به‌عنوان پایهٔ استقرا، توجه کنید که هر گراف که تعداد رأس‌های آن ۵ باشد را می‌توان با ۵ رنگ، رنگ کرد.

اکنون فرض کنید هر گراف مسطح که تعداد رأس‌های آن از n کمتر است را بتوان با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. اگر G گراف مسطحی باشد که تعداد رأس‌های آن، V، n تا است آنگاه طبق لم ۱، رأسی دارد که درجهٔ آن کوچک‌تر یا مساوی ۵ است.

اگر G رأسی با درجهٔ کمتر از ۵ داشته باشد که کار آسان است؛ مانند اثبات قضیهٔ ۱ آن رأس را حذف کرده و بقیهٔ گراف را با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در آخر این رأس را هم می‌توان طوری رنگ کرد که با هیچ‌کدام از رأس‌های مجاورش هم‌رنگ نباشد.

پس فرض کنید G رأسی مثل x با درجهٔ ۵ داشته باشد. می‌دانیم که K_5، گراف کامل ۵ رأسی، مسطح نیست پس حداقل ۲ تا از رأس‌های متصل به x موجودند که به هم وصل نیستند. این دو رأس را z و y بنامید. می‌دانیم که رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف مسطح G معادل با رنگ کردن ناحیه‌های G^*، دوگان G، است. ناحیهٔ متناظر با رأس‌های x، y و z را به ترتیب X، Y و Z بنامید.



اکنون اگر در G^* یال بین X و Y و یال بین X و Z را حذف کنیم، گراف مسطحی به‌دست می‌آید که تعداد ناحیه‌های آن ۲ تا کمتر از تعداد ناحیه‌های G^*، یعنی تعداد رأس‌های G است.

رنگ‌آمیزی ناحیه‌های این گراف معادل با رنگ‌آمیزی رأس‌های دوگان آن است که طبق فرض استقرا می‌توان با ۵ رنگ این کار را انجام داد. اکنون این رنگ‌آمیزی را می‌توان به G منتقل کرد. تنها مشکل این است که x، y و z هم‌رنگ هستند. هم‌رنگ بودن y و z مشکلی درست نمی‌کند چون فرض کرده‌بودیم که این دو به هم وصل نیستند. توجه کنید که x، ۵ همسایه دارد و حداقل دو تا از آن‌ها هم‌رنگ هستند، پس حداقل یک رنگ برای x وجود دارد و این اثبات را کامل می‌کند. ∎

تا اینجا ثابت کردیم که رأس‌های یک گراف مسطح را می‌توان با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. در ضمن اگر به اثبات قضیهٔ ۲ توجه کنید برای این کار الگوریتمی نیز داریم.

سؤالی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا ۵ رنگ لازم است؟ آیا این کار با ۴ رنگ ممکن نیست؟ کمتر از ۴ رنگ چطور؟

جواب سؤال آخر ساده است. K_4، گراف کامل ۴ رأسی، یک گراف مسطح است و برای رنگ کردن آن به ۴ رنگ احتیاج داریم. پس تنها سؤال این است که آیا گراف مسطحی وجود دارد که نتوان آن را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؟

از مسألهٔ چهار رنگ تا قضیهٔ چهار رنگ

مسألهٔ چهار رنگ را ظاهراً برای اولین بار موبیوس [1] در ۱۸۴۰ میلادی مطرح کرد. پس از او دمورگان [2] در ۱۸۵۰ میلادی و کیلی [3] در ۱۸۷۸ میلادی نیز این مسأله را مطرح کردند. در سال ۱۸۷۹ میلادی کمپ[4] که وکیل دعاوی بود و به‌طور آماتوری به ریاضیات نیز

1) Mobius 2) De Morgan 3) Cayley 4) M. Kempe

می‌پرداخت ادعا کرد که مسألهٔ چهار رنگ را حل کرده است. ولی یک سال بعد هیوود[۱] متوجه اشتباهی در اثبات کمپ شد و با اندکی تغییر در آن قضیهٔ ۵ رنگ را ثابت کرد. در ۱۹۲۲ میلادی فیلیپ فرانکلین[۲] مسأله را برای نقشه‌هایی که حداکثر ۲۶ ناحیه دارند ثابت کرد. چند سال بعد هاینریش هیش[۳] مسیری را برای اثبات انتخاب کرد که برای به نتیجه رسیدن لازم بود ۱۰۰۰۰ گراف خاص بررسی شوند؛ کاری که ممکن بود به کمک کامپیوتر یک قرن طول بکشد تا به نتیجه برسد! در سال ۱۹۷۰ میلادی ولفگانگ هاکن[۴] اصلاحاتی در کارهای هیش انجام داد تا بتواند مقدار محاسبات را کاهش دهد. از سال ۱۹۷۲ کنت اپل[۵] شروع به همکاری با هاکن کرد و طی دو سال، مشکلات کامپیوتری مسأله را بررسی کردند تا آن که عاقبت در ژوئن ۱۹۷۶ موفق به حل مسألهٔ چهار رنگ شدند. این کار با بررسی حدود دو هزار نقشه مشخص و صرف هزاران ساعت از وقت کامپیوتر انجام شد. البته امروزه با کامپیوترهای سریعی که وجود دارد این محاسبات را می‌توان در طول چند ساعت به نتیجه رساند.

به عقیدهٔ بعضی چنین روشی یک «اثبات واقعی» نیست و هنوز هم ریاضیدانان امیدوارند روزی اثباتی برای قضیهٔ چهار رنگ پیدا شود که بتوان آن را روی کاغذ نوشت!

برای چند دقیقه‌ای این واقعیت را فراموش کنید که اثبات قضیهٔ چهار رنگ بیش از یک قرن بعد از مطرح شدن مسأله کشف شده است. فراموش کردید؟ بله؟ بسیار عالی!

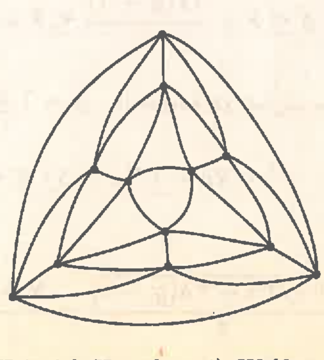
یک‌بار دیگر اثبات قضیهٔ ۲ را مرور کنید. لم ۱ نقش عمده‌ای را در اثبات این قضیه بازی می‌کند. با همان ایده‌ها، قضیهٔ زیر به‌سادگی ثابت می‌شود.

قضیه ۳. *رأس‌های هر گراف مسطح با کمتر از ۱۲ رأس را می‌توان با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.*

برهان. با توجه به اثبات لم ۱ اگر $\delta = \min\{d_1, \dots, d_v\}$ آنگاه $\delta \leq ۶ - \frac{۱۲}{v}$. با فرض $v \leq ۱۱$ داریم $\delta \leq ۶ - \frac{۱۲}{۱۱} = ۵ - \frac{۱}{۱۱}$ و در نتیجه $\delta \leq ۴$. روی تعداد رأس‌ها استقرا می‌زنیم. واضح است که هر گراف با کمتر از ۵ رأس را می‌توان با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. حال فرض کنید هر گراف مسطح با کمتر از n رأس را بتوان با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و در ضمن $n < ۱۱$. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر G گرافی مسطح باشد که $v = n$ آنگاه G را نیز می‌توان با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. طبق آنچه در ابتدا گفتیم G، رأسی با درجهٔ کمتر از ۵ دارد. اگر درجهٔ این رأس کمتر از ۴ باشد که مسأله حل است: G منهای این رأس، گرافی مسطح با $n - ۱$ رأس است؛ پس می‌توان آن را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. رأس باقی مانده، مجاور حداکثر ۳ رأس است و لذا می‌توان رنگی مناسب به آن اختصاص داد.

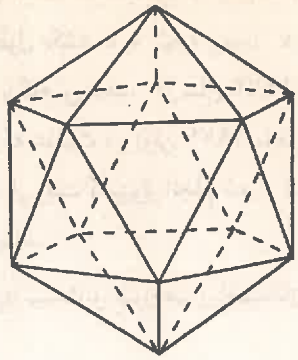
حال فرض کنید که x رأسی درجه ۴ باشد. از ۴ رأس مجاور x حداقل دو تا به هم وصل نیستند (چون در غیر این‌صورت این چهار رأس همراه با x تشکیل یک گراف کامل ۵ رأسی را می‌دهند و این ممکن نیست زیرا K_5 مسطح نیست). این دو رأس را y و z بنامید. مانند اثبات قضیهٔ ۲، x، y و z را یکی می‌کنیم تا گرافی مسطح با $n - ۲$ رأس به‌دست آید. ادامه کار نیز مشابه اثبات قضیهٔ ۲ است. ∎

آیا این ایده را نمی‌توان در گراف‌هایی با بیش از ۱۱ رأس به‌کار برد؟ آیا یک گراف مسطح ۱۲ رأسی، رأسی با درجهٔ کمتر از ۵ دارد؟ مثال زیر نشان می‌دهد که این‌طور نیست.



1) Heawood 2) M. Philip Franklin 3) Heinrich Heesch 4) Wolfgang Haken 5) Kenneth Appel

این گراف را قبلاً جایی ندیده‌اید؟ مطمئنید؟ این گراف در واقع همان ۲۰ وجهی منتظم است و اگر آن را به‌صورت فضایی رسم کنیم، شکل زیر به‌دست می‌آید.



ببینید می‌توانید این گراف را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید؟ با ۳ رنگ چطور؟ سعی کنید قضیهٔ چهار رنگ را برای گراف‌هایی با بیش از ۱۱ رأس ثابت کنید.

رویه‌های دیگر

فرض کنید یک گراف روی یک چنبره g سوراخه رسم شده‌باشد. می‌خواهیم ببینیم که برای رنگ کردن رأس‌های چنین گرافی به حداکثر چند رنگ احتیاج داریم. می‌دانیم که شاخص اویلر چنبره g سوراخه $2(g-1)$ است.

قضیه ۴. اگر $g > 0$ و G گرافی روی چنبره g سوراخه باشد آنگاه می‌توان رأس‌های G را با $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

برهان. می‌توان فرض کرد که G گرافی ساده است. در این صورت داریم[1]

$$e \leq 3(v+2(g-1))$$

و اگر $\delta = \min\{d_1, \dots, d_v\}$ آنگاه $v\delta \leq \sum_{i=1}^{v} d_i = 2e \leq 6(v+2(g-1))$.

فرض کنید گرافی روی چنبرهٔ g سوراخه برای رنگ‌آمیزی به r رنگ احتیاج داشته باشد و G از بین تمام این گراف‌ها کمترین تعداد رأس را داشته باشد. طبق رابطهٔ اخیر $\delta \leq 6 + \frac{12(g-1)}{v}$. با توجه به این که هر زیرگراف سره G را می‌توان با $r-1$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد δ نمی‌تواند کمتر از $r-1$ باشد و دیگر این که $v \geq r$. پس

$$r-1 \leq \delta \leq 6 + \frac{12(g-1)}{v} \leq 6 + \frac{12(g-1)}{r}$$

نامساوی سمت راست از این رو درست است که $g-1 \geq 0$. با مقایسهٔ دو عبارت سمت راست و چپ داریم

$$r^2 - 7r - 12(g-1) \leq 0$$

و در نتیجه

$$r \leq \frac{7+\sqrt{49+48(g-1)}}{2} = \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$$

۱) رک به امید نقشینهٔ ارجمند، شاخص اویلر (قسمت دوم)، ماهنامهٔ ریاضیات، سال اول، شمارهٔ سوم، مهر ۱۳۷۹

و با توجه با اینکه r یک عدد طبیعی است داریم

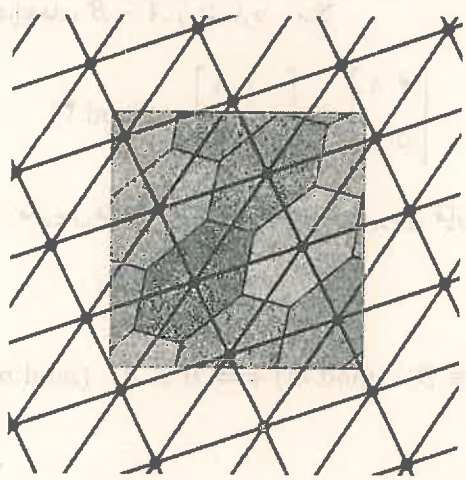
$$r \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

پس هر گراف روی چنبره g سوراخه را می‌توان با $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. ∎

توجه کنید که فرمول بالا به ازای $g = 0$، عدد ۴ را می‌دهد ولی این قضیه با فرض $g > 0$ ثابت شد. اثبات قضیه ۳، تا حدی ساده‌تر از اثبات قضیهٔ ۲ است ولی حقیقت جالب توجه این است که عددی که این قضیه می‌دهد دقیق است. به این معنی که گرافی روی چنبرهٔ g سوراخه وجود دارد که برای رنگ کردن آن به دقیقاً $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ رنگ نیاز داریم.

بررسی مسأله روی کره، به‌نظر ساده‌تر از بررسی آن روی رویه‌های دیگر است؛ ولی سال‌ها قبل از حل شدن مسأله چهار رنگ، تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی نقشه روی رویه‌های دیگر به‌طور دقیق مشخص شده‌بودند.

به عنوان مطلب پایانی می‌خواهیم حالت $g = 1$ را بررسی کنیم. طبق قضیهٔ ۳ هر گراف روی چنبره را می‌توان با ۷ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. نشان می‌دهیم ۷ کمترین عدد ممکن است. برای این کار، کافی است K_7 را روی چنبره بنشانیم. یک چنبره در واقع مربعی است که ضلع‌های روبه‌روی آن را دوبه‌دو به هم چسبانده‌ایم. شکل زیر گراف K_7 ای است که روی چنبره رسم شده‌است.



مراجع

[1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory With Applications*. New York: Elsevier North Holland, 1976

[۲] ایستین اُر، گراف و کاربردهای آن. ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی.

[۳] ریچارد کورانت و هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟ ترجمه سیامک کاظمی، نشر نی.

[۴] یان استیوارت، مفاهیم ریاضیات جدید. ترجمه جمشید پرویزی، انتشارات خوارزمی.

[۵] امید نقشینهٔ ارجمند، شاخص اویلر. ماهنامه ریاضیات سال اول، شماره‌های دوم و سوم، خرداد و مهر ۱۳۷۹.

هم‌نهشتی ماتریس‌ها

بهروز طوری

موضوع بحث این مقاله، در واقع اجتماعی از دانسته‌های دبیرستانی در زمینهٔ هم‌نهشتی در نظریهٔ اعداد و ماتریس‌هاست. ابتدا یادآوری می‌کنیم که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و هر عدد صحیح و ناصفر m، «$a \equiv b \pmod{m}$» یعنی $m \mid b - a$.

حال این مفهوم را به ماتریس‌ها تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم دو ماتریس هم‌مرتبهٔ مربعی A و B داریم که همهٔ درایه‌های آن‌ها صحیح هستند (در طول این مقاله هر جا صحبت از ماتریس است، منظور ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صحیح باشند). برای هر عدد صحیح ناصفر m، تعریف می‌کنیم

$$A \equiv B \pmod{m} \Longleftrightarrow m \mid a_{ij} - b_{ij}, \ ۱ \leq i, j \leq n$$

(که منظور از c_{ij} درایهٔ ij ام ماتریس C است و n، مرتبهٔ ماتریس مربعی است) و می‌گوییم دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B به هنگ m هم‌نهشت هستند اگر و فقط اگر m تمام درایه‌های $A - B$ را بشمارد. مثلاً

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} \pmod{۳}$$

در طول این مقاله به جز جایی که قید شود، ماتریس‌های $n \times n$ هم مرتبه مورد بررسی قرار می‌گیرند. اکنون به بیان چند قضیه در این مورد می‌پردازیم.

قضیه ۱.

$$A \equiv B \pmod{m} \Longleftrightarrow B \equiv A \pmod{m}$$

قضیه ۲.

$$a \equiv b \pmod{m}, \ A \equiv B \pmod{m} \Longrightarrow aA \equiv bB \pmod{m}$$

قضیه ۳.

$$A \equiv B \pmod{m}, \ C \equiv D \pmod{m} \Longrightarrow A + C \equiv B + D \pmod{m}$$

قضیه ۴.

$$A \equiv B \pmod{m}, \ B \equiv C \pmod{m} \Longrightarrow A \equiv C \pmod{m}$$

قضیه ۵.

$$A \equiv B \pmod{m}, \ C \equiv D \pmod{m} \Longrightarrow AC \equiv BD \pmod{m}$$

قضیه ۶.

$$A \equiv B \pmod{m} \Longrightarrow \det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}$$

مجلهٔ ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۱۲ـ۱۰

اثبات شش قضیه فوق به راحتی انجام‌پذیر است و ما فقط به اثبات قضیهٔ پنجم می‌پردازیم[۱]. چون $A \equiv B \pmod{m}$، برای هر $۱ \leq i,j \leq n$ داریم

$$a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m} \qquad (۱)$$

متشابهاً، چون $C \equiv D \pmod{m}$، برای هر $۱ \leq i', j' \leq n$ داریم

$$c_{i'j'} \equiv d_{i'j'} \pmod{m} \qquad (۲)$$

از ۱ و ۲ و طبق خاصیت مشابه خاصیت ۴ در مورد اعداد، برای هر $۱ \leq i, j, i', j' \leq n$ داریم

$$a_{ij}c_{i'j'} \equiv b_{ij}d_{i'j'} \pmod{m} \qquad (۳)$$

(توجه کنید که اندیس‌های a و b با هم و اندیس‌های c و d با هم برابرند). فرض می‌کنیم

$$A \times C = E = [e_{ij}]_{n\times n}, B \times D = F = [f_{ij}]_{n\times n}.$$

طبق تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم

$$e_{ij} = \sum_{۱\leq k\leq n} a_{ik}c_{kj}$$

$$f_{ij} = \sum_{۱\leq k\leq n} b_{ik}d_{kj}$$

از طرف دیگر طبق خاصیت ۳ به ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$ داریم

$$\begin{aligned} a_{i۱}c_{۱j} &\equiv b_{i۱}d_{۱j} \pmod{m} \\ a_{i۲}c_{۲j} &\equiv b_{i۲}d_{۲j} \pmod{m} \\ &\vdots \\ a_{in}c_{nj} &\equiv b_{in}d_{nj} \pmod{m} \end{aligned}$$

(توجه داشته باشید که اندیس i و j مربوط به سیگما نیستند). با جمع کردن دو طرف هم‌نهشتی‌ها داریم

$$\sum_{۱\leq k\leq n} a_{ik}c_{kj} \equiv \sum_{۱\leq k\leq n} b_{ik}d_{kj} \pmod{m}$$

و از آنجایی که معادله‌های فوق به ازای هر i و j نابیشتر از n صادق است پس داریم

$$AC \equiv BD \pmod{m}$$

تا به حال مشاهده کردیم که شباهت‌هایی بدیهی میان هم‌نهشتی در نظریهٔ اعداد و هم‌نهشتی در ماتریس‌ها وجود دارد. اکنون به بیان خاصیت‌های دیگری از این قبیل می‌پردازیم.

تعریف ۱. می‌گوییم A یک وارون ضربی به هنگ m دارد اگر و فقط اگر ماتریس B با این خاصیت که

$$AB \equiv BA \equiv I \pmod{m}$$

وجود داشته باشد.

۱) اثبات قضیهٔ ششم نیز شاید در نگاه اول کمی مشکل به نظر رسد ولی به آسانی با استقرای ریاضی قابل انجام است.

قضیه ۷. اگر یک ماتریس به هنگ m وارون ضربی داشته‌باشد، آنگاه کلیهٔ وارون‌های ضربی آن به هنگ m هم‌نهشت هستند.

برهان. فرض می‌کنیم B وارون ضربی A به هنگ m باشد. ثابت می‌کنیم اگر C وارون ضربی دیگری به هنگ m برای A باشد، $B \equiv C \pmod{m}$. از خواص ۱ تا ۶ داریم

$$B \equiv BI \equiv B(AC) \equiv (BA)C \equiv IC \equiv C \pmod{m}.$$

■

از این به بعد، این وارون را با A^{-1} نشان می‌دهیم. اکنون به بیان قضیه‌ای بسیار زیبا می‌پردازیم.

قضیه ۸. A به هنگ m دارای وارون ضربی است اگر و فقط اگر $(\det(A), m) = 1$.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم اگر A وارون ضربی داشته باشد آنگاه $(\det(A), m) = 1$. داریم $AA^{-1} \equiv I \pmod{m}$؛ پس طبق قضیهٔ ۶ داریم

$$\det(AA^{-1}) \equiv \det(I) \pmod{m}.$$

طبق خاصیت ضربی دترمینان‌ها،

$$\det(A)\det(A^{-1}) \equiv 1 \pmod{m}$$

و در نتیجه $\det(A)$ و m نسبت به هم اولند.

اکنون فرض می‌کنیم $(\det(A), m) = 1$ و ثابت می‌کنیم A وارون ضربی دارد. همه با ماتریس همسازهٔ A آشناییم و می‌دانیم که

$$AA^* = \det(A) \cdot I.$$

از آنجا که همهٔ درایه‌های A صحیح هستند و مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته است، تمام درایه‌های A^* نیز صحیح هستند؛ یعنی A^* را می‌توان ماتریسی صحیح به‌شمار آورد. حال اگر $(\det(A), m) = 1$ آنگاه اعداد صحیح k و l وجود دارند که $k\det(A) + lm = 1$ و در نتیجه $k\det(A) \equiv 1 \pmod{m}$. با این شرایط ثابت می‌کنیم kA^* ماتریس مطلوب است. داریم

$$kA^*A \equiv k\det(A)I \equiv 1 \times I \equiv I \pmod{m}$$

که هم‌نهشتی اول از خواص مذکور در ابتدای مقاله به دست می‌آید و هم‌نهشتی دوم از قضیهٔ ۲ و این که $k\det(A) \equiv 1 \pmod{m}$ حاصل می‌شود.

■

به شباهت‌های بسیار بین هم‌نهشتی ماتریس و اعداد پی بردیم. البته این موضوع تقریباً به این علت است که مفهوم هم‌نهشتی ما در نظریهٔ اعداد در واقع زیرشاخه‌ای از مفهوم هم‌نهشتی‌ها در ماتریس‌هاست؛ یعنی می‌توانیم عدد صحیح a را ماتریس $[a]_{1\times 1}$ در نظر بگیریم. یک تفاوت عمدهٔ این حالت خاص با حالت کلی، خاصیت جابه‌جایی ضرب اعداد است که در ضرب ماتریس‌ها به چشم نمی‌خورد که البته این خاصیت (فی الواقع عدم این خاصیت) در جاهای مختلف در وادی ماتریس‌ها به چشم می‌خورد!

در پایان توجه شما را به این تمرین‌ها جلب می‌کنیم.

تمرین ۱. ثابت کنید اگر ماتریس A وارون ضربی به هنگ m داشته باشد، آنگاه عدد طبیعی k وجود دارد که $A^k \equiv A^{-1} \pmod{m}$.

تمرین ۲. آیا می‌توانید مفاهیم دستگاه مخفف مانده‌ها و اندیس و همچنین قضایایی مانند قضیهٔ اویلر و ویلسون را در مورد ماتریس‌ها تعمیم دهید؟

• بهروز طوری، پیش‌دانشگاهی شهید اژه‌ای اصفهان.

آرش در سیارهٔ تویاپ (۱ و ۲)

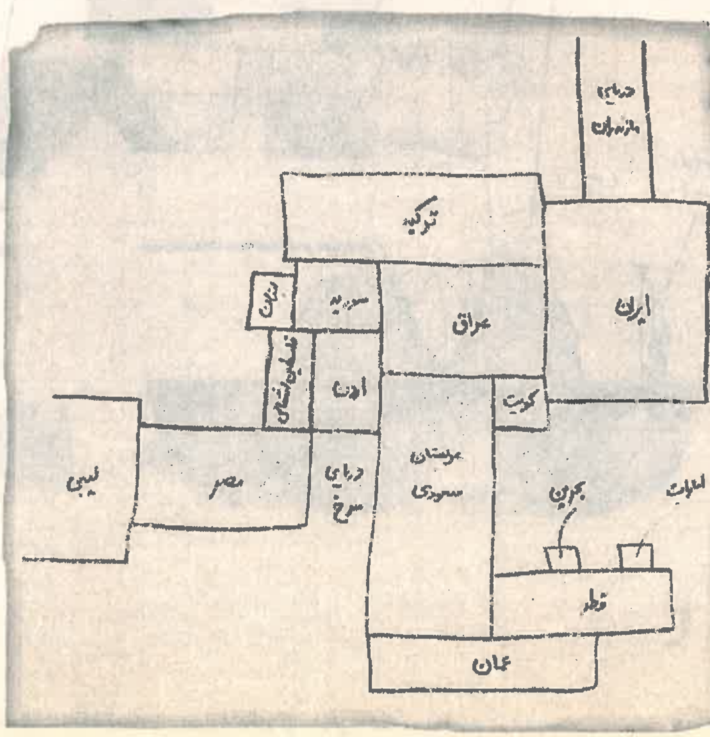
ایمان افتخاری

آرش، روی تخت، زیر باد ملایم کولر دراز کشیده بود و به سؤالی که امروز برایش پیش آمده بود فکر می‌کرد. احتمالاً نمرهٔ امتحان جغرافیش خوب نمی‌شد. واقعاً نمی‌دانست چرا باید ارتفاع بلندترین کوه آفریقا را بداند. از همه بدتر، کشیدن نقشهٔ خاورمیانه بود! بچه‌ها معتقد بودند که آقای صولتی، معلم جغرافی، می‌خواست ثابت کند که اگر بخواهد، می‌تواند حال همه را بگیرد! امتحانی بگیرد که . . .

بعد از امتحان با خودش فکر کرده‌بود که چقدر خوب بود کشورها یک کم از زمین‌هایشان را با هم عوض می‌کردند تا اینقدر حفظ کردن نقشهٔ جغرافی سخت نباشد!

به ذهنش رسیده بود که اگر روزی رئیس سازمان ملل شد، طرحی بدهد که طبق آن نقشهٔ همهٔ کشورها چیزی شبیه به مستطیل باشد؛ حتی دریاچه‌ها و دریاها را هم به شکل مستطیل دربیاورند!

از روی کتاب جغرافی، نقشه‌ای برای خاورمیانه ساخت؛ از آن خوشش نیامد: خیلی حیف است که نقشهٔ ایران به‌جای گربه مستطیل باشد!



تمام مدتی که توی اتوبوس بود به این ایدهٔ احمقانه فکر می‌کرد: سعی کرده بود سطح کره زمین را با چیزهایی شبیه به مستطیل بپوشاند؛ ولی ظاهراً این کار ممکن نبود. هر بار لازم می‌شد بعضی از ناحیه‌ها شکلی غیر از مستطیل، مثلاً مثلث، داشته باشند.

خسته بود. کم کم چشم‌هایش گرم شد و به خواب رفت . . . .

ــ سلام مرد جوان! به سیارهٔ تویاپ خوش آمدی.

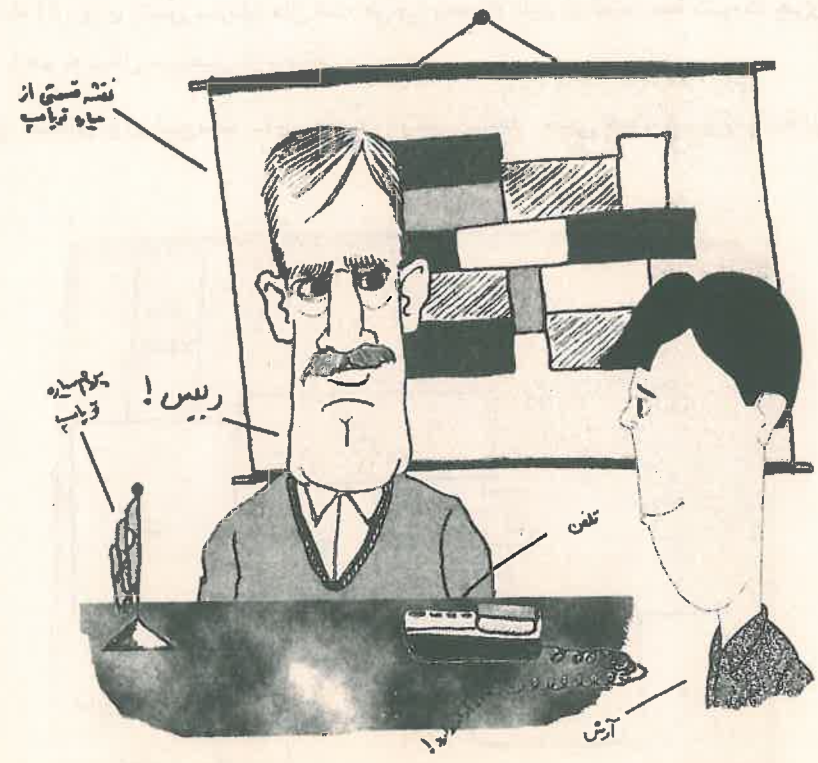
این صدای مردی بود که پشت میز بزرگی نشسته بود. به نظر با جذبه می‌رسید. مرد ادامه داد «من رئیس سیارهٔ تویاپ هستم. از آشنایی با شما خوش‌وقتم.» و دستش را درازکرد.

آرش هم، مؤدبانه، دست خود را درازکرد و گفت: من آرش هستم؛ ساکن سیارهٔ زمین. گفتید اسم سیارهٔ شما چیست؟

رئیس: تویاپ! ظاهراً تا به‌حال اسم سیارهٔ ما را نشنیده‌اید.

آرش: نه‌خیر، نشنیده‌ام؛ اسم جالبی است.

خواست بپرسد معنی آن چیست؛ ولی فکر کرد سؤال احمقانه‌ای است. مگر او می‌داند «زمین» یعنی چه؟! سپس متوجه نقشه‌ای شد که پشت سر رئیس روی دیوار نصب شده بود. نقشهٔ ساده و جالبی بود: همهٔ منطقه‌ها به شکل مستطیل بود.



آرش: این نقشه دقیق است؟ ظاهراً شما زمین‌هایتان را خیلی منظم تقسیم کرده‌اید.

رئیس با افتخار سرش را بالا گرفت و گفت: بله، ادارهٔ سیارهٔ عظیم ما بسیار مشکل است و لذا تصمیم گرفتیم تقسیم اراضی هم شکل منظمی داشته باشد. هریک از زمین‌هایی که به مردم این سیاره واگذار شده‌است تقریباً یک مستطیل است؛ یعنی ضلع‌های آن

آن‌قدر صاف است که مختصر انحنای احتمالی آنها قابل اغماض است و زاویه‌ها هم حداکثر یک درجه با زاویه قائمه تفاوت دارند. پس می‌شود گفت که دقت زیادی در تقسیمات انجام داده‌ایم. به‌علاوه، در سرزمین ما هر خانواده مالک و ساکن یکی از این قطعات است.

آرش پرسید: آیا شما مطمئن هستید که تمام سیارهٔ شما تقسیم شده‌است؟ ما در زمین سرزمین‌های وسیعی داریم که هیچ ساکنی ندارد!

رئیس گفت: ما کاملاً مطمئن هستیم. در واقع، ریاضی‌دانان ما، با توجه به این که مستطیل هرکسی حداقل ۱۰۰ متر مربع مساحت دارد و این که ما روی یک سیارهٔ متناهی زندگی می‌کنیم و این که دورتادور مستطیل هر کسی با مستطیل‌های همسایه‌هایش پر شده است، این مطلب را برای ما ثابت کرده‌اند که هیچ بخشی از سیارهٔ ما تقسیم نشده نمانده است.

آرش گفت: منظور شما از این عبارت آخر در مورد همسایه‌ها و ... چیست؟

رئیس: ببینید! اگر یک نفر در مستطیلی زندگی کند که در مجاورت او یک صحرای تقسیم نشده باشد، می‌تواند از سرزمین خود وارد ناحیه‌ای شود که تقسیم نشده است؛ ولی ما با آمارگیری می‌دانیم که هرکس، به هر صورت که از مستطیل خودش خارج شود، وارد مستطیل کس دیگری خواهد شد.

آرش گفت: خوب؛ بگذریم .... من این مطلب را از شما قبول می‌کنم؛ ولی باز هم شگفت‌زده هستم. دلیلی برای حرفی که می‌زنم ندارم ولی به نظرم می‌رسد که روی کرهٔ زمین ما چنین کاری را نمی‌شود کرد. البته یک علت آن وجود اقیانوس‌ها است؛ ولی صرف نظر از آنها، حتی اگر اقیانوس‌ها هم خشک شوند، به نظرم این کار ممکن نیست.

رئیس: جالب است. بین مردم سرزمین ما هم زمزمه‌هایی شایع شده‌است که ما روی یک کره زندگی نمی‌کنیم؛ ولی این اصلاً قابل قبول نیست. اگر روی کره زندگی نمی‌کنیم، پس کجا زندگی می‌کنیم؟ البته بین دانشمندان و متفکرین جامعهٔ ما هم هستند کسانی که ادعا می‌کنند سیارهٔ ما کروی شکل نیست. اکنون تعدادی از دانشمندان ما مشغول بررسی این ادعا هستند؛ بعضی سعی می‌کنند آن‌را ثابت کنند و برخی دیگر می‌کوشند شواهدی بیابند که واقعاً سرزمین ما یک کره است.

آرش: خوب حتی زمین ما هم یک کرهٔ واقعی نیست و شما هم، هرچند که ناهمواری‌های خیلی کمتری روی سرزمینتان دارید، تقریباً واضح است که روی یک کره زندگی نمی‌کنید.

رئیس: بله؛ اما این اِشکال سطحی است. وقتی می‌گوییم «کره»، منظورمان در همان حدی است که زمین شما کره است. در واقع، مسألهٔ ما مثلاً این است که ما روی یک قوری زندگی می‌کنیم یا روی یک کره. یعنی واقعاً آیا اگر ما بلندی‌های سرزمینمان را بکوبیم و چاله‌ها را پر کنیم، سیارهٔ ما یک کره خواهد بود یا نه؟ بعد با لحن شوخی گفت: ما اصلاً نمی‌توانیم بگوییم که روی یک قوری دسته دار بزرگ زندگی نمی‌کنیم و بعد خندهٔ بلندی کرد که آرش را هم وادار به لبخند زدن کرد.

آرش شب را در هتلی مخصوص مهمانان خارجی، که زمین‌های مستطیل شکل ندارند، استراحت کرد و صبح برای صرف صبحانه به رستوران هتل رفت. هنگامی که پشت میز نشست، مردی کوتاه‌قد و عینکی نزدیک شد و اجازه خواست که صبحانه را با آرش باشد. موهای بالای سر مرد ریخته بود و به‌نظر می‌رسید سنی بیش از چهل سال دارد.

مرد گفت: اسم من خی[۱] است! من یکی از دوستان رئیس هستم و علاقهٔ خاصی به ریاضیات دارم. دیشب رئیس به من گفت که شما ظاهراً به مسأله‌ای که در مورد سرزمین ما مطرح شده‌است علاقمند هستید. من واقعاً جذب این مسأله شده‌ام؛ دوست دارم که کمی با هم در این مورد صحبت کنیم.

آرش با سر موافقتش را نشان داد. پیش‌خدمت، سینیِ صبحانه را روی میز گذاشت.

خی: من مدتی است که دارم به شکل وارونه به مسأله نگاه می‌کنم. بگذارید از ابتدا بگویم: من معتقد بودم و هستم که ادعایی که

۱) حرف یونانی χ

مبنی بر کره نبودن سیارهٔ ما شده‌است حقیقت دارد و بعد از مدتی کارکردن به این نتیجه رسیدم که یک راه منطقی آن است که به بررسی کره‌ها بپردازیم و خواصی از آنها به‌دست بیاوریم که در مورد سرزمین بسیار بزرگی مثل سرزمین ما، با توجه به امکانات و شرایط موجود، قابل تحقیق باشد و بعد امیدوار باشیم که آن خاصیت در مورد سرزمین ما برقرار نباشد و نتیجه بگیریم که روی کره زندگی نمی‌کنیم.

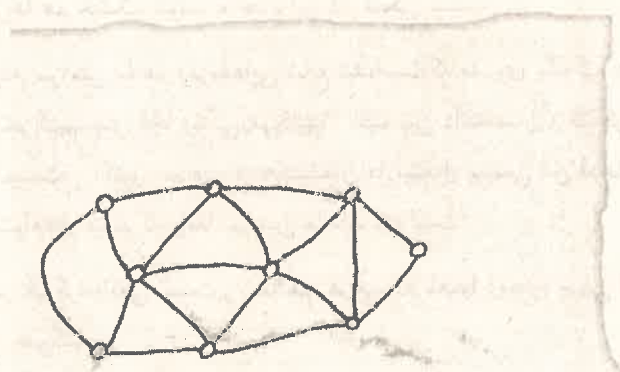
آرش: و البته این خاصیت‌ها باید مستقل از ناهمواری‌ها و پستی و بلندی‌ها باشند!

خی خندید و گفت: بله؛ رئیس در مورد صحبت‌های دیروزتان به‌طور مفصل با من صحبت کرد. این نکته‌ای که می‌گویی هم دارای اهمیت است.

آرش: خوب؛ تفکرات شما نتیجه‌ای هم داشته‌است؟

خی: یک نکتهٔ خیلی عالی! البته از نظر خودم.

خی یک کاغذ روی میز گذاشت و با قلم، شکلی به این صورت کشید



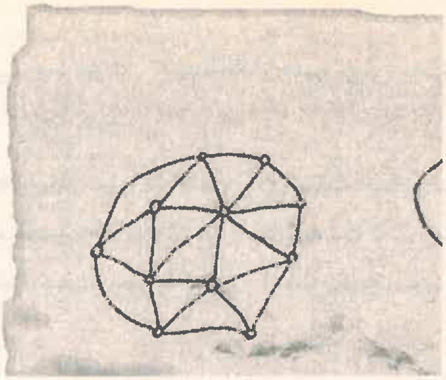
خی: چنین شکلی را روی صفحه در نظر بگیر که هر دو مثلث حداکثر در یک ضلع مشترک هستند.

آرش: قرار بود در مورد کره حرف بزنیم.

خی: عجله نکن! به آن هم می‌رسیم. در این شکل تعدادی شبه پاره‌خط(یعنی تکه خطوط احتمالاً خمیده) بین رأس‌های مشخص شده داریم که این رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند و صفحه را به تعدادی مثلث (!) تقسیم می‌کنند. الان در این شکل تعداد رأس‌ها ۹ است و تعداد شبه پاره‌خط‌ها ۱۷ است. تعداد ناحیه‌های ایجاد شده هم، با احتساب ناحیهٔ بیرونی ۱۰ تاست. حالا این عددها را این طوری با هم جمع و تفریق کن: تعداد رأس‌ها به‌علاوهٔ تعداد ناحیه‌ها منهای تعداد شبه پاره‌خط‌ها. در این حالت این عدد چند است؟

آرش: ۹ به‌اضافهٔ ۱۰ منهای ۱۷ می‌شود ۲.

خی: خوب؛ حالا عدد را برای این شکل حساب کن.



آرش: تعداد رأس‌ها که ... ۱۱ تاست. شبه پاره‌خط‌ها... ۲۳ تاست و ناحیه‌ها ۱۴ تا، پس عدد مورد نظر ۱۴+۱۱-۲۳ خواهد بود. باز هم ۲ می‌شود.

خی: و جالب آن است که من صد شکل مختلف کشیده‌ام و همیشه عدد ۲ را به‌دست آورده‌ام.

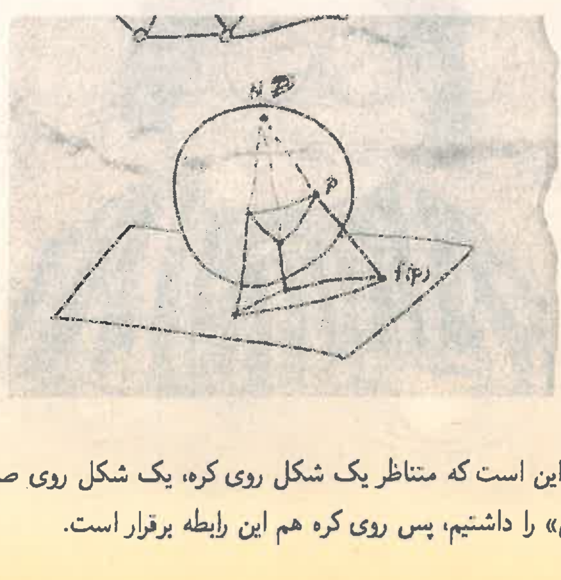
آرش: من هم چیزهایی در این مورد شنیده‌ام و فکر می‌کنم چیزی که شما به‌دست آورده‌اید ثابت شده است.

خی: حالا برویم سراغ کره. می‌شود فرض کرد که یک چنین شکلی روی سطح کره هم کشیده شده باشد؛ منتها این بار ناحیهٔ بیرونی نخواهیم داشت و هریک از ناحیه‌ها اصولاً چیزی شبیه مثلث است. یک کره را در نظر بگیر و این بلا را به سرش بیاور: طوری روی صفحه بگذارش که قطب جنوب آن روی صفحه باشد. اگر P نقطه‌ای از کره غیر از قطب شمال باشد، P را به قطب شمال وصل کن تا این خط صفحه را در نقطه‌ای قطع کند و اسم آن را $f(P)$ بگذار؛ به این ترتیب، اگر از همهٔ نقاط یک شکل روی کره که قطب شمال داخل یکی از مثلث‌هایش باشد، f بگیریم، شکلی روی صفحه به‌دست می‌آید که شبیه همان چیزهایی است که با هم دیدیم و تعداد رأس‌ها و پاره‌خط‌ها و ناحیه‌های آن‌را حساب کردیم.

در ضمن تصویر هر رأس، یعنی f(رأس)، رأسی در صفحه است. تصویر هر پاره‌خط هم یک پاره خط در صفحه است.

آرش: و تصویر هر ناحیه هم یک ناحیه در صفحه.

خی: بله. البته وقتی ناحیه‌ای که قطب شمال در آن است روی صفحه بیاید، همان ناحیهٔ بیرونی را که قبلاً داشتیم ایجاد می‌کند. حالا می‌توانی بگویی چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

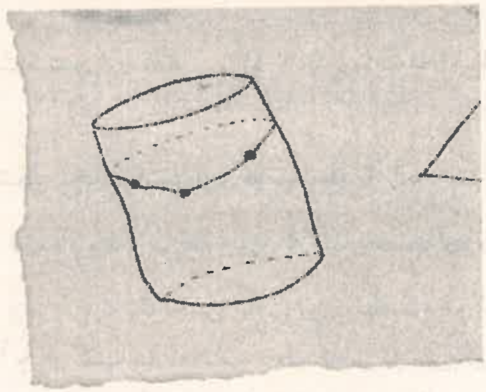


آرش: خوب؛ معنی این حرف‌ها این است که متناظر یک شکل روی کره، یک شکل روی صفحه داریم و چون روی صفحه، رابطهٔ شما که «۲ = پاره‌خط− ناحیه+ رأس» را داشتیم، پس روی کره هم این رابطه برقرار است.

خی: و این دقیقاً چیزی است که من به‌آن رسیده‌ام؛ یعنی تعداد مثلث‌های روی کره به اضافهٔ تعداد رأس‌ها همیشه ۲ تا بیشتر از تعداد ضلع‌هاست.

آرش با هیجان گفت: خوب؛ این خیلی خوب است! با استفاده از همین روش تحقیق کنید؛ شاید نتیجه دهد که سرزمین شما کره نیست.

خی: مشکل اینجاست که اولین مرحله تقسیم سیاره به تعداد زیادی مثلث است و برای این‌که مطمئن باشیم که یک ناحیه مثلث است باید به اندازهٔ کافی کوچک باشد تا بشود فهمید که داخل آن روی سیاره هست یا نه. مثلاً، این سه نقطه روی استوانه را در نظر بگیر که با این سه خط به‌هم وصل شده‌اند، این مثلث نیست، چون ناحیه‌ای را احاطه نکرده است. در واقع، منظورمان از یک مثلث، سه رأس، سه ضلع و ناحیهٔ درون آن است.



به این ترتیب باید تعداد خیلی زیادی مثلث کشیده شود و بعد، بررسی این که این‌ها این خاصیت‌های مورد نظر مرا داشته باشند نیاز به دقت زیاد و روشی مؤثر دارد. تازه، شمردن ناحیه‌ها، رأس‌ها و پاره‌خط‌ها هم خودش کار دشواری است. اینها خیلی هزینه‌بردار است و در نهایت هم ممکن است نتیجه‌ای ندهد و عدد ۲ به‌دست آید. آه! چای شما یخ کرد. خیلی عذر می‌خواهم . . .

آرش: خواهش می‌کنم؛ اصلا مهم نیست. حرف‌های شما خیلی دلچسب‌تر از یک قوری چای داغ است!

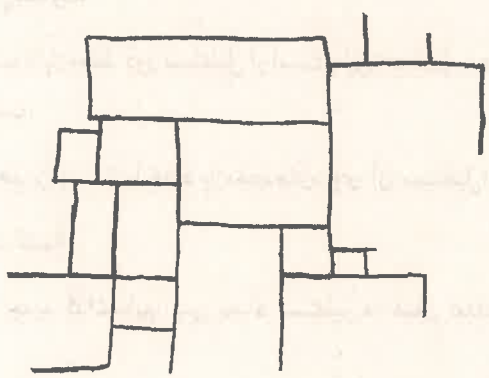
آرش و خی صبحانه را تمام کردند و با هم به پژوهشکدهٔ علوم پایه، محل کار خی، رفتند.

آرش در راه گفت: اگر یک جوری از مستطیل‌ها به‌جای مثلث‌ها استفاده می‌کردیم و این شرط یک ضلع مشترک را یک جوری برای مستطیل‌هایی که گاهی در قسمتی از یک ضلع مشترک هستند ضعیف می‌کردیم، می‌شد از این نکته که شما سرزمینتان را به تعداد زیادی مستطیل تقسیم کرده‌اید استفاده کرد.

خی: بله؛ این فکر خوبی است. خیلی جالب است. این جریان مستطیل‌بندی شدن سیارهٔ ما آن‌قدر برای خود ما عادی شده است که اصلاً به فکر آن هم نیفتادم؛ ولی ظاهراً فکر شما را خیلی اشغال کرده است که این‌قدر زود این ایده به ذهنتان رسید.

آرش: آخر، اگر واقعیت را بخواهید، چیزی که باعث شده من نسبت به کره بودن سیارهٔ شما شک کنم، احساسی بود که نسبت به این مستطیل‌بندی داشتم. یک حس مبهم به من می‌گوید که این کار روی کره امکان ندارد و فکر می‌کنم اگر شرایط واقعاً آن طور باشد که ما فکر می‌کنیم، برای نشان دادن اینکه شما روی کره زندگی نمی‌کنید استفاده از وجود این مستطیل‌ها یک نکتهٔ اساسی است.

وارد اتاق کار خی شدند. یک تخته سیاه روبه‌روی آنها روی دیوار نصب شده بود و یک میز تحریر در طرف دیگر اتاق قرار داشت، چندتا صندلی هم به‌طور نامنظم این طرف و آن طرف. روی هم رفته می‌شد گفت که اتاق زیاد مرتب نبود. در گوشهٔ دیگر اتاق، یک قفسه کتاب بود که شاید در حدود ۵۰ جلد کتاب را در خود جای داده بود. بلافاصله بعد از ورود، هر دو رفتند کنار تخته سیاه و آرش شکلی روی تخته کشید.



آرش: علاوه بر چهار رأسی که هر مستطیل دارد، لازم نیست نقطهٔ دیگری را در نظر بگیریم؟

خی: خوب؛ این‌جا هر جا یک گوشه داریم، چند تا خط به‌هم رسیده‌اند و نقطه‌ای وجود دارد. به نظر می‌رسد همان گوشه‌های مستطیل‌ها کافی باشند.

آرش: ولی از طرف دیگر، روی یک مستطیل خاص که نگاه کنیم، نقاطی هم هستند که رأس‌های آن مستطیل نیستند ولی ما این‌جا آنها را مشخص کرده‌ایم.

خی: یک ایده! هر مستطیل را به چند مثلث تقسیم کنیم.

آرش: برای این‌که کار مرتب‌تر باشد، پیشنهاد می‌کنم که درون هر مستطیل یک رأس اضافه کنیم و بعد آن را به تمام نقاطی که روی محیط مستطیل هستند وصل کنیم؛ به این ترتیب هر مستطیل به تعداد زیادی مثلث تقسیم خواهد شد و بنابراین کل سطح سیارهٔ شما هم به مثلث‌ها تقسیم می‌شود.

خی: خوب؛ بیا حالا فکر کنیم که چه راه عملی‌ای برای حل مسأله وجود دارد.

آرش: شما در هر مستطیل یک ساکن دارید و می‌توانید از او بخواهید که تعداد پاره‌خط‌هایی که دورتادور سرزمین او هستند بشمارد. حالا باید ببینیم که این عددها چه ربطی به تعداد واقعی پاره خط‌ها دارند.

خی: تعدادی پاره‌خط روی مستطیل‌ها داریم که در واقع همان پاره‌خط‌های قدیمی‌مان هستند و تعدادی هم پاره‌خط جدید که داخل مستطیل‌ها کشیده شده‌اند.

آرش: تعداد رأس‌های دور تا دور یک مستطیل همان تعداد پاره‌خط‌های دور تا دور مستطیل است؛ پس پاره‌خط‌های جدیدی که درون مستطیل کشیده شده‌اند را می‌شود حساب کرد: به‌ازای هر نقطه روی مستطیل، یک پاره‌خط جدید کشیده‌ایم و چون نقطه‌ها و پاره‌خط‌های دور تا دور یک مستطیل با هم برابرند، تعداد پاره‌خط‌های جدید داخل یک مستطیل برابر است با تعداد پاره‌خط‌های روی آن مستطیل.

خی: خوب؛ حالا باید برای حساب کردن پاره‌خط‌های قدیمی فکری بکنیم.

آرش: پاره‌خط‌های قدیمی هم که جمع تعداد پاره‌خط‌های دور هر مستطیل هستند.

خی: نه! نه! اشتباه نکن! اگر ما به هر کس بگوییم که تعداد پاره‌خط‌های دور مستطیلش را به ما بگوید، چیزی که به عنوان مجموع این اعداد به‌دست می‌آوریم بیشتر از تعداد واقعی اضلاع است؛ چون هر ضلع را ممکن است چند نفر شمرده باشند.

آرش: راست می‌گویی؛ ولی ... ولی ما می‌توانیم بگوییم هر کدام از پاره‌خط‌های قدیمی را چند نفر شمرده‌اند؟

خی: خوب ... فکر کنم که ... می‌شود! بله! برای هر پاره‌خط دو نفر هستند که این پاره‌خط بین مستطیل‌های آنها مشترک است. پس هر پاره‌خط را دقیقاً دو نفر می‌شمارند.

آرش: پس اگر از هر نفر بپرسیم که چند تا پاره‌خط دور مستطیل او است و این اعداد را با هم جمع کنیم و a بنامیم، تعداد پاره‌خط‌های جدید a و تعداد پاره‌خط‌های قدیمی $\frac{a}{2}$ است.

خی: تعداد مثلث‌ها در هر مستطیل هم برابر است با تعداد پاره‌خط‌های روی آن مستطیل؛ پس تعداد کل مثلث‌ها هم برابر است با a.

آرش: تعداد رأس‌ها را چه‌طور حساب کنیم؟

خی: درون هر مستطیل، یک رأس جدید گذاشته‌ایم؛ پس تعداد مستطیل‌ها همان تعداد رأس‌های جدید است. فقط باید برای رأس‌های قدیمی یک فکری بکنیم.

آرش گفت: اگر بخواهیم تعداد رأس‌های دور هر مستطیل را با هم جمع کنیم، معلوم نیست که هر رأسی چند بار شمرده شده است: بعضی دو بار و بعضی سه بار شمرده خواهند شد!

خی: نمی‌دانم که چه کاری می‌شود کرد. شاید بهتر باشد که پیش رئیس برویم. یکی از دوستان مشترک من و رئیس، سای[1]، هم الان باید همراه رئیس باشد. او در ریاضیات واردتر است و فکر کنم بتواند کمک کند.

ده دقیقه بعد آقای خی و آرش در دفتر رییس بودند. همان طور که آقای خی گفته‌بود آقای سای نیز آنجا بود. ریش پرپشت و جوگندمی آقای سای از او قیافه‌ای دوست‌داشتنی ساخته بود. به نظر چهل‌ساله می‌رسید و از همه جالب‌تر لباس او بود که روی آن تعداد زیادی از رقم‌های عدد π نوشته شده بود. آرش با خودش فکر کرد از کجا معلوم این ارقام واقعاً درست باشد؟ کافی است تا ده رقم یا حتی پنج رقم اول درست باشد و بقیه ارقام الکی نوشته شده باشند. چه کسی حوصله دارد که درستی آن‌ها را بررسی کند؟!

---

۱) حرف یونانی ψ

بعد از این که رئیس، آقای سای و آرش را به‌هم معرفی کرد، آقای خی با دقت حاصل بحث‌های قبلی و مشکلی را که در مورد محاسبهٔ تعداد ناحیه‌ها، ضلع‌ها و رأس‌ها داشتند را مطرح کرد و به این ترتیب آقای سای هم که باجدیت بحث را دنبال می‌کرد در جریان پیشرفت کارها قرار گرفت.

رئیس در نیمه‌های بحث از جمع خداحافظی کرد؛ چون نیم ساعت دیگر باید در کنفرانس «آب، صرفه‌جویی و امنیت ملی» سخن‌رانی می‌کرد. بنابراین انتهای سخنان آقای خی را از دست داد!

توضیحات آقای خی که تمام شد، ساعت تقریباً یک و نیم بود. آقای سای که گویی به‌طور ناگهانی متوجه این موضوع شده بود گفت: جذابیّت این مطالب باعث شد که متوجه گذشت زمان نباشیم مقداری از ظهر گذشته و قطعاً میهمان ما باید گرسنه باشد. شاید بهتر باشد به رستورانی که در این نزدیکی است برویم و حین صرف غذا در مورد محاسبه عملی اعداد مورد نظر بیشتر صحبت کنیم . . .

رستوران پیشنهادی آقای سای جای دلپذیری بود. غذای خوب و محیطی بزرگ و البته کمی شلوغ. از آنجا که یک مرکز تحقیقاتی علوم در نزدیکی رستوران قرار داشت، این سو و آن سو گروه‌های چند نفری از دانشمندان این مرکز ضمن خوردن ناهار مشغول بحث بر سر موضوعات مختلف بودند و شلوغی محیط رستوران هم بیشتر به همین خاطر بود. با این وجود، با شروع بحث، گویی سر و صدا کمتر احساس می‌شد.

آرش در حالی که با قاشق و چنگال با غذا بازی می‌کرد گفت: من گمان می‌کنم که ما باید به‌نوعی از یک حرکت همگانی استفاده کنیم؛ یعنی به عبارت دقیق‌تر از کمک همهٔ مردم سیارهٔ شما استفاده کنیم.

آقای خی که کمی هیجان زده شده بود، نصف لیوان نوشابه‌اش را سر کشید و گفت «خوب، در مورد تعداد زمین‌ها مشکلی نیست؛ می‌دانیم که تعداد ساکنین سیاره، که همان تعداد زمین‌هاست چه‌قدر است؛ ولی . . .» بعد از کمی مکث ادامه داد «ولی، بگذارید ببینم؛ اگر هر کسی تعداد رأس‌ها و ضلع‌های زمین خودش را، به همان معنی که گفتیم بشمارد چه اتفاقی می‌افتد؟»

آقای سای که از چند دقیقه قبل به فکر فرو رفته بود کمی مِن و مِن کرد و جواب داد «خوب، من خیلی با این کار به این شکلی که می‌گویید موافق نیستم. اما بگذارید من یک تغییر را پیشنهاد کنم . . .» آقای خی وسط حرف آقای سای پرید و گفت «چرا؟ . . . من فکر می‌کنم بشود درستش کرد! . . .»

آرش گفت: من در مورد تعداد ضلع‌ها ایده‌ای برای درست کردن این جور شمارش دارم؛ ولی در مورد تعداد رأس‌ها ـ منظورم کل رأس‌هاست ـ فکر می‌کنم اگر هرکس تعداد رأس‌های دور مستطیل خودش را بگوید، به نتیجه‌ای نرسیم و نتوانیم تعداد کل را حساب کنیم؛ چون هر رأس توسط چند نفر، ۳ یا ۴ نفر، شمرده می‌شود . . .

آقای سای گفت: نمی‌گذارید حرف بزنم که! شما به یک نکته توجه نمی‌کنید. در سیارهٔ ما هرکسی یک کُد ملی دارد و این کد هم برای آدم‌های مختلف، متفاوت است. ما می‌توانیم بگوییم که هر ضلع را فقط کسی بشمارد که کدش از بقیه کمتر است. منظورم کد ملی سرپرست خانواده است. همین کار را در مورد رأس‌ها هم می‌شود کرد.

این، بهترین پیشنهاد بود و به نظر می‌رسید که همه از این پیشنهاد خوششان آمده است.

بعد از چند لحظه، آرش گفت: پس باید از هرکسی دوتا عدد بپرسیم، یکی تعداد همسایه‌هایی که کد ملی آنها از او بیشتر است و دیگر تعداد رأس‌هایی در زمین او که کسی با کد ملی بیشتر از او در مجاورت آن رأس‌ها زندگی نمی‌کند.

آقای خی گفت: کمی پیچیده به نظر می‌رسد ولی عملی است و خرج زیادی هم ندارد؛ چون همه به شبکهٔ کامپیوتر متصل هستند و می‌توانند این اطلاعات را برای کامپیوتر مرکزی ما ارسال کنند و بررسی این اطلاعات هم کار سختی نیست.

همه با رضایت ناهار را تمام کردند و نزد رئیس رفتند. آقای سای که ایدهٔ کار، در واقع از جانب او مطرح شده‌بود، روش کار را برای رئیس توضیح داد. کمی طول کشید تا رئیس متوجه منظور آنها شود؛ ولی با استفاده از تخته سیاه اتاق رئیس و کمی توضیحات بیشتر از جانب آقای خی، رئیس کاملاً متوجه شد.

قرار شد که همان روز با چند نفر از متخصصین صحبت شود و دستورات لازم برای اجرای این پروژه، که حالا خیلی هم صعب و دشوار به‌نظر نمی‌رسید، انجام شود.

تا عصر آن روز عملیات اطلاع‌رسانی به مردم و توضیح کاری که هرکس باید انجام می‌داد تمام شده‌بود و تنها باید تا دو روز دیگر که نتایج اعلام می‌شد منتظر می‌ماندند.

عصر آن روز، این سه نفر، آرش، آقای خی و آقای سای، به پیشنهاد آقای سای، بار دیگر در دفتر کار او همدیگر را ملاقات کردند.

آقای سای گفت: همان‌طورکه احتمالاً شما هم احساس می‌کنید، هرچند که روش ما خوب به نظر می‌رسد، هیچ لزومی ندارد که از این روش نتیجه بگیریم. منظورم این است که اگر همهٔ محاسبات انجام شد و تعداد ناحیه ها به‌اضافهٔ تعداد رأس‌ها، ۲ تا بیشتر از تعداد ضلع‌ها بود، آیا واقعاً ما روی یک کره زندگی می‌کنیم؟ یا باز هم احتمال دارد سیارهٔ ما چیز دیگری باشد؟

آرش گفت: یعنی به عبارت دیگر . . . ما داریم می‌پرسیم که آیا ممکن است کار ما فقط وقت مردم را تلف کرده باشد؟ خوب، من فکر می‌کنم که این‌طور نیست و حداقل اطلاعات بیشتری در مورد جایی که زندگی می‌کنیم، یعنی جایی که شما زندگی می‌کنید، به دست خواهیم آورد. حداقل مطمئن می‌شویم که این خاصیت برقرار است؛ منظورم این است که عدد خی سیارهٔ تویاپ ۲ است.

آقای خی که منظور آرش از عدد خی را فهمیده بود کمی خجالت کشید، و البته این احساس تا حدودی با خوشحالی همراه بود. در همین حال، آقای سای گفت «خوب، این عدد خی هم اصطلاح جالبی است، خیلی از کارها را راحت می‌کند. گفتن آن‌همه کلمهٔ پشت سر هم کار سختی بود!» بعد ادامه داد «به هر حال، من شخصاً با چنین چیزی زیاد راضی نمی‌شوم و دوست دارم که دقیق‌تر این مسأله را بررسی کنم.»

آرش که از اصطلاح خودش خوشش آمده بود گفت: برای این که کارمان کمی راحت‌تر شود، با همان مثلث‌ها که ایدهٔ اصلی تعریف عدد خی هستند شروع می‌کنیم. موجودات مورد نظر ما، از تعدادی مثلث درست شده‌اند که هر دو مثلث یا یک ضلع مشترک دارند و یا یک رأس مشترک و یا از هم جدا هستند و عدد خی برای چنین چیزی همان است که می‌دانیم.

آقای سای گفت: پس باید اول موجوداتی را بشناسیم که می‌توان آنها را به تعدادی مثلث تقسیم کرد. چه‌طور است کار را بر عکس انجام دهیم؛ یعنی ببینیم با تعدادی مثلث چه چیزهایی می‌شود ساخت؛ یا، دقیق‌تر بگویم، سطح چه سیاره‌هایی را می‌شود ساخت.

آقای خی گفت: من فکر می‌کنم این ایدهٔ شما را این‌طور تغییر بدهیم: ما یک سیاره، یا سطح یک سیاره را به تعدادی مثلث تقسیم کرده‌ایم. حالا بیایید همهٔ مثلث‌ها را از هم جدا کنیم ولی روی هر دو تا مثلث که از هم جدا می‌کنیم، علامت بگذاریم که آخر کار، بتوانیم آنها را از همان‌جا به هم بچسبانیم و ببینیم چه چیزی به‌دست می‌آید.

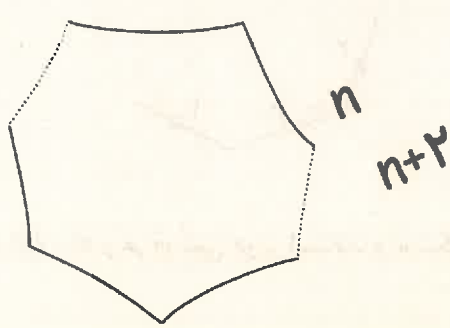
آرش گفت: به نظر نمی‌رسد که این کار مفید باشد: ما داریم یک راه را می‌رویم و برمی‌گردیم و بعید است که چیزی در این رفت و برگشت به‌دست آوریم.

برای مدتی همه ساکت شدند و بعد، آقای سای در حالی که با ناخن پیشانی‌اش را می‌خاراند، گفت: من خیلی با این حرف شما موافق نیستم. فکر می‌کنم اگر دقت کنیم چیزهایی به‌دست می‌آید. ما به دنبال یک الگوی منظم هستیم که به نوعی همهٔ این موجودات را دسته‌بندی کند. در روشی که آقای خی پیشنهاد کرد، ما اول بدون هیچ نظمی قطعات مثلثی شکل را از هم جدا می‌کنیم، ولی بعد می‌توانیم طبق قاعده‌ای پیش برویم که چسباندن‌ها را منظم‌تر انجام دهیم.

آرش کمی به فکر فرو رفت. برای مدتی هر سه نفر فقط فکر می‌کردند. بعد آرش گچ را برداشت، روی تخته تعدادی مثلث کشید و گفت: من این روش را برای چسباندن دوبارهٔ مثلث‌ها پیشنهاد می‌کنم. یک مثلث دلخواه را برمی‌دارم. حالا یکی دیگر از مثلث‌ها وجود دارد که قبلاً به این مثلث چسبیده بود، یعنی به عبارت دیگر این دو تا با هم مجاور بوده‌اند. ممکن است چند تا از این مثلث ها موجود باشد، در واقع ۳ تا هست! من یکی را به دلخواه برمی‌دارم و این دو تا را به هم می‌چسبانم و یک چهار ضلعی به‌دست می آید. حالا این چهار ضلع روی لبه را در نظر بگیرید، باز مثلثی هست که یکی از ضلع‌هایش به یکی از این ضلع‌های لبه‌ای چسبیده بوده‌است. اگر چندتا مثلث با این خاصیت بود، یکی را انتخاب می‌کنم، می‌چسبانم و این کار را ادامه می‌دهم.

آقای خی گفت: دو مشکل ممکن است پیش بیاید. اول این که اگر بعد از مدتی به شکلی رسیدید که دیگر نمی‌شد مثلثی را به آن چسباند چه می‌کنید؟ متوقف خواهید شد؟ تازه، اگر یک مثلث داشتید که امکان چسباندن دو یا سه ضلع از آن به مرز وجود داشت، آیا فقط یک ضلع را می‌چسبانید یا دو تا را یا هر سه را؟ البته این دومی زیاد مهم نیست.

آرش به فکر فرو رفت. او هم به مسأله اول فکر می‌کرد. آقای سای گفت: «اتفاق اول پیش نمی‌آید، علت آن هم این است که فرض کنید در مرحله‌ای، مثلاً مرحلهٔ n ام، دیگر نتوانیم چیزی را به لبه بچسبانیم، و فرض کنید که در هر مرحله، حتی اگر امکان چسباندن بیش از یک ضلع به لبه وجود داشت، فقط یک ضلع را چسبانیده باشیم. پس در مرحلهٔ اول، لبه سه ضلع دارد، در مرحلهٔ دوم چهار ضلع و در مرحلهٔ n ام ... $n+2$ ضلع روی لبه داریم.» در این هنگام آقای سای شکل زیر را روی تخته کشید.



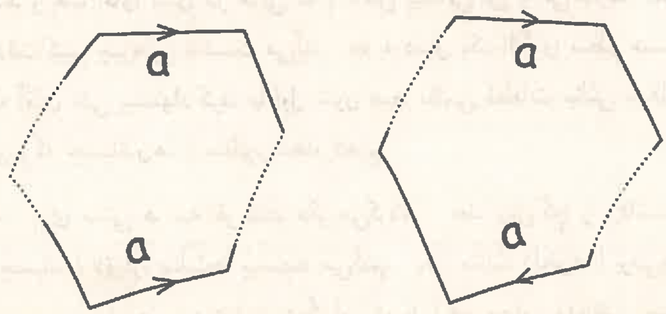
«هر ضلع لبه، قبلاً ضلع مشترک دو مثلث بوده و علامت روی آن این را نشان می‌دهد. پس در واقع از هر علامت دو تا وجود دارد. اگر برای هر علامت روی لبه، علامت دوم آن هم روی لبه باشد، چیزهایی که تا حالا به هم چسبانیده‌ایم به هیچ ترتیبی به بقیهٔ قسمت‌ها وصل نمی‌شوند و این با یک‌پارچه بودن سطح سیاره منافات دارد.»

حرف‌های آقای سای در هم به‌نظر می‌رسید و خیلی منسجم نبود؛ ولی بعد از مدتی که آرش و آقای خی به موضوع فکر کردند قانع شدند که حق با آقای سای است.

آقای خی گفت: پس، با توجه به حرف‌های شما، اگر امکان چسباندن دو ضلع از مثلث وجود داشت، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و می‌چسبانیم.

آرش با سر تأیید کرد و گفت: به این ترتیب، در آخر کار همهٔ مثلث‌ها به‌هم می‌چسبند و یک چندضلعی درست می‌کنند که علامت‌های روی اضلاع آن نشان می‌دهد که کدام ضلع باید به کدام ضلع بچسبد.

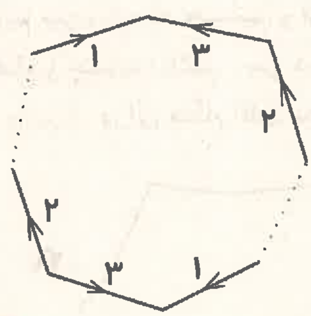
آقای سای گفت «البته جهت چسباندن هم مهم است، مثلاً این دو چندضلعی را در نظر بگیرید ...» و شکل زیر را کشید.



سپس ادامه داد: اگر قرار باشد دو تا a به هم بچسبند، واقعاً مهم است که دو فلش شکل اول روی هم قرار بگیرند یا دو فلش شکل دوم. یعنی الگوی چسباندن اهمیت دارد.

آقای خی عمیقاً به فکر فرو رفته بود.

در این حال آرش جلوی تخته سیاه رفت و گفت «پس ما باید وضعیت $2n$ ضلعی‌هایی را مشخص کنیم که عددهای ۱ و ۲ و ۳ تا n روی ضلع‌های آن قرار دارد، از هر عدد دو تا و روی هر ضلع هم یک فلش داریم و دو تا ضلع با یک عدد باید از روی فلش‌ها به هم بچسبند.» و روی تخته، یک چند ضلعی کشید.



آقای سای به علامت رضایت سرش را تکان داد و هر دو کمی دورتر ایستادند و به شکل روی تخته سیاه خیره شدند.

ادامه دارد ...

راه‌کارهای حل مسأله

جواد حاجی‌بابایی

راه‌کارهای حل مسأله بخشی ویژه در ماهنامه است که در شماره‌های قبل با توجه به کتاب جدید درسی سال‌های اول و دوم دبیرستان (آموزش هنر حل مسأله) شکل گرفت و با درج مطالبی بر اساس این کتاب، سعی در ارایهٔ زمینهٔ لازم برای معرفی کتاب شد. در این شماره، ادامهٔ مطلب شمارهٔ پیش آمده است: آموزش هنر حل مسأله، یاددهی — یادگیری ریاضی از نوعی دیگر: راه‌کارهای درست فهمیدن مسأله.

یاد ایام!

«زمانی را به یاد دارم که دانشجو بودم؛ آن هم دانشجویی بلندپرواز و مشتاق دست یافتن به مقداری درک و فهم ریاضی و فیزیک. به درس‌ها، بحث‌ها و سخنرانی‌ها به دقت گوش می‌کردم و راه‌حل‌ها و حقایقی که ارایه می‌شد را به‌خاطر می‌سپردم؛ ولی مطلبی بود که همواره مایهٔ ناراحتی و پریشان خاطری من می‌شد. هر زمان که با ریاضی سر و کار داشتم، ذهنم درگیر سؤال‌ها و موقعیت‌هایی می‌شد که آزارم می‌داد. موقعیت‌ها و سؤال‌ها این گونه بودند:

- آری، چنان می‌نماید که راه‌حل درست است و کار می‌کند؛ اما چگونه باید چنین راه‌حلی را ابداع کرد؟
- آری، این آزمایش ظاهراً درست است و کار می‌کند (آزمایشگاه فیزیک) و چنان به نظر می‌رسد که یک واقعیت است، اما مردمان چگونه می‌توانند این واقعیت را کشف کنند؟

مهم‌تر از همهٔ این‌گونه سؤال‌ها، چیزی که مرا آرام نمی‌گذاشت این بود که من، «خودم»،

- چگونه می‌توانم این راه‌حل‌ها را اختراع و ابداع کنم؟
- چگونه می‌توانم واقعیت‌ها و حقایق را کشف کنم؟

اکنون که معلم ریاضیات در دانشگاه هستم، چنان می‌اندیشم یا امید دارم که شاگردان کنج‌کاوتر و مشتاق‌تر از آن دوران من، چنین پرسش‌هایی را از من بپرسند تا تلاش کنم اسباب خرسندی و خشنودی حس کنج‌کاوی آنان را فراهم کنم!»

ایست! اکنون نوبت شماست.

مسأله ۱. *متن بالا را با دقت بخوانید.*

۱) آیا چنین کنج‌کاوی‌هایی برای شما هم پیش آمده است؟ آیا چنین سؤال‌هایی در دوران تحصیل برایتان به وجود آمده است؟ سؤال‌های دیگر چه‌طور؟

۲) آیا فکر می‌کنید این نوع کنج‌کاوی‌ها مهم است؟ این گونه پرسش‌ها چطور؟

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۳۱—۲۵

۳) *آیا روش یادگیری این معلم ریاضی روش خوبی بوده‌است؟*

هرگونه احساس، نظر یا انتقادی در مورد هر بخش از متن بالا دارید با جزئیات کامل برای ما بنویسید. به طورکلی، هر چیزی که در جریان برخوردتان با این مسأله پیش می‌آید بیان کنید.

در شمارهٔ قبلی مجله، مقاله‌ای در همین زمینه (یاددهی ـ یادگیری ریاضی از نوعی دیگر) وجود داشت. آیا آن را مطالعه کرده‌اید؟ در آن مقاله اصول راهنمای مهمی بیان شده‌است. اگر آن را مطالعه نکرده‌اید این بحث را ادامه ندهید. اول آن را مطالعه کنید و سپس این مسأله را بررسی کنید و با همان روش برای ما بنویسید. یادتان باشد می‌خواهیم چنان جریان فکری خود را برای ما شرح دهید که ما از نوشته‌های شما دو چیز به‌دست بیاوریم:

۱) صدای اندیشیدن شما را بشنویم؛

۲) جریان اندیشیدن شما را مانند یک فیلم تماشا کنیم.

در این صورت، می‌توانیم به شما کمک کنیم تا در حل کردن مسایل به مهارت برسید و توانایی فکری شما رشد یافته، شکوفا شود.

پیش به سوی سؤال‌های اساسی

اجازه دهید به موضوع اصلی بپردازیم. مطلب آغازین، تنظیم و بازنویسی جدیدی از محتوای سخنان [شاید] باهوش‌ترین معلم قرن بیستم است! او ریاضی‌دان مجارستانی جورج پولیا است. دیدگاه‌های او در چگونگی کشف ریاضی و به‌طورکلی یاددهی ـ یادگیری ریاضی امروز سرمشق معلمان ریاضی دنیاست. دو سؤال «چگونه راه‌حل‌ها ابداع می‌شوند؟» و «چگونه واقعیت‌ها و حقایق کشف می‌شوند؟» بسیار اساسی هستند و مسیر و راه یادگیری ریاضی را آشکار می‌سازند. این سؤال‌ها، انگیزه‌ای شدند تا پولیا بخش مهمی از تجربیات، دیدگاه‌ها و نظریاتش را درکتابی به نام «چگونه مسأله را حل کنیم؟» به معلمان ریاضی عرضه کند.

راستی چگونه یک مسألهٔ ریاضی حل می‌شود؟ چه تفاوت‌هایی بین آنها که یک مسأله را حل می‌کنند و آنان که نمی‌توانند حل کنند وجود دارد؟ کسی که مسأله را حل می‌کند چه فعالیت‌های فکری‌ای انجام می‌دهد؟ چه کارهایی می‌کند؟ آنانی که نمی‌توانند مسأله‌ای را حل کنند چه فعالیت‌های فکری انجام می‌دهند؟ یا حتی یک فرد چرا در حل بعضی مسأله‌ها موفق است و در حل بعضی دیگر شکست می‌خورد؟

مسأله ۲. *دربارهٔ پرسش‌های بالا فکرکنید، به تجربیات خودتان در دوران تحصیل مراجعه کنید و آن‌چه که به عنوان دلیل یا پاسخ به‌نظرتان می‌رسد برای ما بنویسید.*

شاید شما ارزش این مسأله را ندانید و فکر کنید که پاسخ‌های شما اهمیتی ندارد؛ اما ما، بر اساس پاسخ‌هایی که می‌دهید، می‌توانیم چیزهای زیادی از چگونگی اندیشیدن شما هنگام درگیری با یک مسأله حدس بزنیم. هرچه آگاهی ما از چگونگی فعالیت فکری شما در جریان حل مسأله بیشتر شود، بهتر می‌توانیم شما را راهنمایی کنیم.

پرسش‌هایی که تا کنون طرح شده‌اند چندان آسان نیستند. شاید کسی خیال کند که این‌ها پرسش‌هایی بدیهی و ساده هستند؛ در پاسخ، یادآور می‌شویم که این پرسش‌ها از دوران باستان و عهد عتیق مطرح بوده‌اند. دست کم می‌دانیم که در حدود دو هزار و سیصد سال پیش، حکیمانی چون سقراط، افلاطون و ارسطو به این گونه سؤال‌ها پرداخته‌اند و نظریاتی ارایه کرده‌اند. با این‌که تا کنون پژوهش‌های وسیعی به وسیلهٔ دانشمندان و روان‌شناسان انجام گرفته‌است و نتایج با ارزشی به‌دست آمده، هنوز هیچ پاسخ روشن و قاطعی برای این‌گونه

پرسش‌ها وجود ندارد. به عنوان یک اشاره می‌توان گفت که چگونگی فعالیت ذهن آدمی پیچیده‌تر از آن است که به تصور درآید. شاید هیچ وقت نتوان آن را به‌طور کامل شناخت:

اسرار ازل را نه تو دانی و نه من   این خط معما نه تو خوانی و نه من

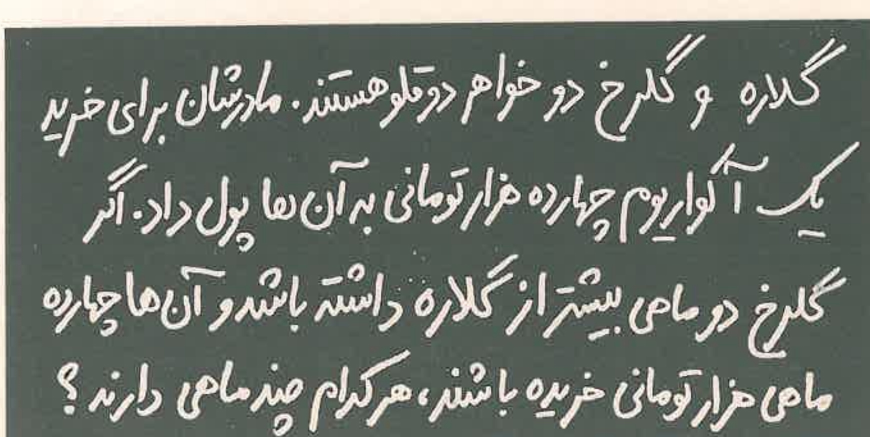
در واقع، این پرسش‌ها بسیار کلی هستند و برای نزدیک شدن به آن، یک راه‌کار این است که پرسش‌هایی ظریف‌تر و جزئی‌تر مطرح کنیم و آنها را مورد بررسی قرار دهیم. در این راستا، می‌خواهیم به صحنهٔ عمل و انجام دادن ریاضی نزدیک‌تر شویم و ببینیم با چه پرسش‌هایی روبه‌رو می‌شویم. یکی از پرسش‌های جزئی‌تر در صحنهٔ عمل، این است که «هنگامی که با یک مسأله روبه‌رو می‌شویم و می‌خواهیم برای حل آن یورش ببریم، اولین کارهایی که انجام می‌دهیم چیست؟ اولین چیزهایی که به ذهن ما می‌رسد چیست؟ اولین تلاش‌های فکری و ذهنی ما چیست؟ آیا همه یک جور عمل می‌کنیم؟ وقتی مسأله‌ای در یک کلاس درس مطرح می‌شود همهٔ دانش‌آموزان فعالیت‌های فکری یکسان دارند یا متفاوت هستند؟ آیا دانش‌آموزان ایرانی، چینی و برزیلی پایهٔ پنجم ابتدایی وقتی با یک مسألهٔ یکسان روبه‌رو شوند تلاش فکری یکسان و مشابه خواهند داشت؟ ...»

مسأله ۳. *پرسش‌هایی که در پاراگراف پیش مطرح شدند را در نظر بگیرید و فرض کنید خودتان با یک مسأله روبه‌رو شده‌اید و قصد دارید آن را حل کنید. تجربیات خودتان از ابتدا تا کنون را در نظر گرفته و مورد بررسی قرار دهید و سپس با جزئیات کامل عملکرد ذهنی و فکری خودتان را برای ما بنویسید.*

نفهمیدن مسأله همان، اشتباه حل کردن یا حل نکردن همان!

اجازه دهید کمی غیر معمول شروع کنیم (البته این کار در روش ما غیر معمول نیست؛ چون معتقدیم از سال‌های اولیهٔ یادگیری حتی پیش از دبستان، شکل‌گیری شخصیت فکری فرد شروع می‌شود و در چگونگی فکر کردن و یادگیری او تأثیر گذار است). تصور کنید که مکان، کلاس درس ریاضی پایهٔ سوم ابتدایی و هنگام حل کردن تمرین و مسأله‌ها است!

معلم یک مسألهٔ نه چندان سرراست را روی تابلوی کلاس می‌نویسد و از دانش‌آموزان می‌خواهد که آن را حل کنند.



دانش‌آموزان با مسأله درگیر شدند و پس از گذشت زمانی بعضی از دانش آموزان دست خود را به علامت حل کردن مسأله بالا بردند.

معلم: منصور، بگو ببینم برای حل‌کردن چه‌کار باید بکنیم؟

منصور: آقا اجازه، جمع می‌کنیم!

معلم: کدام‌ها را با هم جمع می‌کنیم؟ اصلاً چرا جمع؟

منصور: آآ...قا! منها می‌کنیم!

معلم: چرا منها می‌کنیم؟

منصور: آقا ضرب می‌کنیم!

معلم: چه عددی را در چه عددی ضرب می‌کنیم؟

منصور: آقا هزار را در ۱۴ ضرب می‌کنیم!

⋮

این تجربه و گفت و گوی شاگرد و معلم، نمونه‌ای از هزاران مورد مشابه است که در کلاس‌های درس ریاضی مدرسه رخ می‌دهد. شاید شما هم با این‌گونه تجربه‌ها در کلاس درس روبه‌رو شده باشید. فکر می‌کنید علت چیست؟ چرا پاسخ‌ها چنین است؟ آیا می‌توانید حدس بزنید در ذهن این‌گونه دانش‌آموزان چه می‌گذرد؟ در ذهنشان چه برداشت و درک و فهمی از مسأله ایجاد شده‌است؟ چه عواملی باعث می‌شود یک دانش آموز این قدر ناموفق عمل کند؟

تحقیقات و تجربیات نشان می‌دهند که این‌گونه دانش‌آموزان، درک درستی از مسأله ندارند و در فهمیدن مسأله با مشکل مواجه هستند. ممکن است یکی از شما که از زیرکی و دقت نظر خوبی برخوردار است، بگوید «موافق شما نیستم و نظر دیگری دارم.» و ادامه دهد «من معتقدم مشکل اصلی این‌گونه دانش‌آموزان، عدم درک صحیح مفهوم جمع، ضرب و تفریق است.» دانش‌آموزی که چنین دلیلی را بیان می‌کند شایستهٔ تحسین می‌دانیم و یقین داریم که دانش‌آموزان، با بررسی تجربیات خودشان در مدرسه، می‌توانند دلیل‌هایی هوشمندانه ارایه کنند. در واقع، دلیل‌های این‌گونه بدفهمی‌ها در انجام «گفت و گوی معلم و شاگرد» می‌توانند گوناگون باشند.

مسأله ۴. *تجربیات دوران مدرسهٔ خود را به یاد آورید و سپس به این سؤال بپردازید: «چه عواملی باعث می‌شود این‌گونه بدفهمی‌ها در کار ریاضی دانش‌آموزان بروز کند؟» آیا با این نظر موافقید که «نتیجهٔ عوامل درگیر در پیدایش این‌گونه بدفهمی‌ها این است که دانش‌آموز نتوانسته درک درست و کاملی از مسأله به‌دست آورد.»*

بحث کلاس سوم ابتدایی به صورت زیر ادامه یافت (هنوز تعدادی از شاگردان دست‌هایشان بالا بود و داوطلب حل این مسأله بودند):

معلم: آرش، راه‌حل تو چگونه است؟

آرش: آقا هرکدام ۷ ماهی در آکواریوم رها کرده‌اند!

معلم: چه طوری عدد هفت را به‌دست آوردی؟

آرش: ۱۴ تا ماهی را نصف کردم، سهم هر کدام ۷ تا شد!

معلم: چرا نصف کردی؟

آرش: برای این که در صورت مسأله گفته شده که گِلاره و گُلرخ دو قلو هستند، پس باید تعداد ماهی‌هایشان هم مساوی باشد.

معلم: چرا؟

آرش: برای این که بابا و مامان دو قلوها فرقی بین آنها نمی‌گذارند و به یک اندازه به هر کدام پول می‌دهند! کیف‌هایشان هم مثل هم است، لباس‌ها، کفش‌ها و ....

معلم که کاملاً حیران مانده بود سراغ داوطلب بعدی رفت.

معلم: سینا، تو بگو ببینم چه کار کردی؟

سینا: آقا جواب هزار تومان می‌شود!

معلم با تعجب پرسید: چه‌طوری حساب کردی؟

سینا: پول آکواریم چهارده هزار تومان است و ۱۴ تا ماهی داخل آن انداخته‌اند. تقسیم کنیم هزار می‌شود!

شاید اکنون با ما موافق باشید که آرش و سینا هر دو در فهمیدن مسأله مشکل دارند. نفهمیدن مسأله همان و اشتباه حل کردن (و یا حل نکردن) همان! بی‌دلیل نیست که می‌گویند «فهمیدن مسأله برابر نصف حل مسأله است».

مسأله ۵. در مورد فرآیند فکری آرش و سینا چه حدسی می‌زنید؟ چرا چنین بدفهمی‌هایی داشته‌اند؟ چه کارها و آموزش‌هایی می‌تواند جلوی این‌گونه بدفهمی‌ها را بگیرد؟ چه روش‌ها و مهارت‌هایی به درست فهمیدن مسأله کمک می‌کنند؟

مسأله ۶. اگر دانش‌آموز کلاس سوم ابتدایی در حل این مسأله مشکل داشته باشد، شما چگونه این مسأله را برای او حل می‌کنید؟ یادتان باشد هنوز معادله یا دستگاه معادله نخوانده‌اند! فکر می‌کنید از چه روش‌هایی باید استفاده کرد تا او حل این مسأله را واقعاً درک کند؟ روش‌های پیشنهادی خود را با توضیحات کامل بنویسید. اگر خواهر، برادر یا یکی از بچه‌های فامیل یا همسایه‌تان در کلاس سوم درس می‌خواند و امکان تجربه کردن دارید، این مسأله را مطرح کنید و سعی کنید همهٔ تجربه‌تان را گزارش کنید.

مسأله۷. نیما مسأله را به صورت زیر حل کرد. او گفت

> اگر تعداد مساوی ماهی داشتند، سهم هر یک ۷ ماهی بود (۱۴ را دو قسمت می‌کنیم). چون طبق صورت مسأله گُلرُخ ۲ ماهی بیشتر از گلاره دارد، پس ۲ تا از سهم گلاره برمی‌داریم و به گُلرُخ اضافه می‌کنیم؛ پس ۵ = ۲ − ۷ ماهی سهم گلاره است و ۹ = ۲ + ۷ ماهی سهم گلرخ.

دربارهٔ راه‌حل نیما بحث کنید. در مورد فرآیند فکری نیما چه می‌توان گفت؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که نیما صورت مسأله را بسیار خوب فهمیده است؟

شاید تا این مرحله از بحث این سؤال برایتان مطرح شده باشد که: ما دانش‌آموزان دبیرستانی هستیم؛ چرا مثال از دوران اولیهٔ دبستان انتخاب شده است؟ پیش از این یک دلیل ارایه کرده‌ایم؛ با این حال، نمی‌خواهیم تا پایان این بحث پاسخ نهایی ارایه کنیم؛ زیرا ممکن است در جریان بحث به پاسخ قانع کننده برسید! فقط این نکته را یادآوری می‌کنیم که اگر چه مثال دبستانی است، «بحث‌ها» برای دبیرستانی‌ها هم چندان هم سرراست نیست. در اینجا لازم می‌دانیم در ادامهٔ اصول راهنمایی که در مقالهٔ شماره قبل برای روش خودمان (یاددهی ـ یادگیری ریاضی از نوعی دیگر) بیان کردیم، اصل دیگری را اعلام کنیم:

> از دیدگاه روش ما، در ریاضیات، «دانستن» مساوی با «انجام دادن» است! گفتن یاددهی نیست و شنیدن هم یادگیری نیست؛ بنابراین یادگیرنده (دانش‌آموز) در روش ما محور جریان یاددهی ـ یادگیری است و اوست که انجام می‌دهد. ما سعی می‌کنیم فرصت‌هایی نظام‌دار و هدف‌مند با سؤال‌ها و مسأله‌های مناسب فراهم کنیم تا شما انجام دهید و بیاموزید. در واقع، در این مقاله، ما سهم بیشتر از این برای شما قایل هستیم و می‌خواهیم در همهٔ بحث‌ها دخالت کنید. هر چه سهم شما بیشتر باشد ما به هدف نزدیک‌تر خواهیم‌شد: هدف ما این است که همهٔ دانش توسط خود شما ساخته شود (دوباره ساخته، دوباره کشف شود)؛ شما باید حضور خودتان را باور کنید.

اکنون در شرایطی هستیم که می‌توانیم سؤال یا سؤال‌های اساسی این بحث را مطرح کنیم:

چه مهارت‌هایی برای فهمیدن درست و کامل مسأله لازم است؟ چه روش‌هایی به ما کمک می‌کند که مسأله را دقیق و درست بفهمیم؟ آیا راه‌کارهایی وجود دارند که در فهمیدن همه یا دستهٔ بزرگی از مسأله‌ها، کمک‌کننده باشند؟

پذیرفتن کجا، یقین داشتن کجا؟

راستش را بخواهید، ما کمی تردید داریم! شاید شما تا این‌جای بحث پذیرفته باشید که «فهمیدن مسأله بسیار مهم است». البته، در صورتی که با کنج‌کاوی و تجزیه و تحلیل فکری خودتان بحث را پی گرفته باشید و مهم‌تر این‌که همهٔ مسأله‌های این مقاله را تا این‌جا با دقت هر چه تمام‌تر بررسی کرده باشید، یکی از شک‌های ما برطرف شده‌است؛ یعنی قبول داریم که قبول دارید! اما شک دوم ما هم‌چنان پا برجاست؛ در حقیقت، تا انجام ندهید و تجربه نکنید به یقین نمی‌رسید. باید گوش‌زد کنیم که مرتبهٔ «یقین» خیلی بالاتر از مرحلهٔ «پذیرش» است: یک دنیا فرق است بین پذیرفتن و یقین داشتن! اگر یقین نداشته باشید که فهمیدن مسأله عامل بسیار اساسی‌ای برای مهارت در حل کردن مسأله است، به ارزش راه‌کارها و روش‌ها و توصیه‌های ما برای فهمیدن مسأله پی نخواهید برد و در این‌صورت زود است که بحث راه‌کارهای فهمیدن مسأله را شروع کنیم. تکلیف روشن است: زمان تجربه کردن شماست و مطالعهٔ ما! بعضی مسأله‌های بعدی فرصت‌هایی برای تجربه کردن شماست. شاید به یقین برسید!

مسأله ۸. راجع به بحث بالا نظرتان را بنویسید.

مسأله ۹. در امتحان پایان سال یک کلاس پنجم ابتدایی مسأله زیر داده شده بود.

> از یک پادگان آموزشی برای مراسم روز ارتش ۳۷۱ سرباز جهت انجام رژه به محل برگزاری مراسم اعزام شدند. سربازان به وسیلهٔ اتوبوس‌هایی به ظرفیت ۳۳ نفر به محل برگزاری منتقل شدند. تعیین کنید چند اتوبوس برای انجام این کار مورد استفاده قرار گرفته است.

بعضی از دانش‌آموزان این مسأله را حل نکرده بودند. بقیه دانش‌آموزان مسأله را به صورت زیر حل کرده بودند:

$$
\begin{array}{r|l}
۳۷۱ & ۳۳ \\
-\ ۳۳ & \overline{۱۱/۲۴} \\
\hline
۰۴۱ & \\
۳۳ & \\
\hline
۰۸۰ & \\
۶۶ & \\
\hline
۱۴۰ & \\
۱۳۲ & \\
\hline
۰۸ &
\end{array}
$$

دستهٔ کوچکی از آنهایی که این حل را انجام داده بودند نوشته بودند «۱۱/۲۴ تا اتوبوس لازم بوده است.»

عمل‌کرد دانش‌آموزان این کلاس را تجزیه و تحلیل کنید و در مورد درک و فهم دانش‌آموزان از این مسأله بحث کنید. آیا کسی از این دانش‌آموزان مسأله را دقیق فهمیده است؟ مشکل دانش‌آموزان کجاست؟

مسأله ۱۰. الف ـ چرا باید صورت یک مسأله ریاضی را با آهستگی و دقت خاصی خواند؟

ب ـ چرا بیش از یک بار خواندن صورت یک مسألهٔ ریاضی ایدهٔ خوبی است؟

آیا با این توصیه‌ها موافق هستید؟ هر نظری دارید همراه با دلیل بنویسید. مسأله‌های بعدی، شما را به مبارزه می‌طلبند. به آنها یورش ببرید و درک و فهم خودتان از صورت این مسأله‌ها را با «وسراس» (تأکید می‌کنیم؛ با «وسواس») زیاد شرح دهید. اگر توانستید، آن‌ها را حل کنید و با شیوهٔ ما تلاش خود را ارسال نمایید. به‌علاوه، پس از تلاش روی این مسأله‌ها، احساس خود را برای ما بنویسید. فراموش نکنید که بسیاری از اشتباهات ما در فهمیدن مسأله‌ها شبیه اشتباهات دوران دبستانمان است.

مسأله ۱۱. پرتقال فروش. پرتقال‌فروشی که ظاهراً ساده‌لوح به‌نظر می‌رسید، همسایهٔ جدید خود را ـ که اتفاقاً معلم ریاضی بود ـ به میهمانی شام دعوت کرد. پرتقال فروش و همسرش از همسایه و خانواده‌اش استقبال کردند. همسایه از پرتقال‌فروش پرسید: بچه‌هایتان کجا هستند؟ پرتقال‌فروش گفت: مشغول بازی هستند. همسایه پرسید: چند فرزند دارید و هر یک از آنها چند ساله هستند؟ پرتقال فروش با زیرکی جواب داد: سه پسر دارم که حاصل ضرب سن آن‌ها ۷۲ است و مجموع سن آنها با شمارهٔ خانه‌مان برابر است! همسایه که با مسأله‌ای غیر منتظره مواجه شده بود، فوراً به در خانهٔ پرتقال فروش رفت و شمارهٔ آن‌ها را نگاه کرد. آن‌گاه بازگشت و گفت: مسألهٔ مبهمی‌ست! پرتقال فروش گفت: ببخشید، حق با شماست. فراموش کردم بگویم بزرگ‌ترین پسرم به دوچرخه‌سواری خیلی علاقه دارد!

مسأله ۱۲. سرعت غیر مجاز. دو شهر تهران و کرج از دو مسیر متفاوت جادهٔ مخصوص و بزرگ‌راه کرج به هم متصل‌اند. اگر دو خودروی پلیس از این دو مسیر متفاوت از تهران به سمت کرج حرکت کنند، می‌توانند حرکت خود را چنان تنظیم کنند که همواره با بی‌سیم در تماس باشند. فرض کنید خودروی پلیس راداری دارد که بُرد آن با بُرد بی‌سیم خودرو برابر است و این رادار می تواند خودروهایی را که با سرعت بیش از حد مجاز حرکت می‌کنند، شناسایی کند. آیا اگر خودرویی با سرعت غیر مجاز مسیر بزرگ‌راه کرج را به سمت تهران طی کند و خودروی پلیس از تهران به سمت کرج در مسیر جادهٔ مخصوص حرکت کند، با رادار خود خودروی خطاکار را شناسایی می کند؟

مسأله ۱۳. رنگ خرس. خرسی که از یک نقطهٔ P به راه افتاده، به اندازهٔ یک کیلومتر رو به جنوب می‌رود. سپس جهت خود را تغییر می‌دهد و یک کیلومتر درست در جهت شرق پیش می‌رود. سپس بار دیگر با تغییر جهت دادن یک کیلومتر رو به شمال طی می‌کند و درست به نقطه P می‌رسد. .رنگ خرس چه رنگی بوده است؟

مسأله ۱۴. مختصات صحیح. آیا برای هر عدد طبیعی n، می‌توان دایره‌ای در صفحه رسم کرد که دقیقاً n نقطه با مختصات صحیح را در بر داشته باشد؟

مسأله ۱۵. سربازخانه. در یک پادگان آموزشی هزار سرباز در حال آموزش نظامی هستند. در راهروی باریک و طویل منتهی به آسایشگاه پادگان برای هر سرباز یک قفسهٔ وسایل، اختصاص داده شده است. قفسه‌ها در یک طرف راهرو کنار هم قرار گرفته‌اند. هنگام جشن پایانی دورهٔ آموزشی، سربازها به ترتیب شادی‌کنان از راهرو به سمت جای‌گاه دویدند. سربازان، به ستون یک و به‌دو رو، به صورت زیر از راهرو گذر کردند:

اولین سرباز درِ تمام قفسه‌ها را بست، نفر دوم یک در میان درِ قفسه‌ها را باز کرد، سرباز سوم نیز دو در میان حالتِ درِ قفسه‌ها را تغییر داد و به همین ترتیب دیگر سربازان عمل کردند و از راهرو خارج شدند. فرماندهٔ پادگان پس از خروج سربازان، از آسایشگاه و راهرو بازدید کرد و این بی‌انضباطی را تحمل نکرد و تصمیم گرفت به هر سربازی که در قفسه‌اش باز بود، اضافه خدمت بدهد. شمارهٔ درِ قفسه‌ها با شمارهٔ سربازها یکسان بود. تعیین کنید کدام از سربازها مجازات می‌شوند؟ اگر در شروع کار اولین سرباز به جای بستن درِ همهٔ قفسه‌ها آن‌ها را یک در میان تغییر حالت می‌داد و نفر دوم دو در میان و ... کدام سربازها باید مجازات می‌شدند؟ در مورد تعمیم این مسأله چه می‌توان گفت؟ آن را بررسی کنید.

ادامهٔ بحث در شمارهٔ بعدی مجله، ان‌شاءالله. سرخوش و سرافراز باشید، خدا یارتان.

مسأله‌های درسی

محمدحسین مشتاق

• ریاضی ۱

۱) اگر $x+y+z=0$، آنگاه $xy+yz+zx\le 0$.

۲) جملهٔ مستقل از x در $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x^3}}\right)^8$ چیست؟

۳) اگر a_1، ...، a_n اعدادی مثبت باشند و $a_1\cdots a_n=1$، آنگاه

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)\ge 2^n.$$

۴) عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) x^4+x^3+x+1 ب) x^4+x^3-x+1

ج) x^4+x^3+x-1 د) x^4-x^3-x-1

ه) x^4+x^3-x-1 و) x^4-x^3+x-1.

• ریاضی ۲

۱) اگر $p,q\in\mathbb{Q}$ و $\sqrt{q}\notin\mathbb{Q}$ و $p+\sqrt{q}$ یک ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید $p-\sqrt{q}$ نیز ریشهٔ آن چندجمله‌ای است.

۲) نشان دهید معادلات درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ دارای حداقل یک ریشهٔ مشترک هستند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2.$$

• هندسه

۱) مثلث متساوی‌الساقین ABC را درنظر بگیرید $(AB=AC)$، میانهٔ BM بر نیم‌ساز CD عمود است. $\sin\widehat{ABC}$ چه‌قدر است؟

۲) قضیهٔ بطلمیوس. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع روبه‌رو برابر است با حاصل‌ضرب دو قطر.

۳) اگر BN و CM، میانه‌های $\triangle ABC$ باشند و O محل برخورد آنها، نسبت مساحت مثلث MON به مساحت مثلث ABC چیست؟

۴) فرض‌کنید ABC مثلثی متساوی‌الساقین باشد $(AB=AC)$ و $BC=1$، $\angle A=\frac{\pi}{7}$ و $\angle B=\angle C=\frac{3\pi}{7}$. با استفاده از این مثلث، نشان دهید که

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$$

راهنمایی: نقطهٔ D را روی ضلع AC طوری انتخاب کنید که $CD=1$.

• حسابان

۱) نشان‌دهید تابع $f(x)=x+\lfloor x\rfloor$، وارون‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

۲) فرض کنید تابع f بر بازهٔ I اکیداً یک‌نوا باشد. نشان دهید f بر بازهٔ I یک‌به‌یک است.

۳) فرض کنید $f(x)=|x|+|x-1|+|x+1|$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$. نشان دهید $f_n(x)=3^n f(x)$.

۴) فرض کنید f تابعی زوج و در $x=0$ مشتق پذیر باشد. نشان دهید $f'(0)=0$.

شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۳۲ـ۳۳

• جبر و احتمال

۱) نشان دهید $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

۲) نشان دهید $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1}x^i=\prod_{j=0}^{n}(1+x^{2^j})$.

۳) $\lim_{n\to\infty}\sin(10^n\cdot\frac{5\pi}{9})$ را محاسبه کنید.

۴) ۸۰ نفر در آزمونی با ۲۰ سؤال چهارگزینه‌ای شرکت کرده‌اند. اگر هر پاسخ درست ۳ نمرهٔ مثبت و هر پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی داشته‌باشد، نشان دهید که دو نفر هستند که یک نمره می‌گیرند. اگر در مفروضات مسأله، ۸۰ را با ۷۸ عوض کنیم، حکم مسأله برقرار می‌ماند؟ (آندیا رضاپوریان)

• حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) نشان دهید برای هر $c\in\mathbb{R}$، $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$.

۲) الف) فرض کنید $h=f\cdot g$. نشان دهید اگر f و g، n بار مشتق‌پذیر باشند، داریم

$$h^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}(f^{(n-i)}\cdot g^{(i)})(x)$$

($h^{(n)}$ مشتق n ـ ام تابع h است).

ب) به وسیلهٔ رابطهٔ فوق رابطه‌ای برای مشتق n ام xe^x و $\frac{1}{x}e^x$ بیابید.

۳) فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b)، $(n+1)$ بار مشتق‌پذیر باشد. اگر

$$\left|\frac{f(b)+f^{(1)}(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f^{(1)}(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}\right|=b-a$$

آنگاه $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

۴) نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}i^m}{n^{m+1}}\right)=\frac{1}{m+1}.$$

• هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱) اگر $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ دو ماتریس با درایه‌های حقیقی باشند و $n<m$، نشان دهید دترمینان ماتریس AB برابر صفر است.

۲) الف) اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ یک نگاشت خطی با ماتریس A باشد و U سطحی در $\mathbb{R}^2$، نشان دهید

$$S(f(U))=S(U)\cdot|\det(A)|$$

(S تابع مساحت است).

ب) اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$، یک نگاشت خطی با ماتریس A باشد و W حجمی در $\mathbb{R}^3$، نشان دهید

$$V(f(W))=V(W)\cdot|\det(A)|$$

(V تابع حجم است).

۳) معادلهٔ خط عمود مشترک دو خط متنافر زیر را به‌دست آورید.

$$\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=-3t\\z=t\end{cases},\qquad \Delta':\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-2t+3\end{cases}$$

۴) فرض کنید A ماتریسی با درایه‌های صفر و یک باشد که در سطرهای آن، صفر بین یک‌ها نیامده‌است. ثابت کنید دترمینان هر زیرماتریس مربعی A برابر صفر یا ±1 است.

• ریاضی گسسته

۱) نشان دهید $(n!-1,(n+1)!+1)=1$ اگر و تنها اگر $n+2$ عدد اول نباشد.

۲) اگر $a\in\mathbb{Z}$ و $m,n\in\mathbb{N}$ و $m\mid n$، نشان دهید $a^m-1\mid a^n-1$.

۳) تساوی $135=(31,4)\times 3$ در چه مبنایی برقرار است؟

۴) الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با دامنهٔ $\mathbb{N}$ باشد. قرار دهید $Z=X+Y$ و نشان دهید

$$P(Z=z)=\sum_{i=1}^{z}P(X=z-i)\cdot P(Y=i).$$

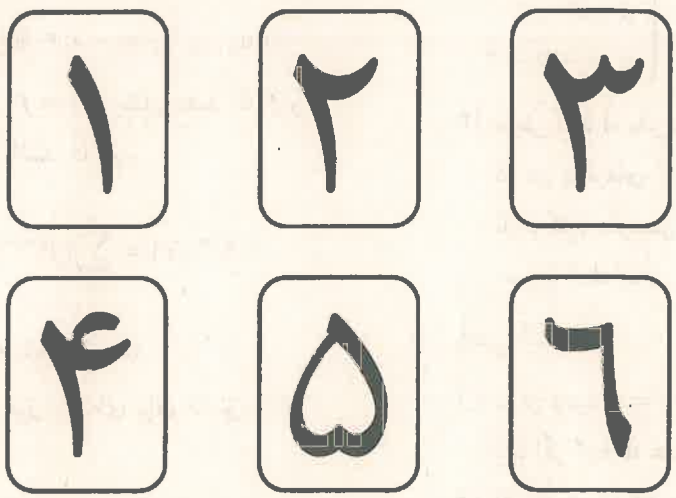
ب) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی دو جمله‌ای و مستقل باشند که پارامترهای آنها به ترتیب (n,p) و (m,p) است ((n,p) یعنی n آزمون با احتمال پیروزی p). نشان دهید $X+Y$ نیز یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر $(m+n,p)$ است.

بازی با کارت‌ها

سپیده چمن‌آرا

این بازی، یک بازی دو نفره است. روی زمین ۶ کارت که روی آنها اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده‌اند قرار دارد. بازیکن‌ها به تناوب بازی می‌کنند؛ هر بازیکن در نوبت خود، یکی از کارت‌ها را انتخاب کرده و برمی‌دارد و عدد روی آن را با مجموع اعداد انتخاب‌شده از ابتدای بازی تا نوبت پیش از خود جمع می‌زند و سپس کارت را مجدداً سر جای خودش روی زمین می‌گذارد. تنها محدودیتی که وجود دارد این است که یک کارت را در دو نوبت پشت سر هم نمی‌توان انتخاب کرد. برنده کسی است که زودتر به مجموع ۳۷ برسد.

فرض کنید من و شما می‌خواهیم بازی کنیم. من اول بازی می‌کنم و کارت ۲ را انتخاب می‌کنم. حالا نوبت شماست. شما نمی‌توانید در این نوبت بازی کارت ۲ را انتخاب کنید؛ پس مجاز به انتخاب یکی از کارتهای ۱، ۳، ۴، ۵ یا ۶ هستید



مثلاً فرض کنید کارت ۴ را انتخاب می‌کنید. تا اینجا مجموع کارت‌ها ۶ = ۴ + ۲ است. نوبت من است. من کارت ۴ را نمی‌توانم انتخاب کنم؛ کارتِ ۳ را انتخاب می‌کنم، مجموعِ کارت‌ها ۹ = ۳ + ۶ است. نوبت شماست. شما باز هم ۴ را انتخاب کردید؟! مجموع ۱۳ = ۴ + ۹ شد؟! خوب من هم دوباره ۳ را انتخاب می‌کنم، یعنی ۱۶ = ۳ + ۱۳ مجموع کارت‌هایمان است و بازی به این ترتیب ادامه می‌یابد. آیا می‌توانید استرتژی بُرد این بازی را بیابید؟ اگر به پرسش‌های زیر پاسخ دهید، می‌توانید استراتژیِ برد را بیابید. پاسخ‌های دقیق‌شدهٔ خود را برای ما بفرستید.

پرسش ۱. اگر حریف شما در نوبت خود، مجموع را به ۳۱ برساند، آیا می‌توانید در این مرحله کارتی را انتخاب کنید که ببرید؟ چه کارتی؟ اگر حریف شما با همان کارت به مجموع ۳۱ رسیده باشد چه‌طور؟ آیا باز هم می‌توانید با انتخاب همان کارت برنده شوید؟ چرا؟ چه کارتی را باید انتخاب کنید که بُرد شما تضمین شود؟ چرا؟

پرسش ۲. اگر حریف شما در نوبت خود، مجموع را به ۳۲ برساند، آیا می‌توانید در این مرحله نیز با انتخاب کارت مناسب برنده شوید؟ چه کارتی؟ اگر حریف شما با همان کارت به مجموع ۳۲ رسیده باشد، آیا باز هم می‌توانید ببرید؟ به نظر می‌رسد در این حالت شما

ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۲۵ـ۳۴

بازنده‌اید؛ زیرا هر کارتی انتخاب کنید، حریف شما می‌برد! در نوبت قبل شما به چه مجموعی رسیده بودید که حریف شما با ۵ به ۳۲ رسید؟ (پس نباید در نوبتتان به این مجموع برسید!)

پرسش ۳. مشابه بررسی‌های بالا را برای حالتی که حریف شما به مجموع ۳۳، ۳۴، ۳۵ یا ۳۶ رسیده باشد انجام دهید. سپس جدولی مانند جدول زیر بسازید و آن را با استفاده از پرسش‌های فوق پُر کنید.

کارت انتخاب شده توسط حریف	مجموع بازی	پیش‌بینی آیندهٔ بازی	نتیجه: چه کنیم تاحتماً ببریم؟	نتیجه: در دو نوبت قبل به چه مجموعی نباید برسیم؟
۶	۳۱	هر یک از کارت‌های ۴،۲،۱ یا ۵ را که انتخاب کنیم، حریف پس از انتخاب کارت ۵ یا ۴ یا ۲ یا ۱ می‌برد؛ مگر کارت ۳!	فقط کارت ۳ را باید انتخاب کنیم؛ زیرا حریف نمی‌تواند در نوبت بعد آن را انتخاب کند و مجبوراست یا ۱ یا ۲ را بردارد و در نتیجه ما در نوبت بعد، می‌بریم!	
۵	۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶			۲۷
هر کارتی!	۳۰			

نتیجه ۱. در نوبت خودمان نباید به این مجموع‌ها برسیم (درست همان‌طورکه اگر حریف به آن مجموع برسد بازنده است!): ....

نتیجه ۲. به‌نظر می‌رسد که تنها عددی که تحت هر شرایطی بردمان را تضمین می‌کند، مجموع ... است (درست همان‌طور که برد حریف را تضمین می‌کند!).

حال با عددی که در نتیجهٔ ۲ به‌دست آورده‌اید، بازی را انجام دهید؛ یعنی فرض کنید هدفتان رسیدن به این عدد است و نه به عدد ۳۷ (زیرا اگر به این عدد برسید حتماً به ۳۷ نیز می رسید) و با روشی مشابه روش بالا، عدد مجموع قبلی را که بُرد شما را کاملاً تضمین می‌کند، بیابید. این کار را آن‌قدر انجام دهید تا به اولین عددی برسید که در شروع بازی باید انتخاب کنید.

پرسش ۴. در این بازی، آیا همیشه نفر اول برنده است یا نفر دوم؟ چرا؟

پرسش ۵. اگر خوانندهٔ شماره‌های پیش ماهنامهٔ ریاضیات بوده‌اید، بازی کبریت بازی را که در شماره اول چاپ شده است مجدداً بخوانید. آیا شباهتی با این بازی دارد؟ چه شباهتی؟ این دو بازی چه تفاوتی دارند؟ آیا می‌توان این دو بازی را در یک رده قرار داد و یک استراتژی بُرد کلی برای هر دو بیان کرد؟ چگونه؟

پرسش ۶. اینک بازی را تعمیم دهید و مثلاً بازی را با کارت‌های ۱ تا ۸ و با مجموع ۴۹ انجام دهید؛ یا با کارت‌های ۱ تا ۵ و همین مجموع ۳۷.

در هر مورد، استراتژی برد را ـ در صورت وجود! ـ به‌دست بیاورید و برای ما بفرستید.

آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۷. اجازه دهید قدری بیشتر به موضوعات دو بند ۵ و ۶، به‌ویژه ارتباط آنها با هم، بپردازیم. اگر یادتان باشد، قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ را $\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ تعریف کردیم. آنهایی که کنجکاوتر هستند، احتمالاً سعی کرده‌اند بررسی کنند که آیا این قدرمطلق، ویژگی‌هایی شبیه به همان قدرمطلق خودمان (مربوط به اعداد حقیقی) را دارد یا نه؟ خودتان می‌توانید ثابت کنید که برای هر دو عدد مختلط w و z، دو رابطهٔ

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

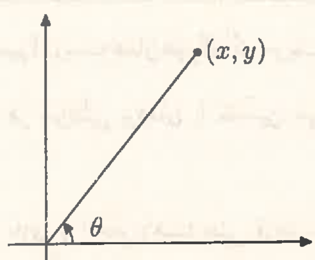
و

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

برقرارند. یک راه ساده برای اثبات دومی، رساندن طرفین به توان دو است.

با توجه به رابطهٔ اول، می‌توان گفت که هر عدد مختلط $z \neq ۰$ را به صورت $z = r \cdot \tilde{z}$ می‌توان نمایش داد که r، قدرمطلق عدد z است و $|\tilde{z}| = ۱$؛ بنابراین، $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ و $\tilde{x}^{۲} + \tilde{y}^{۲} = ۱$.

رابطهٔ مثلثاتی $\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$ یادتان هست؟ در حقیقت، $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ به‌ترتیب باید کسینوس و سینوس یک زاویهٔ یکتای $۰ \leq \theta < ۲\pi$ باشند. این عدد θ، آرگومان[۱] عدد مختلط z نامیده می‌شود و در نمایش هندسی عدد مختلط $z = x + iy$ با مختصات دکارتی روی صفحه، برابر با زاویهٔ بین محور xها و پاره‌خط بین مبدأ مختصات و (x, y) است. طول این پاره‌خط هم مساوی با قدرمطلق z است.



بسیار خوب، تا اینجا فهمیدیم که هر عدد مختلط $z \neq ۰$ را به صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

می‌توان نوشت، که r یک عدد حقیقی مثبت است و $۰ \leq \theta < ۲\pi$. اکنون همه چیز فراهم شده‌است که ببینیم عمل ضرب کردن دو عدد مختلط در هم، در مختصات دکارتی چگونه انجام می‌شود.

۱) Argument

با استفاده از رابطه‌های بسط سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه، چندان دشوار نیست که نشان دهید

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\theta+\psi) + i\sin(\theta+\psi).$$

بنابراین، در مورد دو عدد مختلط با قدرمطلق مساوی یک، آرگومان حاصل‌ضرب آنها برابر با مجموع آرگومان‌های تک تک آنهاست. با استفاده از استقرای ریاضی، می‌توانید گزارهٔ زیر را هم ثابت کنید.

گزاره ۱۲ . *(قضیهٔ دوموآور[1]) برای هر عدد صحیح و مثبت n،*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

تمرین ۱۲+۱. *برای هر عدد صحیح و مثبت n، همهٔ عددهای مختلط z را که در معادلهٔ $z^n = ۱$ صدق می‌کنند پیدا کنید* (راهنمایی: دقت کنید که طبق قضیهٔ دوموآور، اگر θ آرگومان z باشد، باید $\cos n\theta = ۱$ و $\sin n\theta = ۰$. پس $\theta = ۲k\pi/n$ که $۰ \leq k < n$ عددی صحیح است).

در تمرین ۱۳ (همان ۱۲+۱) دیدید که چندجمله‌ای‌های به شکل $z^n - ۱$ دقیقاً n ریشه دارند. با استدلال مشابهی، می‌شود نشان داد که چندجمله‌ای‌های به‌صورت $z^n - a$ هم دارای دقیقاً n ریشه هستند. اما قضیهٔ دیگری به‌نام «قضیهٔ اساسی جبر» وجود دارد، و اثباتش هم ساده نیست، که این مطلب را به تمام چندجمله‌ای‌ها عمومیت می‌دهد.

گزاره ۱۳ . *هر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n، در میان اعداد مختلط دقیقاً n ریشهٔ (نه لزوماً متمایز) دارد.*

به بیان دیگر، هر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n را به شکل $P(x) = a(x-z_۱)\cdots(x-z_n)$ می‌توان نمایش داد، که a و z_i ها عددهای مختلط هستند.

تمرین ۱۴ . *همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $z^n = (z-۱)^n$ را بیابید.*

تمرین ۱۵ . *یک n ضلعی منتظم در دایره‌ای به شعاع یک محاط شده‌است. یکی از رأس‌های آن را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حاصل‌ضرب طول ضلع‌ها و قطرهایی که یک سرشان این رأس است، مساوی با n می‌شود* (راهنمایی. از نمایش عددهای مختلط در مختصات دکارتی استفاده کنید. می‌شود فرض کرد رأس‌های این n ضلعی، ۱، z، ...، $z^{n-۱}$ هستند، که $z = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$ (در واقع $z^n = ۱$). بنابراین مثلاً باید نشان داد

$$|۱-z|\cdot|۱-z^۲|\cdots|۱-z^{n-۱}| = n.$$

برای تکمیل اثبات، نشان دهید اگر $P(x) = ۱ + x + \cdots + x^{n-۱}$، آنوقت

$$P(۱) = |(۱-z)(۱-z^۲)\cdots(۱-z^{n-۱})|;$$

یعنی $P(۱) = n$).

۸. جملهٔ «وقتی سه تا کبوتر بخواهند بروند توی دو تا لانه، باید حداقل دوتاشان در یک لانه باشند» را هر عقل سلیمی می‌فهمد و قبول می‌کند؛ و البته با همین یک جمله هم می‌توان شگفتی آفرید!

۱) De Moivre (توضیح: «دوموآور»، در تلفظ، تقریباً هم آهنگ «گروهان» است!)

مضمون جملهٔ بالا را می‌شود در قالب یک اصل ساده به نام «اصل لانه کبوتری» به صورت کلی‌تری بیان کرد:

اصل لانه کبوتری. اگر بخواهیم n شیء را در k جعبهٔ مختلف قرار دهیم، دست کم یکی از جعبه‌ها حاوی اقلاً $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ شیء خواهد بود.

(در اینجا، $\lceil x \rceil$، برای هر عدد حقیقی x، مساوی با کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از x است و «سقفِ x» نام دارد.)

بگذارید بی‌مقدمه به مثال‌ها بپردازیم.

مثال ۸. عدد صحیح و مثبت دلخواه n مفروض است. نشان دهید عدد صحیح و مثبت M وجود دارد که به n بخش‌پذیر است و نمایش اعشاری آن فقط حاوی ارقام ۰ و ۷ است.

حل. می‌دانید که عدد طبیعی M بر n بخشپذیر است اگر و تنها اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم M بر n، صفر باشد. عددهای ۷، ۷۷، ۷۷۷، …، $\underbrace{۷۷\cdots۷}_{n+۱\text{ بار}}$ را در نظر بگیرید. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر n، یکی از اعداد ۰، ۱، …، $n-۱$ است. بنابراین دو تا از عددهای ذکر شده، در تقسیم بر n دارای باقی‌مانده‌های برابر هستند. اکنون تفاضل آن دو عدد، فقط از ارقام ۰ و ۷ تشکیل شده و مضربی از n است. ∎

مسأله‌ای بسیار شبیه مثال زیر، در المپیاد داخلی کشورمان آمده بود.

مثال ۹. تعداد ۳۳ عدد طبیعی داده شده‌اند، و می‌دانیم که در تجزیهٔ هیچ‌یک از آنها به عوامل اول، عدد اولی غیر از ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ ظاهر نمی‌شود. نشان دهید می‌توان تعدادی از آنها را انتخاب کرد که حاصل ضرب عددهای انتخاب شده مجذور یک عدد صحیح باشد.

حل. فرض کنید $n_۱$، …، $n_{۳۳}$ عددهای مذکور باشند و برای هر $۱ \leq i \leq ۳۳$، $m_i = n_۱ \cdots n_i$. هر یک از m_i ها به شکل $۲^{k_۲} \times ۳^{k_۳} \times ۵^{k_۵} \times ۷^{k_۷} \times ۱۱^{k_{۱۱}}$ قابل نمایش است. متناظر با هر عدد، یک پنج‌تایی مرتب $(x_۲, x_۳, x_۵, x_۷, x_{۱۱})$، که x_i ها صفر یا یک هستند، در نظر می‌گیریم: $x_i = ۰$ اگر k_i زوج باشد و $x_i = ۱$ اگر k_i فرد باشد. روشن است که پنج‌تایی‌های متمایز ممکن، $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۳۲$ تا هستند؛ بنابراین عددهای صحیح $۱ \leq i < j \leq ۳۲$ یافت می‌شوند که پنج‌تایی‌های نظیر m_i و m_j یکسان است. خودتان نشان دهید که $n_{i+۱} \cdots n_j = \frac{m_j}{m_i}$ مربع کامل است. ∎

تمرین ۱۶. *نشان دهید در مثال بالا می‌توان ۳۳ را با ۳۲ هم جای‌گزین کرد. آیا می‌توان به جای آن عدد کوچک‌تری قرار داد؟*

تمرین ۱۷. *فرض کنید n و m دو عدد صحیح مثبت باشند. عددهای صحیح (نه لزوماً متمایز) $a_۱$، …، a_m و $b_۱$، …، b_n داده شده‌اند و برای هر i و هر j، $۱ \leq a_i \leq n$ و $۱ \leq b_j \leq m$. ثابت کنید عددهای صحیح و مثبت $p \leq q$ و $r \leq s$ وجود دارند که*

$$a_p + \cdots + a_q = b_r + \cdots + b_s$$

(راهنمایی. فرض کنید $a_۱ + \cdots + a_m \geq b_۱ + \cdots + b_n$. برای هر $۱ \leq k \leq n$، $j(k)$ را کوچک‌ترین عدد صحیحی بگیرید که $a_۱ + \cdots + a_{j(k)} \geq b_۱ + \cdots + b_k$، و قرار دهید $c_k = (a_۱ + \cdots + a_{j(k)}) - (b_۱ + \cdots + b_k)$. توجه کنید که $۰ \leq c_k < n$. اصل لانه کبوتری را از یاد نبرید!)

مسألهٔ زیر را هم پاؤل اِردُش، ریاضیدان شهیر مجار، مطرح کرده است.

تمرین ۱۸. *نشان دهید اگر $n + ۱$ عدد از میان عددهای ۱، …، $۲n$ انتخاب کنیم، می‌توان دو تا از آنها را برگزید که یکی، بر دیگری بخش‌پذیر باشد* (راهنمایی. هر یک از این $n + ۱$ عدد را به صورت $q \times ۲^r$ می‌شود نشان داد که r عددی صحیح و نامنفی و q عددی فرد است. دقت کنید که برای q، فقط n امکان انتخاب وجود دارد: ۱، ۳، …، $۲n - ۱$).

دستوری برای محاسبهٔ مساحت مثلث

امیر عباس عابدی

همان‌گونه که می‌دانیم، سه حالت اساسی برای تساوی دو مثلث وجود دارد: تساوی سه ضلع، تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین و تساوی دو زاویه و ضلع بین ازمثلثی با مثلث دیگر. این سه حالت علاوه بر سه حالت اصلی تساوی دو مثلث، معرف حالت‌هایی هستند که یک مثلث کاملاً مشخص می‌شود؛ به این معنا که با مشخص بودن سه ضلع یک مثلث، با معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین از مثلثی و هم‌چنین با معلوم بودن دو زاویه و ضلع بین از مثلثی، مثلث حل می‌شود. طبیعی است که در هر یک از این حالت‌های سه گانه، چون مثلث کاملاً معلوم است، مساحت آن را نیز می‌توان به‌دست آورد. برای بررسی دقیق‌تر، فرض کنید مثلث مورد بحث، مثلث ABC باشد. فرض می‌کنیم $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$. هم‌چنین نصف محیط این مثلث را P و مساحت آن را S می‌نامیم. در حالتی که سه ضلع مثلث معلوم باشد، مساحت مثلث از دستور

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

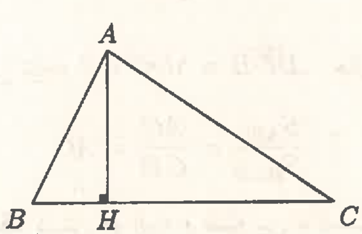
که به دستور هرون معروف است به‌دست می‌آید. در حالتی که دو ضلع و زاویهٔ بین مثلثی معلوم باشد، مساحت مثلث از دستور

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C}$$

به‌دست می‌آید؛ اما برای حالتی که دو زاویه و ضلع بین از مثلثی معلوم باشد، دستوری در کتاب‌های هندسه ذکر نشده است. برای این حالت هم می‌توان دستوری ارایه داد:

$$S = \frac{a^2}{2(\cot\hat{B} + \cot\hat{C})} = \frac{b^2}{2(\cot\hat{A} + \cot\hat{C})} = \frac{c^2}{2(\cot\hat{A} + \cot\hat{B})}.$$

حال به اثبات این دستور می‌پردازیم. مطابق شکل ۱ ارتفاع نظیر رأس A یعنی AH را رسم می‌کنیم.



شکل ۱

در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH داریم $BH = AH \cot\hat{B}$ و $CH = AH \cot\hat{C}$. از جمع این دو رابطه به دست می‌آوریم

$$BH + CH = BC = a = AH(\cot\hat{B} + \cot\hat{C})$$

مجلهٔ ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۴۱_۳۹

بنابراین

$$AH = \frac{a}{\cot \hat{B} + \cot \hat{C}}.$$

اما می‌دانیم که $S = \frac{۱}{۲} a \times AH$؛ پس

$$S = \frac{a^۲}{۲(\cot \hat{B} + \cot \hat{C})}.$$

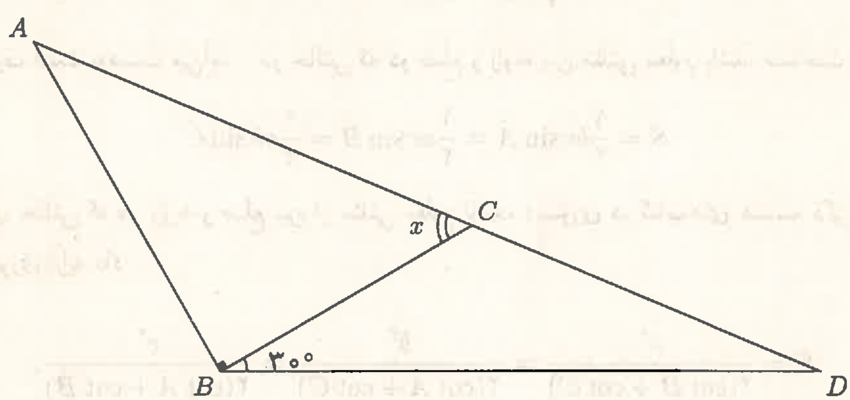
نکتهٔ قابل ذکر این است که این رابطه در حالتی که پای ارتفاع (یعنی H) خارج ضلع BC می‌افتد نیز صحیح است. اگر تبدیل‌های دوری این رابطه را بنویسیم خواهیم داشت

$$S = \frac{a^۲}{۲(\cot \hat{B} + \cot \hat{C})} = \frac{b^۲}{۲(\cot \hat{A} + \cot \hat{C})} = \frac{c^۲}{۲(\cot \hat{A} + \cot \hat{B})}.$$

پس دستور جدید ثابت شد. حال به حل یک مسأله به کمک این دستور می‌پردازیم.

مسأله. *در مثلث ABD نقطهٔ C به نحوی روی ضلع AD قرار دارد که داریم $AB = CD = ۱$ و $\widehat{ABC} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{CBD} = ۳۰^\circ$. طول AC را به‌دست آورید.* (المپیاد ریاضی کانادا)

حل.



شکل ۲

در شکل ۲ فرض می‌کنیم $\widehat{ACB} = x$ و در نتیجه $\widehat{DCB} = ۱۸۰^\circ - x$. حال توجه داریم که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AC}{CD} = AC$$

از طرفی نسبت این دو مساحت را می‌توان به کمک دستور دو زاویه و ضلع بین به دست آورد:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{BC^۲}{۲(\cot x + \cot ۹۰^\circ)}}{\frac{BC^۲}{۲(\cot(۱۸۰^\circ - x) + \cot ۳۰^\circ)}} = \frac{\cot ۳۰^\circ + \cot(۱۸۰^\circ - x)}{\cot x + \cot ۹۰^\circ}.$$

اما $\cot ۹۰^\circ = ۰$ و $\cot(۱۸۰ - x) = -\cot x$ و $\cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$؛ پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\cot ۳۰^\circ - \cot x}{\cot x} = \sqrt{۳} \tan x - ۱.$$

بنابراین

$$AC = \sqrt{۳} \tan x - ۱$$

و در نتیجه

$$\tan x = \frac{AC+۱}{\sqrt{۳}}.$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $AB = ۱$، بنابراین با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم $BC = \sqrt{AC^۲ - ۱}$. بنابراین

$$\tan x = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{AC^۲ - ۱}}$$

و در نتیجه

$$\frac{AC+۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{AC^۲ - ۱}}.$$

با مجذور کردن دو طرف و انجام محاسبات مربوطه، داریم

$$(AC-۱)(AC+۱)^۳ = ۳.$$

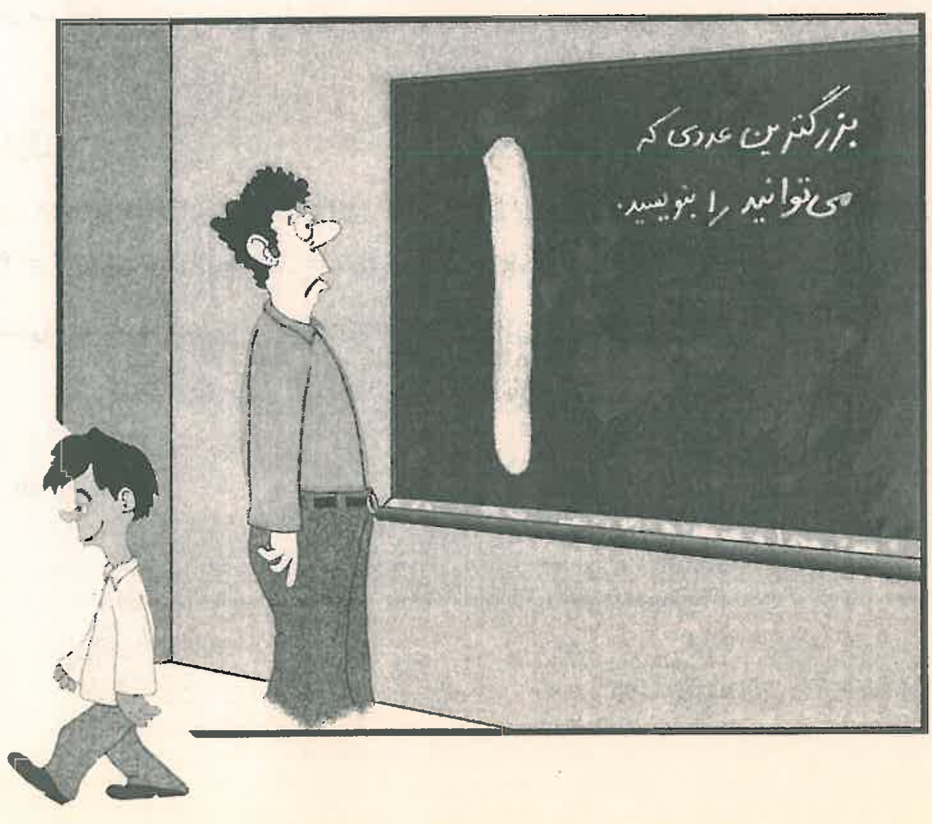
حال باید این معادلهٔ درجه چهار را حل کنیم تا AC به‌دست آید. با بررسی رابطه مشاهده می‌شود که مقدار $AC = -۲$ در این معادله صدق می‌کند؛ پس سعی می‌کنیم این ریشه را از معادله خارج کنیم. با تقسیم $(AC-۱)(AC+۱)^۳ - ۳$ بر $AC+۲$ خواهیم داشت

$$(AC-۱)(AC+۱)^۳ - ۳ = (AC^۳ - ۲)(AC+۲).$$

طول پاره‌خط نمی‌تواند منفی باشد و بنابراین جواب $AC = -۲$ غیر قابل قبول است؛ پس $AC^۳ - ۲ = ۰$ و در نتیجه

$$AC = \sqrt[۳]{۲}.$$

■



مسایل چهل و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضیات

(واشنگتن دی سی، ایالات متحده آمریکا، ۸ الی ۹ جولای ۲۰۰۱)

۱) فرض کنید ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است و O مرکز دایره محیطی آن و P پای ارتفاع وارد از رأس A روی ضلع BC. می‌دانیم که $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. ثابت کنید $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

۲) ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی مثبت a و b و c،

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

۳) بیست و یک پسر و بیست و یک دختر در یک مسابقه ریاضی شرکت کرده‌اند.

- هر شرکت کننده حداکثر شش مسأله حل کرده است.
- هر پسر و هر دختر، حداقل یک مسأله مشترک حل کرده‌اند.

ثابت کنید مسأله‌ای وجود دارد که حداقل توسط سه پسر و سه دختر حل شده است.

۴) n عددی فرد و بزرگ‌تر از ۱ است و k_1، ...، k_n، n عدد صحیح هستند. برای هر یک از $n!$ جای‌گشت مثل $a = (a_1, \ldots, a_n)$ از ۱، ...، n تعریف کنید

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

ثابت کنید دو جای‌گشت مختلف b و c وجود دارند که $S(b) - S(c)$ بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۵) در مثلث ABC، P تقاطع نیم‌ساز داخلی $\angle BAC$ با ضلع BC است و Q تقاطع نیم‌ساز داخلی $\angle ABC$ با ضلع CA. می‌دانیم که $\angle BAC = 60^\circ$ و $AB + BP = AQ + QB$. زوایای مثلث ABC چه مقادیری می‌توانند باشند؟

۶) a، b، c و d اعدادی صحیح هستند و $a > b > c > d > 0$. فرض کنید

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c),$$

ثابت کنید $ab + cd$ اول نیست.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۲
(مهر ۱۳۸۰) صص ۴۲ـ۴۲

مسایل المپیادی

علی شوریده

۴-۱) در تقسیم عددهای طبیعی a_1، ...، a_m بر عددی مثل n، باقی‌مانده‌های مختلف به‌دست آمده‌است ($m > \frac{n}{2}$). ثابت کنید برای هر $k \in \mathbb{Z}$، اندیس‌های نه لزوماً متمایز i و j در $\{1, \ldots, n\}$ پیدا می‌شوند که عدد $a_i + a_j - k$ بر m بخش‌پذیر باشد.

۴-۲) در گروهی که از ۵ نفر تشکیل شده است، بین هر سه نفر، دو نفر پیدا می‌شوند که هم را می‌شناسند و دو نفر هم ناآشنا با هم پیدا می‌شوند. ثابت کنید این پنج نفر را می‌توان در یک میز طوری نشاند که در هر دو طرف هر نفر، آشناهای او نشسته باشند.

۴-۳) روی محیط دایره‌ای به دلخواه، چهار یک و پنج صفر نوشته‌ایم. سپس بین هر دو رقم مساوی صفر می‌گذاریم و بین هر دو رقم مختلف، یک قرار می‌دهیم و بعد از آن رقم‌های قبلی را پاک می‌کنیم دوباره در مورد رقم‌های موجود همان عمل را ادامه می‌دهیم. ثابت کنید بعد از انجام تعداد محدودی از این عمل، نمی‌توان به ۹ رقم صفر رسید.

۴-۴) فرض کنیم $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب باشد. نقاط M، N، P و Q به ترتیب روی اضلاع AB، BC، CD و DA طوری انتخاب شده‌اند که $AQ = DP = CN = BM$. نشان دهید اگر $MNPQ$ مربع باشد، $ABCD$ نیز مربع است.

در این شماره یک مسألهٔ جایزه‌دار دیگر مطرح می‌کنیم. راه‌حل‌های خود را برای دفتر ماهنامه ارسال فرمایید، به ارایه‌کنندگان راه‌حل‌های برگزیده جوایزی اعطا خواهد شد. لازم به ذکر است با توجه به نوپا بودن ماهنامه و این‌که هنوز شماره‌های قبلی ماهنامه به طور وسیع توزیع نشده، تاکنون نسبت به معرفی برگزیدگان مسأله‌های جایزه‌دار قبلی اقدام نکرده‌ایم، لذا علاقه‌مندان حل مسأله‌های جایزه‌دار هم‌چنان می‌توانند راه‌حل‌های خود را برای مسأله‌های شماره‌های قبلی نیز ارسال دارند.

یک صفحهٔ شطرنج 8×8 مفروض است. روی هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنج یک مکعب قرار می‌دهیم. وجوه هر مکعب کاملاً هم‌اندازهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج است. هر مکعب پنج وجه سفید و یک وجه سیاه دارد. مجاز هستیم که کلیهٔ مکعب‌های هر سطر یا هر ستون را حول محور مشترکشان دوران دهیم. ثابت کنید با استفاده از این دوران‌ها، همواره می‌توانیم کلیهٔ وجوه بالایی مکعب‌ها را به رنگ سیاه تبدیل کنیم.

ماهنامهٔ ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۴۳-۴۴

تاریخ هندسه از مصر و بابل تا ویتن (۱)

رامین دانشی

ریاضیات همواره به‌عنوان یکی از مهم‌ترین بخش‌های دانش بشری، با زندگی انسان‌ها پیوندی تنگاتنگ داشته و می‌توان چنین گفت که ریاضیات از ابتدای پیدایش تمدن، جزئی لاینفک از نیازهای ذهنی بشر بوده‌است و همین نیاز به علم ریاضی است که عملاً قدمت ریاضیات را به زمان‌هایی قدیم‌تر از تمدن‌های باستانی می‌رساند. به علت کوشش‌های با ارزش مورخان، به خصوص مورخان ریاضیات و همچنین باستان شناسان بوده‌است که اکنون می‌توانیم آگاهی نسبتاً خوبی از سیر تحولات فکری بشر در ریاضیات در سال‌های گذشته داشته باشیم و در واقع به خاطر همین کوشش‌هاست که نگارنده توانسته‌است مطالب زیر را ـ هر چند که بی‌مقدار است ـ به رشتهٔ تحریر درآورد.

در این مقاله، سعی شده‌است که تا حد امکان، تحولات هندسه در طول سالیان گذشته بررسی شود. بدیهی است عدم ذکر نام ریاضی‌دانی در این مقاله، تنها به این دلیل است که در آن دورهٔ خاص تحول خاصی در زمینهٔ هندسه توسط او صورت نگرفته است.

درگذشته‌های دور، از ریاضیات و به خصوص از هندسه اغلب به عنوان ابزاری برای انجام کارهایی مثل مساحی، معماری و یا صنایع نظامی استفاده می‌شد و جنبه‌های محض و غیر عملی آن کمتر در نظر گرفته می‌شد. قدیمی‌ترین مدارک مستند ما از کشفیات هندسی بشر، مربوط به تمدن‌های دوران باستان است؛ تمدن‌هایی که با اختراع فلز مفرغ توسط بشر و همچنین سکونت انسان‌ها در کنار رودها و جلگه‌ها، مقدمهٔ پیدایش تمدن‌هایی با فرهنگ‌های مدنی و شهرنشینی شده‌بود. یکی از این تمدن‌ها، تمدن اقوام ساکن در بین دو رود دجله و فرات، یا همان تمدن بین‌النهرین است؛ تمدنی که اکنون از آن با نام تمدن بابل یاد می‌شود و شامل حکومت چندین سلسلهٔ ملوک‌الطوایفی و پادشاهی در طول زمانی بیش از سه هزار سال در منطقهٔ بین دجله و فرات بوده‌است و مهم‌ترین‌هاشان تمدن‌های سومر، آمور، آسور و کلدانی بوده‌اند.

گفته می‌شود که احتمالاً سومری‌ها حدود چهار هزار سال قبل از میلاد مسیح از سرزمین باستانی ایران به دشت‌های آب‌رفتی سومر کوچ کردند و در این منطقه ـ که در جنوب بین‌النهرین واقع است ـ با اقوامی کشاورز روبه‌رو شدند که سابقهٔ اقامتشان در این منطقه به قدمت حیات بشر می‌رسد.

در دورهٔ سومری‌ها، کشورهای کوچکی پدید آمدند که بهتر است آنها را «کشورشهر» بنامیم. این کشورشهرها هر کدام خدایان و پرستش‌گاه‌های مخصوص به خود را داشتند و برای حفظ استقلال خود از تهاجمات کشور شهرهای دیگر، با هم می‌جنگیدند. بر هر کشورشهر، یک پاتسی[1] یا «کاهن‌شاه» فرمان می‌راند که حکم‌ران و پیشوای دینی آن کشورشهر نیز محسوب می‌شد. سومری‌ها، به علت آبرفتی بودن زمین‌هایشان، مجبور بودند که مس، طلا، نقره و سنگ وارد کنند و به‌جای آن خواربار و محصولات دام‌پروری و کشاورزی خود را بفروشند؛ از این رو، دارای سیستم داد و ستد و بازرگانی پررونقی بودند. آنها از نامه‌های تجاری و صورت‌حساب فروش و وام و بهره هم در انجام داد و ستدهای خود استفاده می‌کردند. سومری‌ها پرستش‌گاه‌ها و خانه‌هایشان را از خشت خام پخته‌شده در آتش می‌ساختند و حتی برای کتابت نیز از خشت خام ـ به‌صورت لوح ـ استفاده می‌کردند و بعد از این که کار نوشتن بر روی خشت تمام می‌شد، برای زیاد

1) Patesi

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۴۸ـ۴۴

کردن طول عمر خشت و سالم ماندن آن، آن را می‌پختند. خط سومری‌ها خط میخی بود و با این خط بود که نظرات و نوشته‌های خود را بر لوح‌ها حک می‌کردند. اطلاعاتی که اکنون از میزان کشفیات سومری‌ها در هندسه وجود دارد، از طریق کشف خط و خواندن این لوح‌ها به‌دست آمده که خود، حاصل بیش از صد سال کار مستمر مورخان برروی این الواح بوده‌است.

از مهم‌ترین کشفیات و ابداعات سومری‌ها در هندسه، تقسیم دایره به ۳۶۰ قسمت مساوی است که استفاده از این سیستم تقسیم‌بندی هنوز هم متداول‌ترین روش اندازه‌گیری زاویه در جهان است. سومری‌ها از دستگاه‌های عدد شماری ۶۰ تایی استفاده می‌کردند. آنها روز را به ۱۲ ساعت و ساعت را به ۶۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه تقسیم کرده‌بودند.

دومین تمدن بزرگ بابل، تمدن آسور بود. این تمدن که تا ۶۰۰ سال قبل از میلاد دوام آورد، توسط شاهانی جنگ‌طلب، خشن و سلطه‌جو اداره می‌شد که کوچک‌ترین توجهی به حقوق اتباع خود نداشتند. پایتخت آسوری‌ها ابتدا شهر آشور ـ در کنار رود دجله ـ بود که بعدها به شهر نینوا انتقال یافت. آسوری‌ها مردمانی بودند که از صحراهای سوزان عربستان به منطقهٔ بین‌النهرین کوچ کرده بودند و به همین دلیل، به زبان سامی سخن می‌گفتند. آنها مانند سومری‌ها مردمانی کشاورز بودند که موفق شده بودند دامنهٔ فرمان‌روایی خود را از شمال به دمشق و فلسطین و از جنوب به نواحی شمالی مصر برسانند.

از میان فرمان‌روایان آسور، چهار فرمان‌روا به واسطهٔ قدرتی که در زمان خود برای تمدن آسور کسب کردند، شهرت دارند. آنها به ترتیب سارگن[1] دوم، سناخریب[2] (که پایتخت آسور را به نینوا منتقل ساخت)، اسرحادن[3] و آشوربانی‌پال[4] نام داشتند. دشمن اصلی آسوری‌ها کلدانی‌ها بودند که پس از تصرف سومر و اکد با مادها و پارس‌ها متحد شدند و در سال ۶۰۰ قبل از میلاد به شهر نینوا حمله کردند و پس از تاراج و تخریب آن شهر به تمدن آسور پایان دادند.

کلده یا بابل نوین، مرحلهٔ دیگری از فرهنگ و تمدن تاریخ دجله و فرات است. کلدانی‌ها بابل را پایتخت امپراطوری تازهٔ خود ـ که پس از تصرف سرزمین‌های سومر، اکد، آسور و دمشق و فلسطین به وجود آمده‌بود ـ قرار دادند. عمر پادشاهی کلدانی‌ها کوتاه بود؛ ولی در همین زمان کوتاه به پیشرفت‌های قابل توجهی دست یافتند که عظمت و بزرگی این تمدن را نشان می‌دهد. سرانجام امپراطوری کلدانی‌ها توسط مادها و پارس‌ها که اقوامی آریایی بودند در سال ۵۳۹ قبل از میلاد نابود شد.

تمدن‌های آسور و کلدانی همچون سومری‌ها برای کتابت از الواح استفاده می‌کردند و چون الواح از استحکام خوبی برخوردار بودند، کیفیت خود را ـ علی‌رغم گذشت سالیان دراز ـ تا امروز هم حفظ کرده‌اند و این امکان را به‌وجود آورده‌اند که باستان‌شناسان و مورخان بتوانند به بررسی این الواح بپردازند. درکاوش‌هایی که در ۲۰۰ سال گذشته در محل تمدن باستانی بابل صورت گرفته، بیش از نیم میلیون لوح به دست آمده که ۳۰۰ عدد از این لوح‌ها صرفاً دارای جنبهٔ ریاضی هستند. با کشف خط میخی این لوح‌ها، اکنون اطلاعات نسبتاً خوبی از میزان آگاهی و علم بابلی‌ها در دست داریم. از جمله مطالبی که از این الواح به‌دست آمده، اطلاعات جالبی در مورد میزان آگاهی بابلی‌ها از قواعد هندسه است. اکنون می‌دانیم که آنها با قوانین کلی محاسبهٔ مساحت مستطیل و مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین آشنا بوده‌اند. آنها قادر به محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و حجم مکعب مستطیل و حجم منشور قائمی که قاعدهٔ آن ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است هم بودند. بابلی‌ها محیط دایره را سه برابر قطر آن و مساحت دایره را یک دوازدهم مجذور محیط در نظر می‌گرفتند که به‌ازای $\pi = ۳$ این روابط درست هستند. آنها حجم استوانهٔ مستدیر قائم را با پیدا کردن حاصل ضرب قاعده در ارتفاع به‌دست می‌آوردند و حجم مخروط ناقص یا هرم ناقص مربع‌القاعده را به غلط به‌صورت حاصل ضرب ارتفاع در نصف مجموع قاعده‌ها در نظر می‌گرفتند.

آنها موفق شده‌بودند به این مطلب پی ببرند که در مثلث‌های متساوی‌الساقین، ارتفاع رسم شده از رأس مثلث، قاعده را نصف می‌کند و زاویه محاط در نیم دایره، قائمه است. از لوح‌هایی که در سال ۱۹۳۶ در شوش یافت شد، مشخص شد که بابلی‌ها مقدار π را برابر $۳\frac{۱}{۸}$

1) Sargon 2) Sennacherib 3) Esarhaddon 4) Ashurbanipal

محاسبه کرده بودند. همچنین در لوح‌هایی دیگر مسایلی یافت شده که در آنها با معلوم بودن دو ضلع زاویهٔ قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ وتر خواسته شده‌است.

قسمت عمدهٔ اطلاعات ما دربارهٔ کشفیات هندسه و ریاضی بابلی‌ها، مرهون اکتشافات و کوشش‌های اتونویگه‌باؤر[۱] و تورو دانژن[۲] است.

در حال حاضر میزان آگاهی ما از دانش بابلی‌ها نسبتاً جالب توجه است؛ ولی با توجه به این که هنوز کار خواندن و تفسیر تمامی لوح‌های کشف شده به پایان نرسیده، امید است که با اتمام بررسی همهٔ لوح‌ها، شاهد به‌دست آمدن اطلاعات جالب‌تری از کشفیات بابلی‌ها در هندسه باشیم.

مصر

در میان تمدن‌های کهن انسان، هیچ سرزمینی افسانه‌ای‌تر از مصر نیست و تکامل فرهنگی هیچ کشوری پیشینه‌ای غنی‌تر از این کشور ندارد. آغاز این تمدن به ۵۰۰۰ سال پیش از میلاد مسیح و عصر پارینه سنگی و نوسنگی مربوط می‌شود. یکی از تأثیرگذارترین عوامل در به وجود آمدن و پایداری تمدن مصر، رود نیل است که در طول مسیر حرکت خود در مصر دره‌ای موسوم به درهٔ نیل را پدید آورد. نیل، همچون نواری حیات‌بخش، از خاک حاصل‌خیز آب‌رفتی در میان صحرایی داغ و سوزان به مسیر خود ادامه می‌دهد و زمین‌های مستعدی را برای کشاورزی به‌وجود می‌آورد. باروری عظیم مصر، محصول طغیان‌های سالانهٔ نیل است که از دریاچه‌های حبشه در آفریقای مرکزی سرچشمه می‌گیرد و هر سال، پس از طغیان، در بسترش فرو می‌نشیند و به این ترتیب، لایه‌های رسوبی به‌جای مانده از طغیان سالانه، زمین‌های خوبی را برای کشاورزی مهیا می‌کنند.

در اواخر عصر پارینه سنگی، صحراها رو به پیش‌روی گذاشتند؛ بنابراین، مردمی که در صحراها زندگی می‌کردند به درهٔ نیل پناه آوردند. در دورهٔ نوسنگی، مصری‌ها به کارهای کشاورزی و دام‌پروری به‌جای شکار پرداختند و به این ترتیب، توانستند به داد و ستد محصولات و احشام خود بپردازند. مصریان پس از کشف مفرغ توانستند کج‌بیل و گاوآهن بسازند؛ از این رو زمین‌های بیشتری را به کشاورزی اختصاص دادند و تولید محصولات کشاورزی‌شان افزایش چشم‌گیری پیدا کرد. چون میزان تولید محصول آن‌قدر زیاد بود که لزومی به کار طاقت‌فرسا توسط تمامی مصریان احساس نمی‌شد، طبقاتی آسایش‌طلب ـ مانند کاهنان، اشراف و فرمان‌روایان ـ پیدا شدند.

به فرمان‌روایان مصر فرعون می‌گفتند. فرعون‌ها در سال‌های هزارهٔ سوم پیش از میلاد، زمین‌های کشاورزی را که عموماً در اختیار اشراف بود تحت تسلک خود درآوردند و عملاً به قدرت مطلق در مصر تبدیل شدند و عاملی شدند تا تمامی مصر به فرعون و پرستش‌گاه‌های خدایان مصر تعلق گیرد.

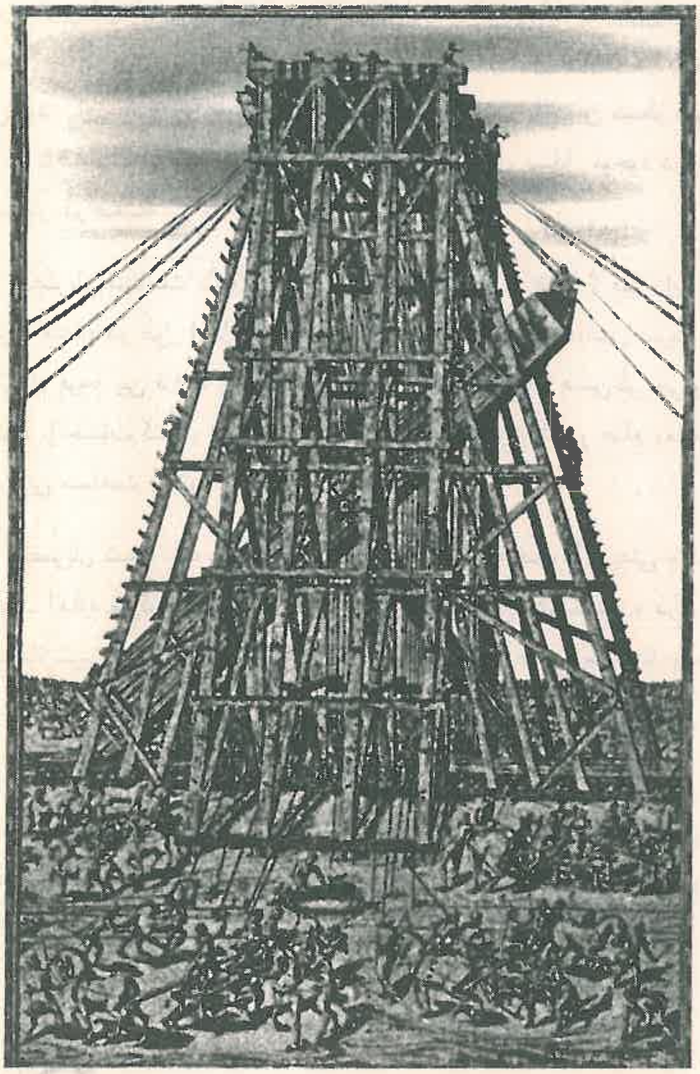
سلسله‌های فراعنه در مصر، بالغ بر ۲۶ سلسله می‌شدند که از ۳۴۰۰ قبل از میلاد تا ۵۲۵ قبل از میلاد ـ زمانی که کمبوجیه، پسر کورش (پادشاه ایران)، بساط آخرین آنها را برچید ـ در مصر حکومت می‌کردند. شش سلسلهٔ نخست پادشاهان مصر، در شهر ممفیس[۳] حکومت می‌کردند. به دوران آن فرعون‌ها، دوران اهرام گفته می‌شود؛ دورانی که در آن هرم‌های بزرگ و کوچک زیادی مانند قارچ در سراسر مصر روییدند.

سلسله‌های بعدی فراعنه در مصر، پایتخت‌های خود را به شهرهای هراکلئوپولیس[۴] و تبس[۵] منتقل کردند. مصریان خورشید را نیروی

1) Otto Neugebauer 2) F. Thureau-Dangin 3) Memphis 4) Hera cleo polis 5) Thebes

اصلی طبیعت و آفرینندگی می‌پنداشتند؛ به همین خاطر، خورشید خدای مصریان محسوب می‌شد و آن را «را»[1] می‌نامیدند. البته، آنان به جز این خدا خدایان دیگری هم داشتند و در پرستش‌گاه‌های مختلف، خدایان مختلف پرستش می‌شد؛ ولی این خدا، خدای مشترک بین همهٔ مصریان محسوب می‌شد.

مقدار زیادی از کشفیات مصریان در هندسه، مربوط به ساخت هرم‌هاست. اهرام ـ که در واقع آرام‌گاه و گور فراعنه بودند ـ ابتدا به صورت هرم‌های پله‌دار ساخته می‌شدند؛ ولی، پس از مدتی کوتاه، در حدود ۳۰۰۰ قبل از میلاد سطح شیب‌دار جای پله را گرفت.



در سال ۲۹۰۰ قبل از میلاد، ساختمان هرم بزرگ خئوپس[2] در ناحیهٔ جیزه[3] (واقع در نزدیکی ممفیس) آغاز شد. این ساختمان، بزرگ‌ترین ساختمانی است که در گذشته توسط انسان ساخته شده‌است و بی‌شک، ساختن آن آشنایی با برخی قواعد مهم هندسی را در آن زمان طلب می‌کرده‌است. این بنا که در زمینی به مساحت سیزده جریب ساخته‌شده، قاعده‌ای به اضلاع ۲۲۷ متر دارد و در ساختمان آن ۲۳۰۰۰۰۰ سنگ به وزن متوسط دو و نیم تن استفاده شده است و دقت جفت شدن سنگ‌ها کنارِ هم از عجایب این هرم می‌باشد. در سقف بعضی از اتاق‌های هرم، از قطعات سنگ خارای ۵۴ تنی به طول ۶٫۱ متر و ارتفاع ۱٫۳ متر استفاده شده‌است که از معدن سنگی در فاصلهٔ بیش از ۱۰۰۰ کیلومتری محل هرم به آن منطقه حمل شده‌اند و در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین نصب شده‌اند. بقیهٔ سنگ‌های به‌کار رفته در هرم، از معدن سنگی در آن‌سوی نیل کنده شده‌اند و برای ساختمان هرم به دقت تراش داده شده‌اند.

خطای نسبی در قاعدهٔ مربع شکلِ هرم کمتر از $\frac{1}{14000}$ و خطای نسبی در زوایای قائمهٔ گوشه‌ها از $\frac{1}{2700}$ تجاوز نمی‌کند. ساخت هرم در زمانی نزدیک به ۲۰ سال و توسط یک سپاه ۱۰۰۰۰۰ نفری از کارگران به انجام رسیده است. در یکی از اتاق‌های زیر هرم خوفو[4] (فرعونی که ساخت هرم به دستور او انجام گرفت)، در کنار ظرف‌های بی‌شمار، مقدار زیادی خوراکی دفن شده است.

از دیگر آثار عظیم معماری که در مصر ساخته می‌شد، ستون‌های بزرگ هرم‌شکلی بود که از تراش دادن قطعات بسیار بزرگ سنگ ساخته می‌شدند و پس از اتمام کار تراشیدن هرم، آنها را در مقابل معابد قرار می‌دادند. مصریان به این ستون‌ها مسله می‌گفتند و بزرگ‌ترین آنها که در مقابل معبد خورشید در تبس قرار دارد در حدود ۱۵۰۰ قبل از میلاد از معدن سنگ استخراج شده و به ابعاد ۳٫۱ متر درازا و اضلاع ۳٫۱ متر در قاعدهٔ مربع‌شکل تراش داده شده و وزنش تقریباً ۴۳۰ تن است. شکل بالا، تصویری از راست کردن یک مسلهٔ مصری در واتیکان در سال ۱۵۸۸ میلادی به‌وسیلهٔ دومنیکو فونتانا[5] است.

1) Ra 2) Cheops 3) Giza 4) Khupu 5) Domenico Fontana

مصریان برای نوشتن از کاغذی به نام پاپیروس استفاده می‌کردند. این کاغذ از ساقهٔ گیاهی به همین نام که در مرداب‌های اطراف نیل می‌روئید به‌دست می‌آمد. جالب است که کلمهٔ Paper در زبان انگلیسی به معنای کاغذ، از همین کلمهٔ Papyrus مشتق شده‌است.

مصریان، مخترعین جوهر و قلم هم هستند. آنها جوهر را از شیرهٔ گیاهان و قلم را از ساقهٔ نی‌های کنار نیل می‌ساختند. بنابراین، می‌توان مصریان را مخترع تمام ابزارهای نوشتن، یعنی کاغذ، قلم و جوهر نامید. به‌علت بافت محکم پاپیروس و دوام آن، تعداد قابل ملاحظه‌ای از پاپیروس‌های مصر باستان به‌جا مانده که با خواندن آنها، راز بسیاری از کشفیات مصریان بر ما معلوم گشته است. از معروف‌ترین این پاپیروس‌ها، پاپیروس‌های رایند[1] و مسکو می‌باشند. پاپیروس رایند که تاریخ نگارش آن در حدود سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد است، توسط هنری رایند[2]، مصرشناس اسکاتلندی، در سال ۱۸۵۸ میلادی در مصر خریداری شده و اکنون در موزهٔ بریتانیا نگه‌داری می‌شود. این پاپیروس شامل ۸۵ مسألهٔ ریاضی است. پاپیروس مسکو هم که احتمالاً در حدود ۱۸۵۰ قبل از میلاد نوشته شده‌است، شامل ۲۵ مسألهٔ ریاضی است. از بررسی‌هایی که روی مسایل موجود در این پاپیروس‌ها انجام گرفته، مورخان تا حدودی به توانایی‌های مصریان در هندسه پی بردند.

مصریان مساحت دایره را مساوی مساحت مربعی به ضلع $\frac{8}{9}$ قطر دایره در نظر می‌گرفتند و حجم استوانهٔ قائم را به صورت حاصل ضرب قاعده در طول ارتفاع و مساحت مثلث را برابر نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع محاسبه می‌کردند. در برخی مسأله‌ها به کتانژانتِ فرجهٔ بین قاعده و وجهی از یک هرم پرداخته شده و همین‌طور می‌توان فهمید که مصریان می‌توانستند مساحت چندضلعی‌های منتظم را حساب کنند و می‌دانستند که از همهٔ مثلث‌هایی که دو ضلع معلوم دارند، مثلثی که زاویهٔ بین دو ضلع معلومش قائمه است، بیشترین مساحت را دارد.

مصریان شیب یک وجه هرم را با نسبت امتداد[3] به صعود[4] ـ یعنی با دادن فاصلهٔ افقی به وجه اریب از وضعیت قائم به ازای هر واحد ـ اندازه می‌گرفتند. واحد قائم، ذراع و واحد افقی، دست بود و ذراع را برابر هفت دست قرارداد کرده بودند. با استفاده از این واحدها، شیب فوق را ـ که سِکت[5] هرم نامیده می‌شد ـ محاسبه می‌کردند و سکت هرم را هفت برابر کتانژانت زاویهٔ مسطحهٔ فرجه که بین دو قاعدهٔ هرم وجود دارد به‌دست آورده بودند.

در مسألهٔ ۵۷ پاپیروس رایند، تعیین ارتفاع هرم مربع‌القاعده‌ای با سکت ۵ دست و یک انگشت در هر ذراع و با قاعده‌ای به ضلع ۱۴۰ ذراع خواسته شده‌است (هر دست، پنج انگشت است). با توجه به این مطالب، می‌توان نتیجه گرفت که عمق آگاهی مصریان در هندسه و کاربردهای عملی جالبی که برای آن داشتند، تأثیر بزرگی بر تمدن‌های بعدی مانند تمدن یونان ـ که دوران هندسه‌دانان بزرگ است ـ داشته است.

مراجع

[۱] هوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی.

[۲] جورج سارتون، تاریخ علم. ترجمهٔ احمد آرام، انتشارات امیرکبیر.

1) Rhind 2) Henry Rhind 3) Run 4) Rise 5) Seqt