ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ پنجم، آبان ۱۳۸۰

۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال دوم، شمارهٔ چهارم، مهر ۱۳۸۰

نشانی دفتر ماهنامه
تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵
تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

یادداشت ۲
خانهٔ ریاضیات اصفهان ۳

مقاله‌ها
«یه‌جور دیگه» — اختری ۶
تابع وارون تابع‌های مثلثاتی — مرشدیان ۹
آرش در سیارهٔ توپاپ — افتخاری ۱۸
اعداد پی ـ ادیک — محسن‌زاده، هنرمند ۲۲

مسأله‌های درسی — درودی ۲۶

سرگرمی
بازی هگز — چمن‌آرا ۲۸

المپیاد
آمادگی برای المپیاد ریاضی — سلماسیان ۳۱
چند مسألهٔ المپیادی — شوریده ۳۵
حل مسأله‌های المپیادی (۳) — نقشینه ۳۶

از گذشته‌ها
تاریخ هندسه ... — دانشی ۳۹

روی جلد: نگاه کنید به
مقالهٔ «یه‌جور دیگه».

یادداشت

دانشگاه شهید چمران اهواز، به مناسبت سال جهانی ریاضیات، مجموعه‌ای از مقاله‌ها و سخن‌رانی‌های عام دکتر امیدعلی کرم‌زاده را در کتابی با عنوان «نتایج باورنکردنی در ریاضیات» منتشر کرده‌است. متن زیر، از مقالهٔ «تعمیم در ریاضی» (صفحات ۶۷ تا ۹۶ کتاب) انتخاب شده.

به‌جای یادداشت

ما معلمین ریاضی معمولاً درکلاس‌های آخر دبیرستان وکلاس‌های اول دانشگاه با این سؤال از طرف بعضی از دانش‌آموزان ریاضی مواجه می‌شویم که اصلاً ریاضیات به چه درد می‌خورد؟ پاسخی که از ما می‌شنوند تقریباً در همه‌جا یک‌سان است: ریاضیات در فیزیک، مهندسی و نقشه‌برداری، دریانوردی، هواپیمایی، زیست‌شناسی و به‌طورکلی در همهٔ علوم به‌کار می‌رود و در حقیقت، میزان درستی یک نظریهٔ علمی، بستگی به مقدار ریاضیاتی دارد که در آن نظریه به‌کار رفته است. بعضی از دانش‌آموزان با این پاسخ قانع می‌شوند و بعضی هم بدون قانع شدن مجبور به ادامه تحصیل در ریاضیات می‌شوند. آیا هیچ وقت از خود پرسیده‌اید که چرا ما با این سؤال مواجه هستیم؟ آن هم سؤالی که معمولاً با این قصد مطرح می‌شود که ریاضیات اصلاً بد است و سخت و فایده‌ای ندارد. چرا درکلاس‌های درس تاریخ، جغرافیا، دینی، فیزیک و سایر دروس این سؤال کمتر مطرح می‌شود یا اصلاً مطرح نمی‌شود؟ چرا وقتی که مثلاً معلم درکلاس درس تاریخ از فتوحات وکشورگشایی فلان شخص حرف می‌زند، همهٔ دانش‌آموزان به‌راحتی می‌فهمند؛ ولی وقتی معلم ریاضی از فتوحات اقلیدس، تالس، اویلر و دیگران حرف می‌زند و آنها را نشان می‌دهد به‌راحتی مورد استقبال قرار نمی‌گیرد؟ چرا وقتی که همه می‌دانند که در تمام کشورهای دنیا بچه‌ها از سال ورود به مدرسه تا دانشگاه، ریاضیات را مطالعه می‌کنند و این تنها چیزی است که شاید تمام کشورها به‌طور یک‌سان در آن وحدت نظر دارند، باز این سؤالِ «ریاضیات به چه درد می‌خورد؟» مطرح می‌شود؟ من فکر می‌کنم به‌جز تفاوت ماهیت ریاضی با سایر دروس، دو عامل مهم دیگر نیز در این موضوع دخیل هستند. یکی این‌که تمام کارهای روزانه، گفت‌وگوهای بین افراد در خانواده و برنامه‌های رادیو و تلویزیون و نوشته‌های روزنامه‌ها و غیره، به‌شکلی هستند که کار معلم‌هایی که با استدلال سروکار ندارند را راحت‌ترکرده است و عامل دیگری که ریاضیات را ظاهراً مشکل کرده است، شکل ارایه آن از بدو پیدایش است. از زمانی که دانش ریاضی و ریاضیدان به وجود آمدند، معمولاً ریاضیدان علم خود را به شکل معما مطرح می‌کرده و معمولاً دیگران به او به دیدهٔ برتری نگاه می‌کردند؛ از این رو، سعی آنها بر این بوده که یافته‌های خود را طوری عنوان کنند که نشان دهند از جای دیگری ایده نگرفته‌اند و نتایج‌شان اصیل و تازه است. در نتیجه، درکتب و منابع آن‌طورکه باید و شاید دربارهٔ ارتباط بین نتایج ریاضی بحث نشده و هر نتیجهٔ ریاضی، مهارت خاصی را برای یادگیری به خود اختصاص داده است. ولی باید دانست که بیشترکارهای ریاضی و حتی نتایج ریاضیدان‌های برجسته، معمولاً تعمیم کارها و مفاهیمی است که وجود داشته‌اند؛ هرچند بعضی افراد با مهارت خاصی نتایج خود را طوری ارایه می‌دهند که این تعمیم آشکار نیست و در نتیجه، کار اصیل‌تر به نظر می‌رسد. گرچه تقریباً همه معنی تعمیم را می‌دانند، بهتر است منظور خود را از تعمیم بیان کنم. منظور از تعمیم یک تعریف، تعریفی است که شامل دستهٔ بزرگ‌تری از اشیایی که تعریف اول به‌دست می‌دهد شود. تعمیم قضیه‌ای مثل A، قضیه‌ای‌ست که با همان فرض قضیه (یا کمتر)، نتیجهٔ وسیع‌تری به‌دست می‌دهد به‌طوری که قضیهٔ A از آن به‌دست می‌آید. به‌جز این موارد، در این‌جا منظور از تعمیم، این هم هست که بتوانیم یک قضیه یا نتیجه‌ای را از یک قسمت ریاضی به قسمت دیگری ببریم و در آنجا آن را بررسی و حل کنیم.

من اعتقاد دارم که ریاضی را باید «آن‌طورکه هست» به دیگران یاد دهیم. اولاً، باید توجه کرد که ریاضیات تنها مجموعه‌ای از حقایق نیست که آنها را به شکل قضیه، لم و مسأله به دیگران نشان دهیم؛ بل‌که ریاضی یک تفکر است که ما به‌وسیلهٔ این مجموعه از قضایا و مسایل، باید آن را درکسانی که خواستار آن هستند به‌وجود اوریم، تا هرکس با هر مقدار ریاضی که می‌داند بتواند با مسایل برخورد کند (چه مسایلی که در خود ریاضی مطرح می‌شوند و چه در خارج آن).

یکی از راه‌های ایجاد این تفکر در دانش‌آموزانِ سال‌های بالا و دانشجویان، این است که آنها را ترغیب کنیم که خودشان قضیه و مسأله تازه ارایه دهند؛ حتی اگر خود معلم و استاد قادر به انجام این کار نباشد. مهم نیست که قضیه یا مسألهٔ ارایه شده چقدر ساده و ابتدایی است؛ مهم این است که فکری تازه باشد. در علم، «سؤال» تازه و مناسب، از «پاسخ» مهم‌تر است. یک راه رسیدن به این هدف، این است که به آنها تفکر تعمیم دادن را یاد دهیم و تا آنجا که می‌توانیم مطالب را به‌شکل تعمیمی ارایه دهیم. باید به آنها یاد داد که تمام تاریخ ریاضیات، چیزی نیست جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی. باید به آنها گفت که راز تمام پیشرفت‌های علمی بشر از اول تاکنون به شکلی در تعمیم ـ نه در مفهوم کلی آن، بل‌که در تعمیم سیستم اعداد از اعداد طبیعی به اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد مختلط، اعداد چهار برگی و سیستم‌های جبری ـ نهفته است . . .

دکتر امیدعلی کرم‌زاده
استاد دانشگاه شهید چمران اهواز

خانهٔ ریاضیات اصفهان

خانهٔ ریاضیات اصفهان یک ساختمان دو طبقه است. با یک کتابخانهٔ کوچک، سایت کامپیوتر، آزمایشگاه ریاضی و کلاس‌هایی که هیچ شباهتی به کلاس‌های معمولی مدرسه ندارند. در هر کلاس به‌جای میز و نیمکت، چند میز بزرگ و چند صندلی دور هر میز قرار دارد تا بچه‌ها راحت‌تر با هم حرف بزنند! چون اینجا قرار نیست بچه‌ها ساکت بنشینند و فقط به چیزهایی که معلمشان روی تخته می‌نویسد گوش بدهند. اینجا قرار است با ریاضیات آشنا شوند نه به عنوان یک درس اجباری به عنوان یک علم. قرار است که ریاضیات را کشف کنند. یاد بگیرند در کوچه و خیابان و حتی معماری‌های سنتی اصفهان به دنبال ردپایی از ریاضیات باشند. قرار نیست بچه‌ها را برای کنکور یا حتی المپیاد آماده کنند، قرار است به بچه‌ها یاد بدهند با هم فکر کنند، با هم ببینند و با هم مسأله حل کنند. امتحانی در کار نیست و همه چیز با بحث و گفتگو حل می‌شود.

خانهٔ ریاضیات محیط آرامی است برای کشف دنیای زیبای ریاضی، اگر چه گاهی مشکلاتی آرامش این محیط را تهدید می‌کند.

آن‌چه در زیر می‌آید گزارش کوتاهی است از وضعیت خانه از زبان سرپرستان و اعضای خانهٔ ریاضیات. زمان تهیهٔ گزارش شهریور ۱۳۸۰ است. آقای خردپژوه، سرپرست خانه، دکتر رجالی، از مؤسسان، آقای سیادت موسوی، از مشاوران و چند تن از اعضای خانه ما را در تهیهٔ گزارش یاری کرده‌اند. مصاحبه را امید نقشینه ارجمند انجام داده و نجمه سروشی متن نهایی را تهیه کرده‌است.

تأسیس خانه

طرح تأسیس خانهٔ ریاضیات اولین بار توسط دانشگاه صنعتی شریف و شهرداری تهران به‌طور مشترک ارایه و در ستاد ملی سال جهانی ریاضیات تصویب شد. پس از آن به پیشنهاد دکتر تابش و با حمایت شهرداری اصفهان خانهٔ ریاضیات اصفهان در بهمن ۷۷ افتتاح شد و با برگزاری دورهٔ آشنایی با ریاضیات برای دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان فعالیت خود را آغاز کرد.

عضویت در خانه

اصولاً دو راه برای ورود به خانه وجود دارد، سهمیه مدارس و آزاد.

بر اساس سهمیهٔ تعیین شده، از هر کلاس دوم ریاضی یک نفر می‌تواند عضو خانه شود که انتخاب آن به عهدهٔ دبیر ریاضی مدرسه است و عمدتاً بر اساس نمرهٔ ریاضی، و علاقمندی بچه‌ها صورت می‌گیرد. البته اگر تعداد افراد علاقمند بیشتر باشد، از طریق مصاحبه می‌توانند انتخاب شوند.

دوره ریاضی

هر دوره با یک سری کارگاه آشنایی با ریاضیات آغاز می‌شود. در این کارگاه دو ماهه ـ دو جلسه در هفته ـ سعی می‌شود بچه‌ها با رشته‌های مختلف ریاضی آشنا شوند و تدریس مفاهیم پیشرفته هدف نیست.

بعد از آن کار کمی تخصصی‌تر می‌شود و هر کس با توجه به علاقه و توانایی‌هایش و پس از صحبت با مشاوران خانه جذب

یک هسته می‌شود. در حال حاضر هسته‌های آمار، هندسه، نظریهٔ اعداد و ترکیبیات فعالند.

کار در هسته‌ها به‌صورت گروهی است و در ضمن یک سری کلاس‌های تخصصی برای گروه‌ها تشکیل می‌شود. در این کلاس‌ها رابطهٔ معلمی و شاگردی مثل روش متداول در مدارس نیست. معلم بیشتر کار رفع اشکال انجام می‌دهد و بچه‌ها را راهنمایی می‌کند. البته همیشه قبل از مراجعه به معلم، همه چیز باید داخل گروه بررسی شده باشد.

کار گروهی

خانه به کار گروهی بچه‌ها خیلی اهمیت می‌دهد. اما سیستم آموزشی باعث شده بچه‌ها با آن سخت کنار بیایند و حتی بعضی‌ها را وادار به رفتن می‌کند. با این حال یکی از اهداف اساسی خانه ریاضیات جایگزین کردن کار گروهی به جای سیستم آموزشی فعلی مدارس است، که تا حدودی موفق بوده است. بچه‌ها کم کم عادت کرده‌اند. پس از طرح یک سؤال، همهٔ آنها شروع می‌شود در حالی که در شروع دوره، بچه‌ها سعی می‌کردند خودشان به تنهایی جواب را پیدا کنند.

در طول ترم یک سری جلسات بین مشاور هسته و اعضای آن تشکیل می‌شود. هر گروه دربارهٔ کارهایی که انجام داده گزارشی ارایه می‌کند و اگر گروهی تا آخر ترم کاری انجام ندهد ترم بعد ثبت نام نمی‌شود. سطح فعالیت هسته‌ها با هم متفاوت است. بعضی‌ها که فعال‌ترند یک موضوع را انتخاب می‌کنند، مطلب می‌خوانند، ترجمه می‌کنند و مسأله حل می‌کنند. برخی دیگر یک کتاب می‌خوانند و همان را خلاصه می‌کنند و چون هدف خانه آشنا کردن بچه‌ها با ریاضیات است با هیچ‌کدام مخالفت نمی‌کند.

آشنایی با کامپیوتر و اینترنت

علاوه بر کلاس‌های مختلف ریاضی، خانهٔ ریاضیات سعی دارد بچه‌ها را با کامپیوتر هم آشنا کند.

ابتدا آشنایی با سیستم عامل Windows و بعد یک سری کلاس‌های برنامه‌نویسی مثل پاسکال و C. در تابستان گذشته کلاس آشنایی با Windows، نرم‌افزارهای ریاضی و آمار و آشنایی با اینترنت برگزار شد. سعی بر این است با اتصال مستقیم به شبکه، کلاس‌های اینترنت توسعه پیدا کند. آدرس اینترنتی خانه، http://www.mathhouse.org است.

البته این کلاس‌ها به دانش‌آموزان محدود نمی‌شود بلکه دامنهٔ آن دبیران ریاضی اصفهان را نیز در بر می‌گیرد. هزینهٔ این کلاس‌ها بین معلمین، انجمن دبیران و خانهٔ ریاضیات اصفهان تقسیم می‌شود.

تشکیل School net هم طرح جدیدی است برای ایجاد یک شبکهٔ اینترانت در مدارس. در این شبکه بچه‌ها مستقیماً به اینترنت وصل نمی‌شوند و می‌توانند از برنامه‌هایی که خانه برای آنها download می‌کند، استفاده کنند. طرح این شبکه برای این است که بچه‌ها در دنیای بزرگ اینترنت گم نشوند! البته این طرح هنوز مورد بررسی است و اجرا نشده‌است.

برنامه‌های عمومی

علاوه بر کلاس‌ها و دوره‌های آموزشی برای اعضا، یک سری برنامه‌های عمومی نیز برگزار می‌شود.

این برنامه‌ها اغلب به‌صورت سمینار و سخن‌رانی است و هدف آنها عمومی کردن ریاضیات است. موضوع آنها مفاهیم سادهٔ ریاضی است تا برای همه قابل فهم باشد. برخی برنامه‌های

برگزار شده در خانه عبارتند از: کارگاه آموزش اسطرلاب توسط پروفسور هوخندایک از هلند، برگزاری روز ریاضیات با حضور استاد پرویز شهریاری و دکتر آرش رستگار، سخن‌رانی پروفسور ساباراپاپا پیرامون تاریخ اعداد در هندوستان، سخن‌رانی دکتر خاتون‌آبادی در مورد ریاضیات و هنر، برگزاری اردوی سه روزهٔ ریاضی در باغ غدیر، جشنوارهٔ دو روزهٔ خانهٔ ریاضیات و برگزاری روز آمار.

آخرین کار هم برگزاری جشنوارهٔ پرفسور رضا در سال گذشته بود. در این جشنواره کسانی که کارهای پژوهشی انجام داده بودند کارهای خود را ارایه دادند و در نهایت به ۱۰ نفر از بهترین آثار، جوایزی داده شد.

خانه و کنکور دانشگاه

همهٔ افرادی که برای دورهٔ آشنایی با ریاضیات انتخاب می‌شوند جذب خانه نمی‌شوند. اما برای اکثر بچه‌ها شیوهٔ کار ــ کار گروهی ــ و فعالیت‌های خانه آن‌قدر جذاب هست که بمانند و با همهٔ سختی‌هایی که وجود دارد کنار بیایند.

با این حال پای صحبت این‌ها هم که بنشینی، می‌بینی که باز هم نگران آینده هستند و دغدغه‌های کنکور راحتشان نمی‌گذارد. حتی بعضی از آنها انتظار دارند که خانه برایشان یک سری کلاس کنکور برگزار کند، کاری که مسئولین خانه آن را به هیچ عنوان منطبق بر اهداف خانه نمی‌دانند.

این مشکلات باعث شده مسئولان خانه به دانش‌آموزان سال اول برای ورود به دوره بیاندیشند. چون آنها یک سال دورتر از کنکور هستند و برنامه‌های طولانی‌تری را می‌توان برای آن‌ها بدون فشار کنکور اجرا کرد.

همچنین خانه طرح‌هایی را هم برای دانش‌آموزان راهنمایی و دبستان بررسی می‌کند تا در صورت امکان بتواند آنها را نیز بیشتر با ریاضی آشنا کند. شاید در آینده‌ای نه چندان دور، شاهد فعالیت بچه‌های دبستانی در خانهٔ ریاضیات باشیم.

کلام آخر

خانهٔ ریاضیات از هر نوآوری که با اهدافش تضاد نداشته باشد استقبال می‌کند.

خانهٔ ریاضیات فقط راه‌نمای بچه‌ها است و سعی می‌کند دقیق دیدن و عمیق فکرکردن را به آنها بیاموزد. به تعبیر مسئولین خانه، خانهٔ ریاضیات مثل یک زمین بازی است، افرادی شرکت می‌کنند، قواعد بازی را یاد می‌گیرند، یک عده علاقمند می‌شوند و بازی را ادامه می‌دهند و قهرمان می‌شوند و بعضی‌ها از همان اول و یا در نیمه راه بازی را رها می‌کنند.

«یه جور دیگه»

شبنم اختری

در این مقاله، سه مسأله و راه‌حل‌هایشان را خواهیم دید. بهتر است قبل از دیدن حل‌ها، سعی کنید که خودتان مسأله‌ها را حل کنید. در این صورت، حتی اگر موفق به حل کردن آنها نشوید، از دیدن راه‌حل‌ها بیشتر لذت می‌برید!

خصوصیت مشترک این سه راه‌حل، این است که در همهٔ آنها «یه جور دیگه» به مساله نگاه شده‌است؛ هر چند در نگاه‌های اول به‌نظر نمی‌رسد که مساله «این‌جوری» حل شود. امیدوارم ازاین راه‌حل‌های «جورواجور» خوشتان بیاید!

مسأله ۱. *اعداد حقیقی مثبت $R_1, \ldots, R_m$ و $C_1, \ldots, C_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید*

$$R_1 + \cdots + R_m = C_1 + \cdots + C_n.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که می‌توان حداکثر $m+n$ عدد حقیقی مثبت را در خانه‌های جدول $m \times n$ طوری قرار داد که مجموع اعداد سطر i ام $(1 \leq i \leq m)$ برابر R_i و مجموع اعداد ستون j ام $(1 \leq j \leq n)$ برابر C_j باشد (بقیهٔ خانه‌ها خالی می‌مانند).

فرض کنید $R_1 + \cdots + R_m = C_1 + \cdots + C_n = x$. محور اعداد مثبت را در نظر بگیرید و x را روی آن مشخص کنید. ابتدا با مداد زرد، پاره خط ox را به m قسمت با طول‌های به ترتیب R_1 تا R_m تقسیم کنید. تا حالا m خط تقسیم روی پاره خط ox داریم. این بار با مداد آبی پاره خط ox را به n قسمت با طول‌های به ترتیب C_1 تا C_n تقسیم کنید؛ یعنی n خط تقسیم به رنگ آبی داریم و حداکثر $m+n$ خط تقسیم به رنگ‌های آبی یا زرد (ممکن است بعضی از خطوط تقسیم زرد بر خطوط آبی منطبق شوند).

حال در جدول $m \times n$ در خانه‌ای که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد، مقدار طول پاره‌خط سبز[1] که هم در پاره‌خط به طول R_i و هم در پاره خط به طول C_j قرار دارد را قرار دهید؛ یعنی اشتراک پاره‌خط زرد به‌طول R_i و پاره‌خط آبی به‌طول C_j. اگر چنین اشتراکی وجود نداشته باشد، هیچ عددی در خانه (i,j) قرار نمی‌دهیم. چون حداکثر $m+n$ پاره‌خط سبز داریم، حداکثر $m+n$ عدد برای قرار دادن در خانه‌های جدول خواهیم داشت. حال، اعداد یکی از سطرها مثل سطر اول را درنظر بگیرید. در هر یک از خانه‌های این سطر، یا عددی نوشته نشده و یا مقدار طول اشتراک R_1 با یکی از C_j نوشته شده؛ اما چون جمع همهٔ این مقدارها برابر خود R_1 است، پس مجموع اعداد سطر اول R_1 است و برای هر سطر یا ستون دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

مسأله ۲. *ثابت کنید دستگاه معادلات*

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - t = n \\ x + y - 2z - 2t = m \end{cases}$$

برای هر m و n صحیح، جواب صحیح دارد.

حرکات اسب در صفحهٔ شطرنج را به‌یاد آورید! حرکتی که در آن اسب دو خانه به‌سمت راست و یکی به‌سمت بالا حرکت می‌کند را حرکت X بنامید. قرینهٔ این حرکت، دو خانه به چپ و یکی به پایین است.

[1] یعنی ترکیب آبی و زرد.

حرکتی که در آن اسب دو خانه به چپ و یکی به بالا می‌رود را حرکت Y بنامید. قرینهٔ این حرکت، دو خانه به راست و یکی پایین است.

حرکتی که در آن اسب یک خانه به راست و دو تا به پایین می‌رود را حرکت Z بنامید. قرینهٔ این حرکت، یکی به چپ و دو تا به بالا است.

بالاخره، حرکتی که اسب در آن یک خانه به چپ و دو تا به پایین می‌رود را حرکت T بنامید. قرینهٔ این حرکت، یکی به راست و دو تا به بالا است.

وقتی که اسب در یکی از خانه‌های جدول قرار دارد، با انجام یکی از هشت حرکتی که در بالا گفته شد می‌تواند به هشت خانه مختلف برود و این هشت حرکت، تنها حرکاتی هستند که اسب مجاز به انجام آنهاست.

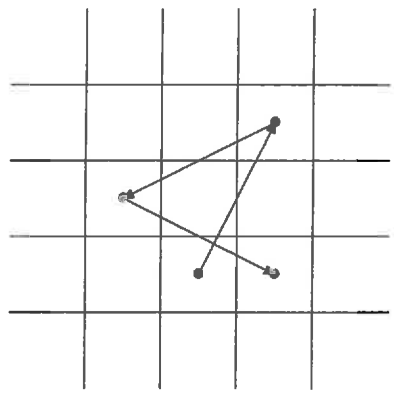
حال در صفحهٔ شطرنج نامتناهی، مرکز یکی از مربع‌ها را به‌عنوان مبدأ مختصات انتخاب کنید و از این مبدأ دو خط عمود (هر یک موازی یکی از اضلاع مربع) را به‌عنوان محورهای مختصات در نظر بگیرید. اگر طول اضلاع مربع‌های شطرنج را واحد فرض کنیم، مرکز هر مربع نقطه‌ای است با مختصات صحیح.

هر یک از حرکت‌های اسب را در نظر بگیرید: با یک بار انجام دادن حرکت X دو تا به مختصات محور x ها و یکی به مختصات محور y ها افزوده می‌شود و با یک بار انجام حرکت قرینهٔ X، دو تا از مختصات محور x ها و یکی از مختصات محور y ها کم می‌شود.

با یک بار انجام حرکت Y، دو تا از مختصات محور x ها کم و یکی به مختصات محور y ها افزوده می‌شود و با یک بار انجام حرکت قرینهٔ Y، دو تا به مختصات محور x ها اضافه و یکی از مختصات محور y ها کم می‌شود.

با یک بار انجام حرکت T، یکی از مختصات محور x ها و دو تا از مختصات محور y ها کم می‌شود و با یک بار انجام حرکت قرینهٔ T، یکی به مختصات محور x ها و دو تا به مختصات محور y ها اضافه می‌شود.

فرض‌کنید A یکی از حرکت‌های X، Y، Z یا T باشد و a را برابر «تعداد حرکت‌های A منهای تعداد حرکت‌های قرینهٔ A» تعریف‌کنید (با این حساب، مثلاً t برابر است با «تعداد حرکت‌های T منهای تعداد حرکت‌های قرینهٔ T»). حالا یک‌بار دیگر به دستگاه معادلات نگاه کنید! معلوم است که جواب داشتن این دستگاه معادلات، معادل است با این‌که اسب بتواند از خانهٔ مبدأ به خانه‌ای که مختصات مرکزش (m, n) است برود. حالا کافی‌است که ثابت کنیم که اسب می‌تواند به هرکدام از خانه‌های مجاورش برسد. شکل زیر، حرکتی را نشان می‌دهد که اسب از خانه‌ای که در آن قرار دارد به خانهٔ سمت راستی مجاور می‌رود (از $(0,0)$ به $(1,0)$). به‌طور مشابه، به هر یک از سه خانهٔ مجاور دیگرش نیز می‌تواند برود؛ یعنی در تمام جهات می‌تواند به اندازهٔ یک واحد تغییر مختصات بدهد.



پس اسب می‌تواند با شروع از خانهٔ مبدأ با انجام تعداد مناسب این حرکت‌ها تغییر مختصات دل‌خواه بدهد؛ مثلاً از $(0,0)$ به (m, n) برود.

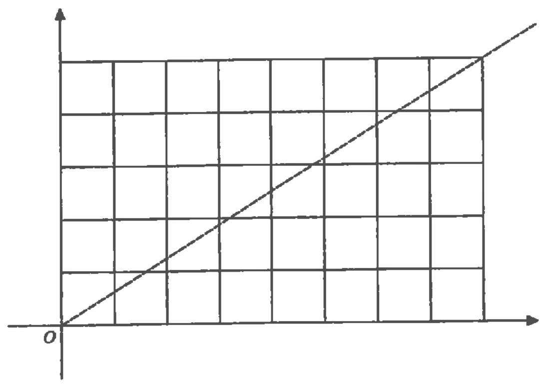
مسأله ۳. *فرض کنید p و q دو عدد اول فرد متمایز باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم*

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

شاید ظاهر مساله اصلاً خوش‌آیند نباشد؛ اما راه‌حل زیبای آینشتاین، همین مسالهٔ ظاهراً سخت و خسته‌کننده را دوست‌داشتنی و لذت‌بخش می‌سازد. در این راه‌حل، تنها از یک قضیهٔ ابتدایی در نظریهٔ اعداد استفاده می‌شود.

گزاره. هر گاه p و q دو عدد اول متمایز باشند و p مقسوم‌علیه aq باشد، p مقسوم‌علیه a است.

برای اثبات تساوی بالا، مستطیل زیر را در نظر بگیرید.



چون p و q فردند، $\frac{p-1}{2}$ و $\frac{q-1}{2}$ اعدادی صحیح هستند.

به دو طریق نقاط صحیح داخل این مستطیل را می‌شماریم. منظور از «نقطهٔ صحیح» نقطه‌ای است که طول و عرض آن هر دو صحیح باشند.

معادلهٔ خطی که مبدأ مختصات را به نقطهٔ $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}) = x$ وصل می‌کند $y = \frac{q}{p}x$ است. ادعا می‌کنیم هیچ نقطهٔ صحیحی روی پاره‌خط ox نیست: فرض کنید (a, b) نقطه‌ای صحیح روی خط $y = \frac{q}{p}x$ باشد؛ پس $b = \frac{q}{p}a$ یا $pb = qa$. از گزاره‌ای که گفته شد، می‌دانیم که p مقسوم‌علیه a و q مقسوم علیه b است و چون همه این اعداد مثبت هستند، $p \leq a$ و $q \leq b$؛ یعنی (a, b) خارج پاره خط ox است.

چون هیچ نقطهٔ صحیحی روی قطر مستطیل (پاره خط ox) نیست، هر نقطهٔ صحیحِ داخل مستطیل، یا بالای قطر است و یا زیر قطر. بیایید نقاط صحیح زیر قطر با طول i را بشماریم.

چون طول نقاط داخل مستطیل، یکی از اعداد ۱ تا $\frac{p-1}{2}$ است، پس i نیز یکی از همین اعداد است. همهٔ نقاط صحیح زیر قطر با طول i، روی پاره‌خطی است که موازی محور عرض‌هاست و نقطهٔ $(i, ۰)$ را به $(i, \frac{qi}{p})$ روی ox وصل می‌کند. طول این پاره خط، $\frac{qi}{p}$ است؛ پس تعداد نقاط صحیح با طول i که زیر قطر واقع‌اند، همان بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از $\frac{qi}{p}$ بزرگ‌تر نیست؛ یعنی زیر قطر $\left[\frac{qi}{p}\right]$. همان‌طور که گفتیم، طول هر نقطهٔ صحیح یکی از اعداد $\frac{p-1}{2}$ است؛ پس تعداد آنها مساوی است با $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right]$. به همین ترتیب، تعداد نقاط صحیح بالای قطر برابر است با $\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right]$؛ یعنی تعداد نقاط صحیح داخل مستطیل برابر است با

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right].$$

حال بیایید نقاط صحیح داخل مستطیل را به طریقی دیگر بشماریم.

طول این نقاط، یکی از اعداد $\{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ و عرض آنها یکی از اعداد $\{1, \ldots, \frac{q-1}{2}\}$ است؛ یعنی اگر (x, y) نقطهٔ صحیحی داخل مستطیل باشد، برای x، $\frac{p-1}{2}$ انتخاب و برای y، $\frac{q-1}{2}$ انتخاب داریم؛ پس $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ نقطهٔ صحیح داخل مستطیل وجود دارد. در نتیجه، نشان داده‌ایم که

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qi}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{pj}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

وارون تابع‌های مثلثاتی

احمد مرشدیان

توابع مثلثاتی از قبیل سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت کاربردهای بسیاری در شاخه‌های مختلف ریاضیات، به ویژه حسابان و آنالیز دارند. در مقالهٔ قبل[1] به این تابع‌ها به‌عنوان پرکاربردترین توابع متناوب اشاره کردیم؛ اما آن‌چه که این‌بار قصد پرداختن به آن را داریم «خودِ توابع مثلثاتی» نیستند. در واقع، گاهی اوقات به‌جای این‌که بخواهیم بدانیم «نسبت‌های مثلثاتی کمان مفروضی چه‌قدر است»، علاقمندیم بدانیم که «چه کمانی دارای نسبت‌های مثلثاتی مورد نظر است». پاسخ به این سؤال، به‌طور طبیعی ما را به‌سمت بررسی وارون توابع مثلثاتی هدایت می‌کند.

مبانی

اگر f تابعی حقیقی از متغیر حقیقی x باشد، یعنی داشته باشیم

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto f(x)\end{cases}$$

و $y_\circ$ عددی حقیقی باشد، مایلیم که بدانیم آیا عددی حقیقی مثل x وجود دارد که $f(x)=y_\circ$ یا نه؟ واضح است که اگر $y_\circ\notin R_f$ (یعنی $y_\circ$ عضوی از بُرد تابع f نباشد) چنین عددی یافت نمی‌شود؛ اما اگر $y_\circ\in R_f$ آنگاه حداقل یک x مانند $x_\circ$ یافت می‌شود به‌طوری که $f(x_\circ)=y_\circ$. از طرفی می‌دانیم که اگر f تابعی یک‌به‌یک نباشد، این $x_\circ$ لزوماً یکتا نیست؛ یعنی به‌طور مثال ممکن است بتوان عددی حقیقی مثل x_1 را هم یافت که $x_1\neq x_\circ$ ولی $f(x_1)=y_\circ$. در چنین حالتی اگر از ما بپرسند که $y_\circ$ تصویر (یا نگارهٔ) کدام عنصرِ دامنه تحتِ تابع f است، ممکن است که در جواب بگوییم $y_\circ$ تصویر $x_\circ$ است؛ حال آن‌که دیگری در پاسخ به این سؤال می‌تواند بگوید $y_\circ$ تصویر x_1 است، و واقعیت این است که هر دو سخن درستی گفته‌ایم؛ زیرا $f(x_\circ)=f(x_1)=y_\circ$.

مثال ۱ . تابع زیر را در نظر بگیرید

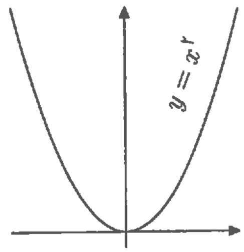
$$\begin{cases} C:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ C(t)=\text{دمای هوای نقطهٔ معین از شهر تهران بر حسب سانتیگراد در زمان } t\end{cases}$$

حتی اگر خود را به یک روز خاص از پاییز محدود کنیم، آیا می‌توان به این سؤال که «در چه ساعتی از شبانه روز دمای هوا 15° سانتیگراد بوده است؟» جواب واحدی داد؟ واضح است که هم در ابتدای صبح و هم در اوایل شب ممکن است چنین دمایی رخ داده باشد (تازه اگر با یک روز ابری سروکار نداشته باشیم!) و به این ترتیب، اگر بخواهیم رابطهٔ «دماها» با «ساعات» روز را برقرار کنیم، به‌نظر می‌رسد که رابطهٔ حاصل، تابع نخواهد بود.

همان‌طور که می‌دانیم شرط کافی برای این‌که وارون (معکوس) تابع f (یعنی رابطه‌ای که از جابه‌جا کردن نقش متغیر مستقل و متغیر وابسته به‌دست می‌آید) هم تابع باشد، آن است که f یک‌به‌یک باشد. حال اگر تابعی یک‌به‌یک نبود، با تغییر دامنهٔ آن و در واقع تحدید دامنهٔ

۱) احمد مرشدیان، توابع متناوب. ماهنامهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۳

تابع، به‌طوری که تابع جدید یک‌به‌یک باشد، می‌توان از تابع وارون این تابع جدید صحبت کرد. مثال زیر مطلب اخیر را روشن می‌سازد:

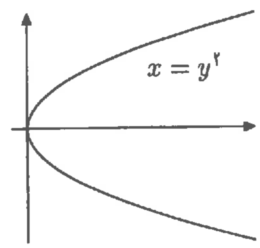


مثال ۲. تابع

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$$

به وضوح یک‌به‌یک نیست؛ مثلاً $f(۲) = f(-۲) = ۴$.

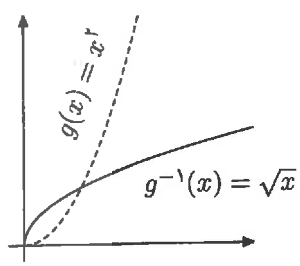
اگر نقش متغیر وابسته و مستقل را عوض کنیم، به نمودار زیر دست می‌یابیم که به‌وضوح نمودار تابع نیست.



اکنون اگر دامنهٔ تابع f را محدود کنیم (مثلاً به‌جای $\mathbb{R}$ قرار دهیم $\mathbb{R}^{\geq ۰}$)، در این‌صورت تابع

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^{\geq ۰} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^۲ \end{cases}$$

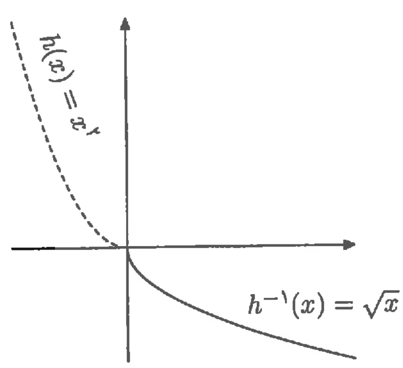
به‌وضوح یک‌به‌یک است و $g^{-۱}$ با ضابطهٔ $g^{-۱}(x) = \sqrt{x}$ وارون آن خواهد بود. به شکل روبه‌رو توجه کنید.



واضح است که می‌توانستیم دامنهٔ f را به‌جای $\mathbb{R}^{\geq ۰}$ به $\mathbb{R}^{\leq ۰}$ محدود کنیم:

$$\begin{cases} h : \mathbb{R}^{\leq ۰} \to \mathbb{R} \\ h(x) = x^۲ \end{cases}$$

در این‌صورت نمودار h به‌صورت زیر خواهد بود.



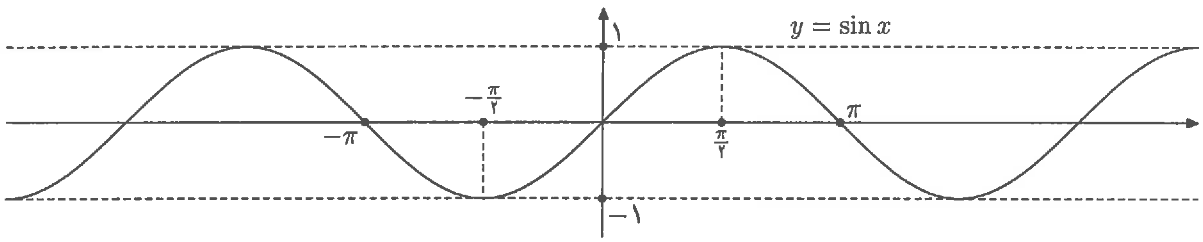
هم‌چنین، واضح است که اگر دامنهٔ f را محدودتر کنیم، دیگر همهٔ مقادیر قبلی که توسط f پوشیده می‌شدند، پوشش نخواهد یافت؛ مثلاً اگر قرار دهیم

$$\begin{cases} k : [۰, ۵] \to \mathbb{R} \\ k(x) = x^۲ \end{cases}$$

آنگاه $R_k = [۰, ۲۵]$[۱]. نکتهٔ دیگری که یادآوری آن خالی از فایده نیست و در مثال ۲ نیز قابل مشاهده است این است که اگر توابع f و g وارون یکدیگر باشند آنگاه $D_f = R_g$ و $R_f = D_g$. یعنی جای دامنه و بُرد عوض می‌شود: دامنهٔ یکی، بُرد دیگری است و برعکس.

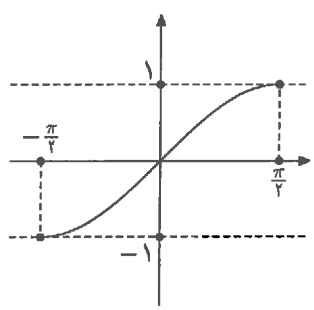
سینوس

حال آماده‌ایم تا راجع به وارون تابعی مثل سینوس صحبت کنیم:



$$\begin{cases} \sin : \mathbb{R} \to [-۱, ۱] \\ y = \sin x \end{cases}$$

نمودار تابع سینوس نشان می‌دهد که به هیچ وجه با یک تابع یک‌به‌یک سر و کار نداریم؛ مثلاً $\sin ۰ = \sin \pi = \sin ۲\pi = ۰$. حال می‌خواهیم با تکنیکی که در مثال ۲ آموختیم، دامنهٔ تابع sin را چنان محدود کنیم که اولاً تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و ثانیاً هنوز هم تمام مقادیر مابین ۱− و ۱ (یعنی بازهٔ $[-۱, +۱]$) پوشیده شوند. مرسوم است که دامنهٔ تابع جدید را $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ می‌گیرند؛ بنابراین اگر این تابع جدید را f بنامیم داریم



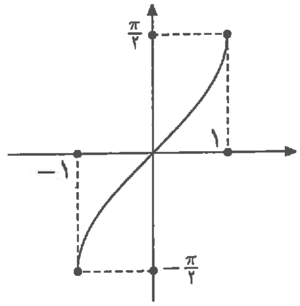
$$\begin{cases} f : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \longrightarrow [-۱, ۱] \\ f(x) = \sin x \end{cases}$$

که به‌وضوح نمودار یک تابع یک‌به‌یک است.

تذکر. با کمی دقت می‌توان مشاهده کرد که می‌توان به‌جای $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ از هر بازه‌ای به طول π و به شکل $[k\pi\frac{\pi}{۲}, k\pi + \frac{\pi}{۲}]$ $(k \in \mathbb{Z})$ به‌عنوان دامنهٔ جدید استفاده کرد؛ اما همان‌گونه که گفته شد فاصلهٔ استاندارد متداول، $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ است $(k = ۱)$.

حال اگر مثلاً با نقطه‌یابی نمودار وارون تابع f در بالا را به‌دست آوریم، شکلی مانند شکل زیر حاصل خواهد شد.

۱) منظور از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، مجموعهٔ همهٔ x های حقیقی‌ای است که $a \leq x \leq b$ و مشابهاً منظور از بازهٔ باز (a, b)، مجموعهٔ همهٔ x های حقیقی‌ای است که $a < x < b$.



$$\begin{cases} g:[-1,+1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)=\sin y \end{cases}$$

نامگذاری. مرسوم است که تابع g اخیر را با Arcsin (بخوانید آرک‌سینوس) نشان می‌دهند.

تعریف ۱. اگر تابع $f:D_f\to R_f$ وارون‌پذیر باشد، وارون آن را به f^{-1} نشان می‌دهیم و داریم

$$\begin{cases} f^{-1}:R_f\to D_f \\ f^{-1}(\alpha)=\beta\Leftrightarrow f(\beta)=\alpha \end{cases}$$

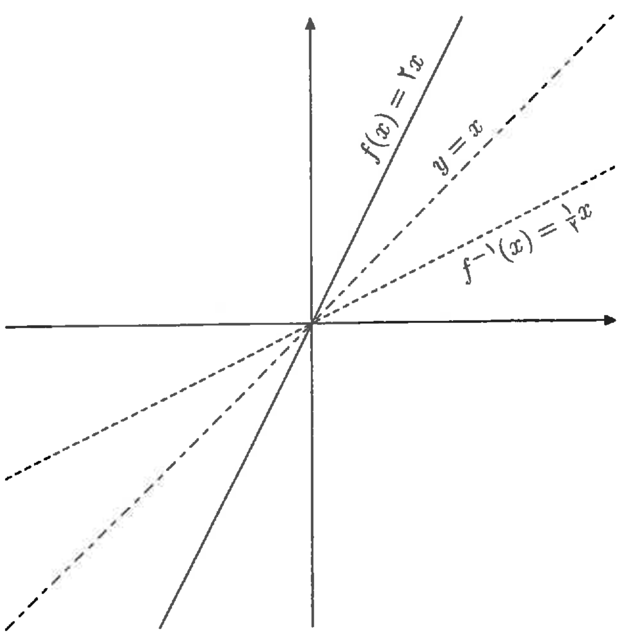
بنابر آن‌چه که قبلاً گفتیم، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن f، یک‌به‌یک بودن آن است و در این حالت، به‌وضوح f^{-1} نیز تابع خواهد بود.

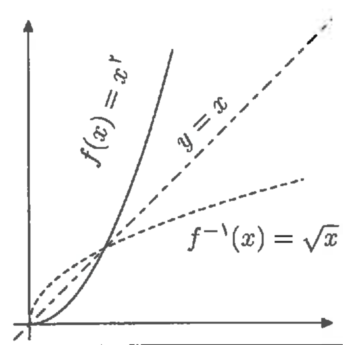
تمرین ۱. *نشان دهید f^{-1} نیز تابعی یک‌به‌یک (و در نتیجه وارون‌پذیر) است.*

تمرین ۲. *نشان دهید که وارون f^{-1}، همان تابع f است (وارونِ وارونِ یک تابع، خود آن تابع است؛ به‌عبارت دیگر، $f=(f^{-1})^{-1}$)*[1].

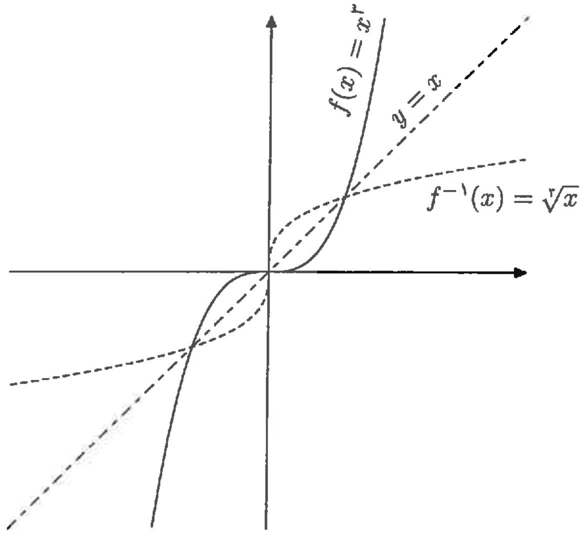
پیش از ادامهٔ بحث تذکر دو نکتهٔ کلی دربارهٔ یک تابع وارون‌پذیر و تابع وارونش لازم است. اول این‌که نمودار f در واقع نمودار تابع f^{-1} هم هست؛ اما از آنجا که عادت داریم متغیر مستقل را روی محور افقی و متغیر وابسته را روی محور قائم در نظر بگیریم، برای f^{-1} نمودار جداگانه‌ای رسم می‌کنیم و مقادیر دامنهٔ آن (که همان مقادیر بُرد f هستند) را روی محور افقی قرار می دهیم.

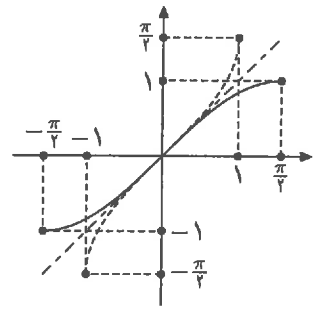
دوم این‌که با دقت در مثال‌های زیر می‌توان دریافت که اگر نمودار f و f^{-1} را هم‌زمان در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، این دو نمودار نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه هستند.





۱) دو تابع f و g را برابر گوییم اگر دامنه‌هایشان و مقادیری که به اعضای دامنهٔ مشترکشان نسبت می‌دهند برابر باشند.



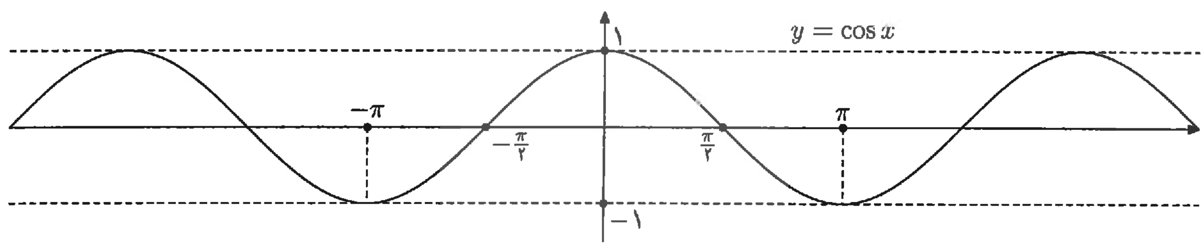


تمرین ۳. *مطلب بالا را به‌طور تحلیلی ثابت کنید.*

توجه به تقارن نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ (نیم‌ساز ربع اول و سوم)، ما را در رسم نمودار $f^{-۱}$، وقتی که نمودار f در دست است یاری می‌رساند؛ به‌ویژه وقتی که ضابطهٔ f و در نتیجه ضابطهٔ $f^{-۱}$ را در دست نداریم.

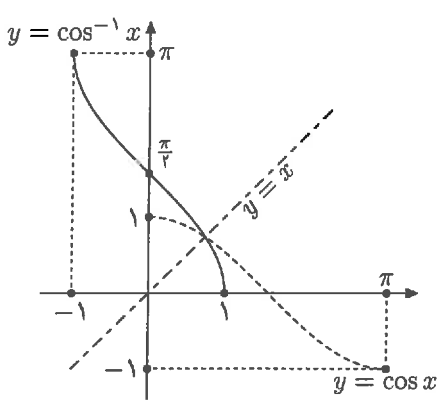
کسینوس

همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، تابع کسینوس نیز یک‌به‌یک نیست؛ پس باید دامنهٔ آن را محدود کنیم. متداول است که دامنهٔ جدید را بازهٔ $[۰, \pi]$ اختیار می‌کنند.



با توجه به شکل نیز می‌توان دریافت که هر بازه به طول π و به شکل $[k\pi, \pi + k\pi]$ نیز قابل قبول است (یعنی تابع کسینوس در این فواصل یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است).

نام‌گذاری. با محدود کردن دامنهٔ تابع کسینوس به بازه $[۰, \pi]$، تابع وارون به‌دست آمده را با Arccos (بخوانید آرک‌کسینوس) نشان می‌دهند.



$$\begin{cases} \text{Arccos} : [-۱, ۱] \longrightarrow [۰, \pi] \\ y = \text{Arccos}\, x \Longleftrightarrow x = \cos y \end{cases}$$

مثال ۳. داریم $\operatorname{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$ زیرا بنابر تعریف

$$\begin{cases}\operatorname{Arcsin}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ \operatorname{Arcsin}x=\theta\Leftrightarrow\sin\theta=x\end{cases}$$

پس باید زاویه‌ای بیابیم که الف) $\sin\theta=x$ و ب) $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

واضح است که زوایای بسیاری در شرط (الف) صدق می‌کنند؛ مثلاً $\frac{\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{2}$، $-\frac{3\pi}{2}$ و کلاً هر زاویه به‌شکل $\frac{\pi}{2}+2k\pi$؛ ولی فقط $\frac{\pi}{2}$ خاصیت (ب) را هم دارد و بنابراین همان‌طورکه از یک تابع توقع داریم، $\operatorname{Arcsin}(1)$ فقط و فقط برابر یک مقدار خواهد بود و آن $\theta=\frac{\pi}{2}$ است.

با در نظر گرفتن شرط (ب) می‌توان به راحتی جدول زیر را تنظیم کرد:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arcsin}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

مشابهاً برای محاسبهٔ $\operatorname{Arccos}x$ و با توجه به تعریف Arccos، باید θ ای را بیابیم که الف) $\cos\theta=x$ و ب) $0\le\theta\le\pi$؛ پس جدولی با مقادیر زیر خواهیم داشت.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{Arccos}x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

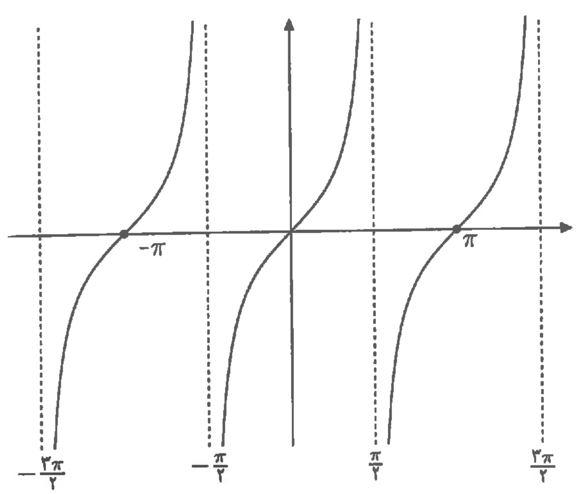
تذکر. فراموش نکنید که پرسش‌هایی نظیر $\operatorname{Arcsin}(2)=?$ و یا $\operatorname{Arccos}(-5)=?$ جوابی نخواهند داشت؛ چون سینوس هیچ زاویه‌ای ۲ نیست و کسینوس هیچ زاویه‌ای ۵− نیست. فراموش نکنید که ورودی توابع Arcsin و Arccos باید مقداری در بازهٔ $[-1,1]$ باشد و متناظراً مقادیر خروجی هم به‌صورت زیر خواهند بود.

$$-\frac{\pi}{2}\le\operatorname{Arcsin}x\le\frac{\pi}{2}\quad,\quad 0\le\operatorname{Arccos}x\le\pi$$

(کمانی در ربع اول یا چهارم)   (کمانی در ربع اول یا دوم)

تانژانت

نمودار تانژانت به شکل زیر است:



پس باز هم باید دامنهٔ تابع را محدود کنیم. با توجه به آن‌چه دربارهٔ نحوهٔ مناسب محدود کردن دامنه در ابتدای مقاله آمد و این تمایل که دامنهٔ تعریف یک‌پارچه باشد، هر بازه‌ای به طول π و به‌شکل $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ مناسب است. توجه داشته باشید که اصولاً مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ جزو دامنهٔ تعریف تابع تانژانت نیستند و به همین دلیل بازهٔ فوق‌الذکر، باز است. اما بازهٔ متداول، فاصلهٔ باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است که به ازای $k = 0$ به‌دست می‌آید.

پس تابع وارون تانژانت در این فاصله، که آن را با Arctan نمایش داده و آرک‌تانژانت می‌نامیم، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{Arctan} x = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = x \end{cases}$$

بنابراین تابع آرک‌تانژانت، هر عدد حقیقی را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند (دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است)، ولی مقادیر آن در رابطهٔ

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$$

صدق خواهند کرد و در نتیجه کمانی در ربع اول یا چهارم به‌دست می‌دهند. به‌علاوه، می‌توانیم جدول زیر را هم تشکیل بدهیم.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Arctan} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

با کمی دقت در شکل، می‌توان روابط حدی $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2}$ را به‌دست آورد.

کُتانژانت

اگر در اینجا نیز برای محدود کردن دامنه، تمایل داشته باشید که یکپارچگی دامنه نیز حفظ شود، هر بازه‌ای به طول π و به شکل $(k\pi, \pi + k\pi)$ مناسب است. مجدداً توجه داشته باشید که اصولاً مضارب π جزو دامنهٔ تعریف تابع کتانژانت نیستند و به‌همین دلیل بازهٔ فوق‌الذکر باز است. اما بازهٔ متداول، بازهٔ $(0, \pi)$ است که به‌ازای $k = 0$ به‌دست می‌آید. پس تابع وارون کتانژانت در این فاصله که با Arccot (آرک‌کتانژانت) نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \operatorname{Arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \\ \operatorname{Arccot} x = \theta \Leftrightarrow \cot\theta = x \end{cases}$$

بنابراین، تابع آرک‌کتانژانت هر عدد حقیقی را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند (دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است)، ولی مقادیر آن در رابطهٔ

$$0 < \operatorname{Arccot} x < \pi$$

صدق خواهند کرد و در نتیجه کمانی در ربع اول یا دوم به‌دست می‌دهند. به‌علاوه، می‌توانیم جدول زیر را هم تشکیل بدهیم.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Arccot} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

با کمی دقت می‌توان روابط حدی $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arccot} x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arccot} x = \pi$ را به‌دست آورد.

بررسی هم‌زمان توابع آرک‌سینوس، آرک‌کسینوس، آرک‌تانژانت و آرک‌کتانژانت

۱) دامنهٔ تعریف آرک‌سینوس و آرک‌کسینوس، بازهٔ $[-1, 1]$ و دامنهٔ تعریف آرک‌تانژانت و آرک‌کتانژانت، $\mathbb{R}$ است.

۲) همهٔ این تابع‌ها کران‌دار[1] هستند.

۱) تابع f را کران‌دار گوییم اگر M مثبتی وجود داشته باشد که‌به ازای تمام x ها در دامنهٔ f، داشته باشیم $|f(x)| < M$.

۳) از آنجا که دامنهٔ تعریف همهٔ آنها (حول مبدأ) متقارن است[۱]، مناسب است که زوج و فرد بودن آنها را بررسی کنیم. نتیجهٔ این بررسی با توجه به تعاریف یا نمودارهای این چهار تابع چنین است.

۱ـ آرک‌سینوس و آرک‌کتانژانت توابعی فرد هستند و داریم

$$\begin{cases} \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin}(x), & -1 \le x \le +1 \\ \operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan}(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

۲ـ توابع آرک‌کسینوس و آرک‌کتانژانت نه زوج هستند و نه فرد و داریم:

$$\begin{cases} \operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x) \ , & -1 \le x \le +1 \\ \operatorname{Arccot}(-x) = \pi - \operatorname{Arccot}(x) \ , & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

۴) به‌ازای تمام x هایی که در دامنهٔ تعریف هستند، روابط زیر برقرارند.

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \quad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x, \quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x, \quad \cot(\operatorname{Arccot} x) = x.$$

۵) اگر در (۴) ترتیب عمل کردن توابع را عوض کنیم، هیچ‌کدام از روابط برقرار نخواهند بود. یعنی در حالت کلی

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) \ne x, \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) \ne x, \quad \operatorname{Arctan}(\tan x) \ne x, \quad \operatorname{Arccot}(\cot x) \ne x.$$

مثال ۴. داریم $\operatorname{Arcsin}(\sin(2\pi)) = \operatorname{Arcsin}(0) = 0$؛ زیرا بنابر تعریف باید داشته باشیم $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arcsin} x \le \frac{\pi}{2}$.

مثال ۵. داریم $\operatorname{Arccos}(\cos(\frac{3\pi}{2})) = \operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$؛ زیرا بنابر تعریف باید داشته باشیم $0 \le \operatorname{Arccos} x \le \pi$.

مثال ۶. داریم $\operatorname{Arctan}(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$؛ زیرا بنابر تعریف باید داشته باشیم $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$.

مثال ۷. داریم $\operatorname{Arccot}(\cot(-\frac{\pi}{2})) = \operatorname{Arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$؛ زیرا بنابر تعریف باید داشته باشیم $0 < \operatorname{Arccot} x < \pi$.

علت آن‌چه در بالا اتفاق افتاد، آن است که تابعِ Arcsin وارون تابع سینوس روی تمام $\mathbb{R}$ نیست، بل‌که همان‌طور که گفته شد، Arcsin وارونِ تابع سینوس، روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ است و $2\pi \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و مشابهاً در مثال ۵، $\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]$، و در مثال ۶ $\frac{3\pi}{4} \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و در مثال ۷ $-\frac{\pi}{2} \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. اما اگر این محدودیت‌ها را به‌ترتیب بر x تحمیل کنیم، آنگاه

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x, \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = x, \quad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x, \quad \operatorname{Arccot}(\cot x) = x.$$

۶) برای تابع‌های وارون توابع مثلثاتی، روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} \ , & (-1 \le x \le 1) \\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \frac{\pi}{2} \ , & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

تمرین ۴. *درستی مطالب فوق را تحقیق کنید.*

تمرین ۵. *آیا همواره* $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \sqrt{1 - x^2}$؟

تمرین ۶. *آیا همواره* $\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccot}(\frac{1}{x})$؟

---

۱) یعنی اگر $x \in D_f$، $-x \in D_f$.

معادلات مثلثاتی

۱) $\sin\theta = x$، $-۱ \leq x \leq ۱$

اگر بخواهیم تمام زوایای θ را بیابیم که در این معادله صدق کنند، بی‌گمان یکی از آنها $\theta_{\circ} = \text{Arcsin}\, x$ خواهد بود که این جواب در رابطهٔ $-\frac{\pi}{۲} \leq \theta_{\circ} \leq \frac{\pi}{۲}$ نیز صدق می‌کند. با مختصر بررسی می‌توان نشان داد که هر جوابِ معادلهٔ $\sin\theta = x$ به‌ازای مقداری صحیح از k از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\theta = \theta_{\circ} + ۲k\pi \qquad \text{یا} \qquad \theta = \pi - \theta_{\circ} + ۲k\pi$$

یک نمادگذاری برای بیان تمام این جواب‌ها، $\theta = \arcsin x$ است. واضح است که $\arcsin x$ تابع نیست؛ زیرا به‌ازای هر x (البته $-۱ \leq x \leq ۱$)، بی‌نهایت مقدار برای $\theta = \arcsin x$ به‌دست می‌آید.

مثال ۸. اگر $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$، داریم $\theta_{\circ} = \text{Arcsin}(\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۶}$، در نتیجه

$$\theta = \frac{\pi}{۶} + ۲k\pi \qquad \text{یا} \qquad \theta = \frac{۵\pi}{۶} + ۲k\pi$$

که با نمادگذاری اخیر، همگی این زوایای θ را به $\arcsin(\frac{۱}{۲})$ نمایش می‌دهند.

۲) $\cos\theta = x$، $-۱ \leq x \leq ۱$

اگر قرار دهیم $\theta_{\circ} = \text{Arccos}\, x$، می‌دانیم تمام جواب‌های ممکن به‌ازای مقدار صحیحی از k به شکل

$$\theta = -\theta_{\circ} + ۲k\pi \qquad \text{یا} \qquad \theta = \theta_{\circ} + ۲k\pi$$

خواهند بود. مرسوم است که این بی‌شمار جواب را به‌صورت $\theta = \arccos x$ نمایش دهند.

۳) $\tan\theta = x$، $x \in \mathbb{R}$

مشابهاً اگر قرار دهیم $\theta_{\circ} = \text{Arctan}\, x$، می‌دانیم که تمام جواب‌های ممکن برای θ، به‌ازای مقدار صحیحی از k، از رابطهٔ

$$\theta = \theta_{\circ} + k\pi$$

به‌دست می‌آیند. مجموعهٔ تمام این جواب‌ها را با $\theta = \arctan x$ نمایش می‌دهند.

۴) $\cot\theta = x$، $x \in \mathbb{R}$

مشابهاً اگر قرار دهیم $\theta = \text{Arccot}\, x$ می‌دانیم که تمام جوابهای ممکن برای θ، به‌ازای مقدار صحیحی از k، از رابطهٔ

$$\theta = \theta_{\circ} + k\pi$$

به‌دست می‌آیند. یک شیوهٔ اشاره به همهٔ این جواب‌ها، استفاده از $\theta = \text{arccot}\, x$ است.

حل. قدر مطلق تفاضل ۲۷ و ۲ را تجزیه می‌کنیم. داریم $|۲ - ۲۷| = ۲۵ = ۵^۲$؛ پس بستایی ۵ در ۲۵ برابر ۲ است و در نتیجه معکوس ۵ به توان ۲ فاصله بین ۲۷ و ۲ در فضای ۵ـادیک است؛ یعنی $|۲ - ۲۷|_۵ = \frac{۱}{۲۵}$. ∎

حالا باید ببینیم این تابع در خواصی که برای فاصله از مبدأ تعریف کردیم صدق می‌کند یا نه. شرایط را بررسی می‌کنیم. شرط اول این است که عددی حقیقی و نامنفی به ما بدهد که طبق تعریف تابع این شرط صادق است. دوم این که فاصلهٔ n و $-n$ از مبدأ برابر باشد که این هم صادق است چون قدر مطلق عدد را در نظر می‌گیریم. شرط سوم هم با توجه به تعریف برقرار است. حالا شرط چهارم را در فضای pـادیک بررسی می‌کنیم؛ باید ثابت کنیم $|m+n|_p \leq |m|_p + |n|_p$. اما به جای اثبات خود شرط، رابطه‌ای را برایتان ثابت می‌کنیم که شرط از آن نتیجه می‌شود: ثابت می‌کنیم

$$|m+n|_p \leq \max\{|m|_p, |n|_p\}.$$

برهان. اگر یکی از m و n یا $m+n$ صفر باشند که حکم برقرار است؛ پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ کدام از این عبارت‌ها صفر نیستند. با این فرض، می‌توانیم بنویسیم $|m+n|_p = \frac{۱}{p^\alpha}$، $|m|_p = \frac{۱}{p^\beta}$ و $|n|_p = \frac{۱}{p^\gamma}$؛ بنابراین با توجه به تعریف، اعداد صحیح u، v و w وجود دارند که هیچ کدام مضرب p نیستند و $m+n = p^\alpha u$، $m = p^\beta v$ و $n = p^\gamma w$ و در نتیجه

$$p^\alpha u = m+n = p^\beta v + p^\gamma w.$$

در رابطه‌ای که به‌دست آمده است تمام حالات ممکن برای α و β و γ را بررسی می‌کنیم. اگر $\gamma = \beta$، از p^β فاکتور می‌گیریم. اگر $v+w$ مضرب p باشد، $\alpha > \beta$ و اگر مضرب p نباشد $\alpha = \beta$؛ پس در این حالت $\alpha \geq \beta$. حالت دوم این است که $\gamma > \beta$. در این حالت، از p^β فاکتور می‌گیریم و در نتیجه

$$p^\beta(v + p^{\gamma-\beta}w) = p^\alpha u.$$

چون $v + p^{\gamma-\beta}$ مضرب p نیست، $\alpha = \beta$؛ پس در این حالت هم $\alpha \geq \beta$. حالت سوم این است که $\beta > \gamma$ که مشابه حالت قبل نتیجه می‌دهد $\alpha \geq \gamma$. باتوجه به این سه حالت، همواره داریم $\alpha \geq \min\{\beta, \gamma\}$؛ پس

$$|m+n|_p = \frac{۱}{p^\alpha} \leq \frac{۱}{\min\{p^\beta, p^\gamma\}} = \max\{|m|_p, |n|_p\}.$$

∎

تا به حال فاصلهٔ pـادیک را برای اعداد صحیح تعریف کرده‌ایم؛ حال تعریف دیگری برای اعداد گویا ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳. فاصله از مبدأ عدد گویایی مثل $\frac{a}{b}$ را ــ که a و b صحیح هستند و $b \neq ۰$ ــ برابر نسبت فاصله‌های a و b می‌گیریم.

بررسی این که این تابع در خواص فاصله از مبدأ صدق می‌کند، چندان سخت نیست. شاید تنها قسمت غیر بدیهی، شرط نامساوی مثلث باشد. فرض کنید دو عدد گویای هم‌مخرج $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{a}$ داده شده‌اند؛ داریم

$$\left|\frac{x+y}{a}\right|_p = \frac{|x+y|_p}{|a|_p} \leq \frac{|x|_p + |y|_p}{|a|_p} = \left|\frac{x}{a}\right|_p + \left|\frac{y}{a}\right|_p$$

که همان است که می‌خواستیم.

مجدداً، برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو نقطه، فاصله از مبدأ تفاضلشان را حساب می‌کنیم. با کمی محاسبه، نتیجه می‌شود که

$$|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}|_p=|\frac{ad-bc}{bd}|_p=\frac{1}{p^{e_p(ad-bc)-e_p(bd)}}.$$

مثال ۳. فاصلهٔ $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{3}$ را در فضای ۷ـادیک محاسبه کنید.

حل.

$$\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right|_7=\left|\frac{7}{15}\right|=\frac{1}{7^{e_7(7)-e_7(15)}}=\frac{1}{7^{1-0}}=\frac{1}{7}.$$

∎

حال به بیان و اثبات چند قضیهٔ ساده در فضای pـادیک می‌پردازیم و هندسهٔ این فضا را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱. *هر مثلث در فضای pـادیک متساوی الساقین است و ضلع بزرگ‌تر آن، ساق است.*

برهان. مثلث دلخواهی با اضلاعی به‌طول a، b و c در نظر می‌گیریم. a را طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث در نظر می‌گیریم. داریم

$$a\le \max\{b,c\}.$$

چون $b\le a$ و $c\le a$، $\max\{b,c\}\le a$ و در نتیجه $a=\max\{b,c\}$. این نشان می‌دهد که اقلاً یکی از b و c با a برابر است؛ پس دو ضلع از اضلاع مثلث برابرند و a یکی از این دو ساق مثلث است. ∎

قضیه ۲. *در هر دایره در فضای pـادیک، هر نقطه درون دایره، مرکز همان دایره به همان شعاع است (در حقیقت هر دایره بی‌شمار مرکز دارد).*

برهان. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r در فضای pـادیک در نظر می‌گیریم. نقطه دلخواه x را درون دایره و نقطهٔ دلخواه y را روی دایره اختیار می‌کنیم.

می‌دانیم که هر مثلث در فضای pـادیک متساوی‌الساقین است و کوچک‌ترین ضلع آن قاعده مثلث است. از آنجا که $|Oy|_p=r>|Ox|_p$، Oy یکی از ساق‌های مثلث Oxy است؛ پس xy هم ساق دیگر مثلث متساوی‌الساقین Oxy است. بنابراین، فاصلهٔ x تا y برابر r است؛ پس x مرکز دایرهٔ C به شعاع r است. ∎

قضیه ۳. *اگر C دایره‌ای به مرکز x و شعاع r در فضای pـادیک باشد و x' نقطه‌ای روی محیط این دایره و C' دایرهٔ به مرکز x' و شعاع r، آنگاه نقاط روی C' همان نقاط درون دایرهٔ C هستند و نقاط درون دایرهٔ C' همان نقاط روی دایرهٔ C.*

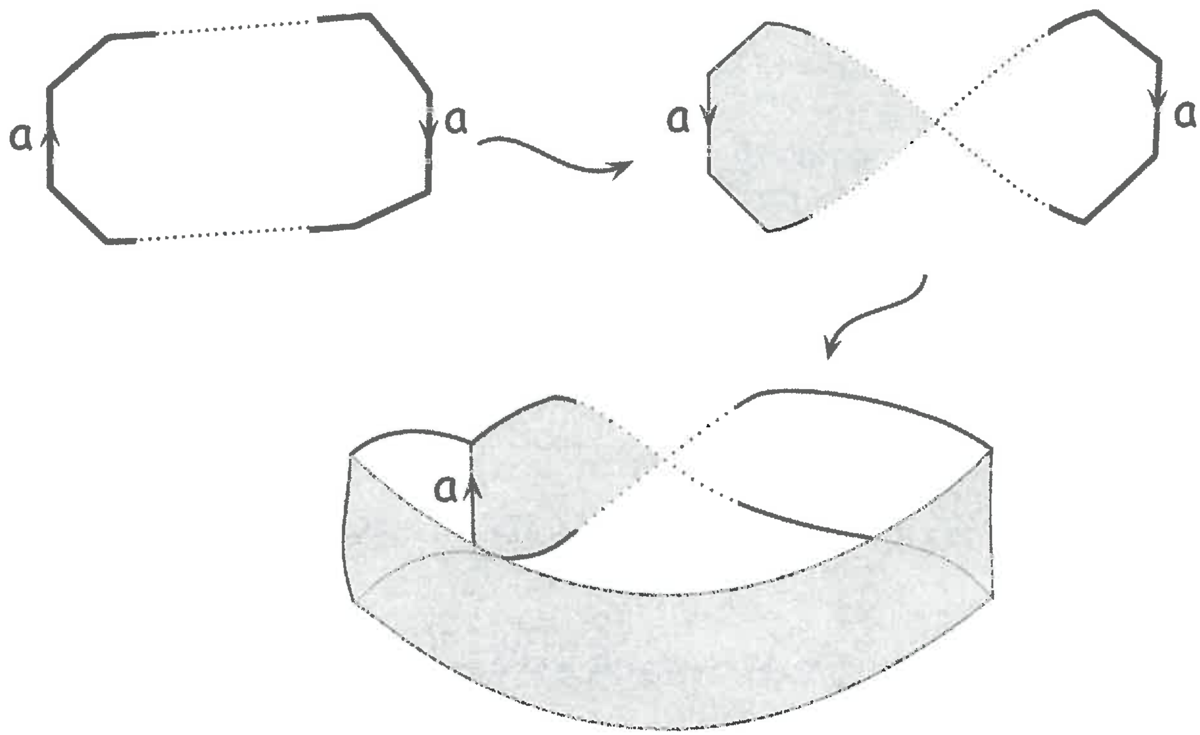
برهان. نقطهٔ دلخواه y را درون دایرهٔ C به مرکز x و شعاع r در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ (۲)، فاصلهٔ هر نقطهٔ درون دایره از هر نقطه روی محیط دایره برابر r است؛ پس تمام نقاط درون دایرهٔ C (به مرکز x) روی محیط دایرهٔ C' قرار دارند. نقطهٔ دلخواه z را روی محیط دایرهٔ C در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که مثلث $xx'z$ متساوی‌الساقین است و $r=xz=xx'$ و می‌دانیم که در مثلث‌های متساوی‌الساقین این فضا، ضلع بزرگ‌تر ساق است؛ یعنی $x'z<r$. پس، تمام نقاط روی دایرهٔ C درون دایرهٔ C' قرار دارند. ∎

• یلدا محسن زاده و فاطمه هنرمند، دبیرستان فرزانگان مشهد.

آرش در سیارهٔ تویاپ (قسمت سوم)

ایمان افتخاری

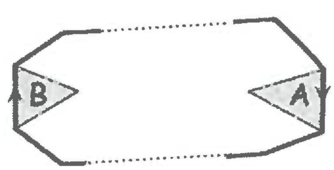
آقای خی که برای مدت زیادی ساکت مانده بود، گفت «من فکر می‌کنم فلش‌ها مهم نیستند. بگذارید فرض کنیم که دو تا فلش داریم که هر دو مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت هستند ... مثل این شکل.» و به شکلی که آقای سای کشیده بود اشاره کرد و ادامه داد «برای چسباندن این دو تا a، باید چندضلعی را بتابانیم و دو تا a را به‌هم بچسبانیم. یعنی این‌جور ...» و بعد چند تا شکل کشید.



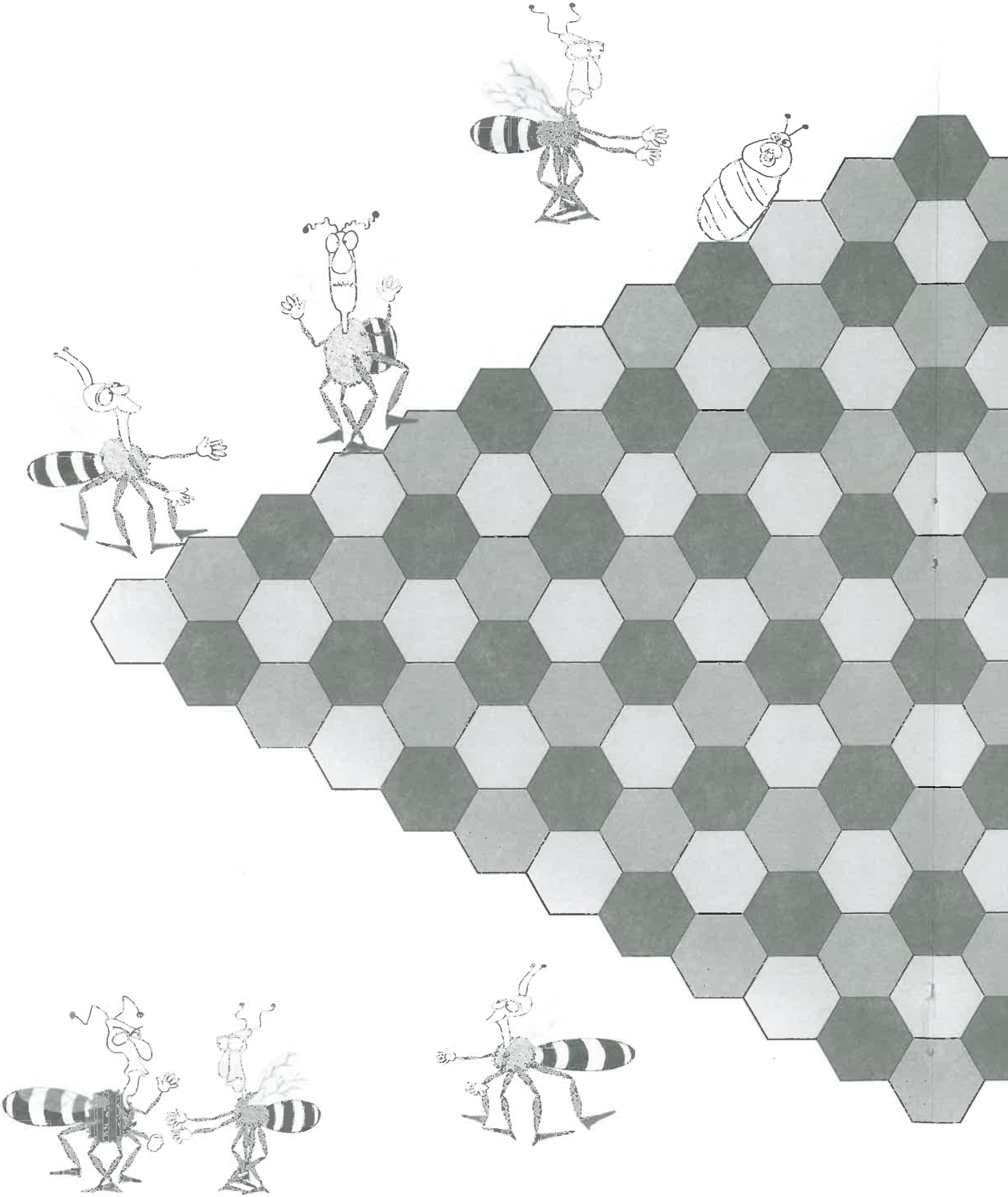
سپس گفت: قسمت‌های رنگ‌شده، پشت چندضلعی را نشان می‌دهد. حالا در محل چسباندن دو فلش از پشت چندضلعی می‌شود به روی آن رفت. ولی چندضلعی ما سطح سیاره را نشان می‌دهد و از روی سطح سیاره به زیر سطح سیاره نمی‌توانیم برویم!

آرش گفت: این خیلی مهم بود؛ ولی حرف شما خیلی دقیق نیست.

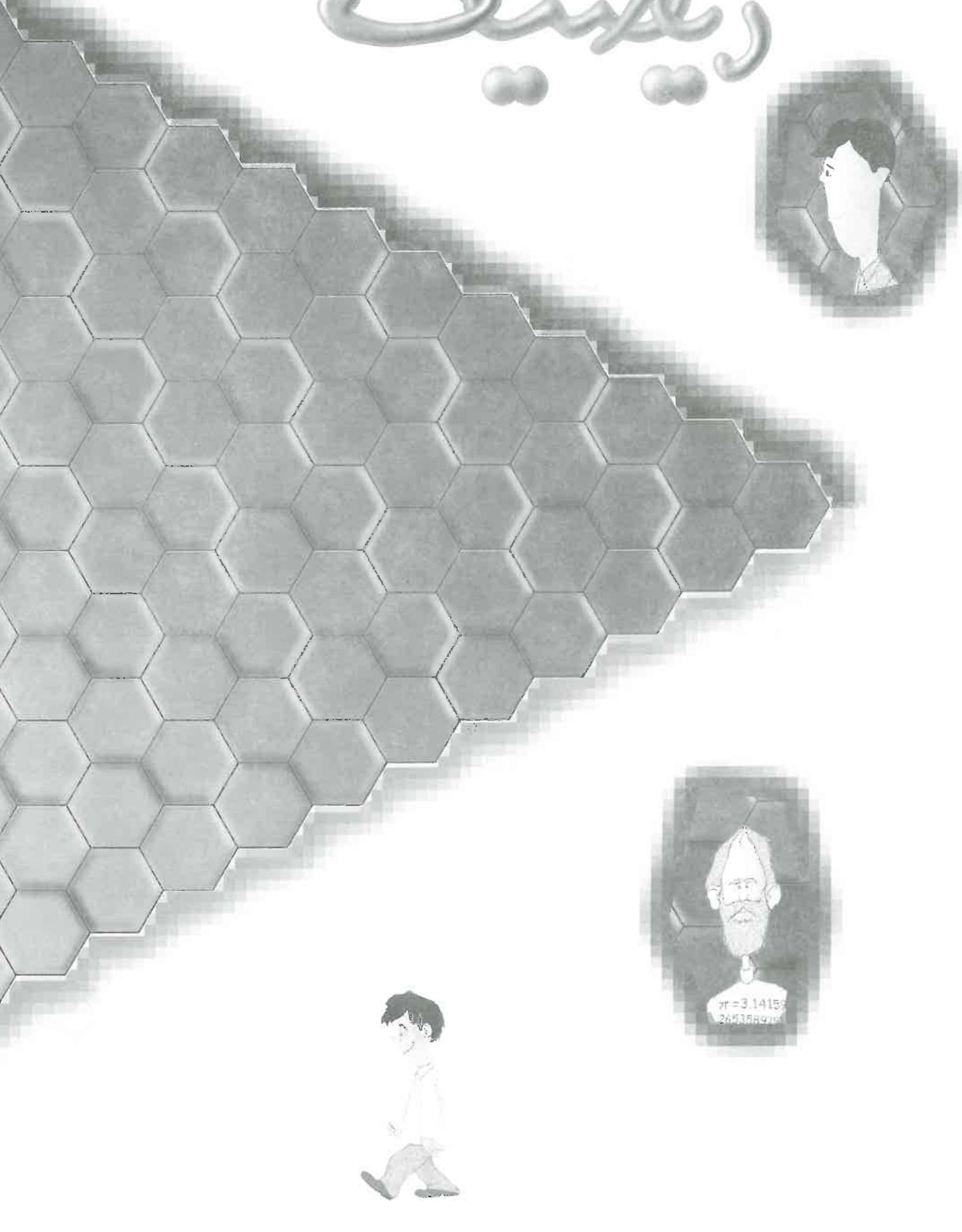
آقای سای گفت «چرا! خیلی هم دقیق است. ما به این نکته توجه نکرده بودیم. ببین! اگر دو تا فلش جهتشان مثل این شکل باشد (و به شکل اول خودش اشاره کرد) و اگر دو تا علامت را طوری به‌هم بچسبانیم که روی هم قرار بگیرند و سطح سیاره را تشکیل دهند و اگر یکی از ما روی علامت بایستد، طوری که جهت علامت به‌طرف جلو باشد، آنگاه یکی از مثلث‌های A و B در طرف راست او و دیگری در طرف چپ او خواهد بود.» و شکلی روی تخته کشید.

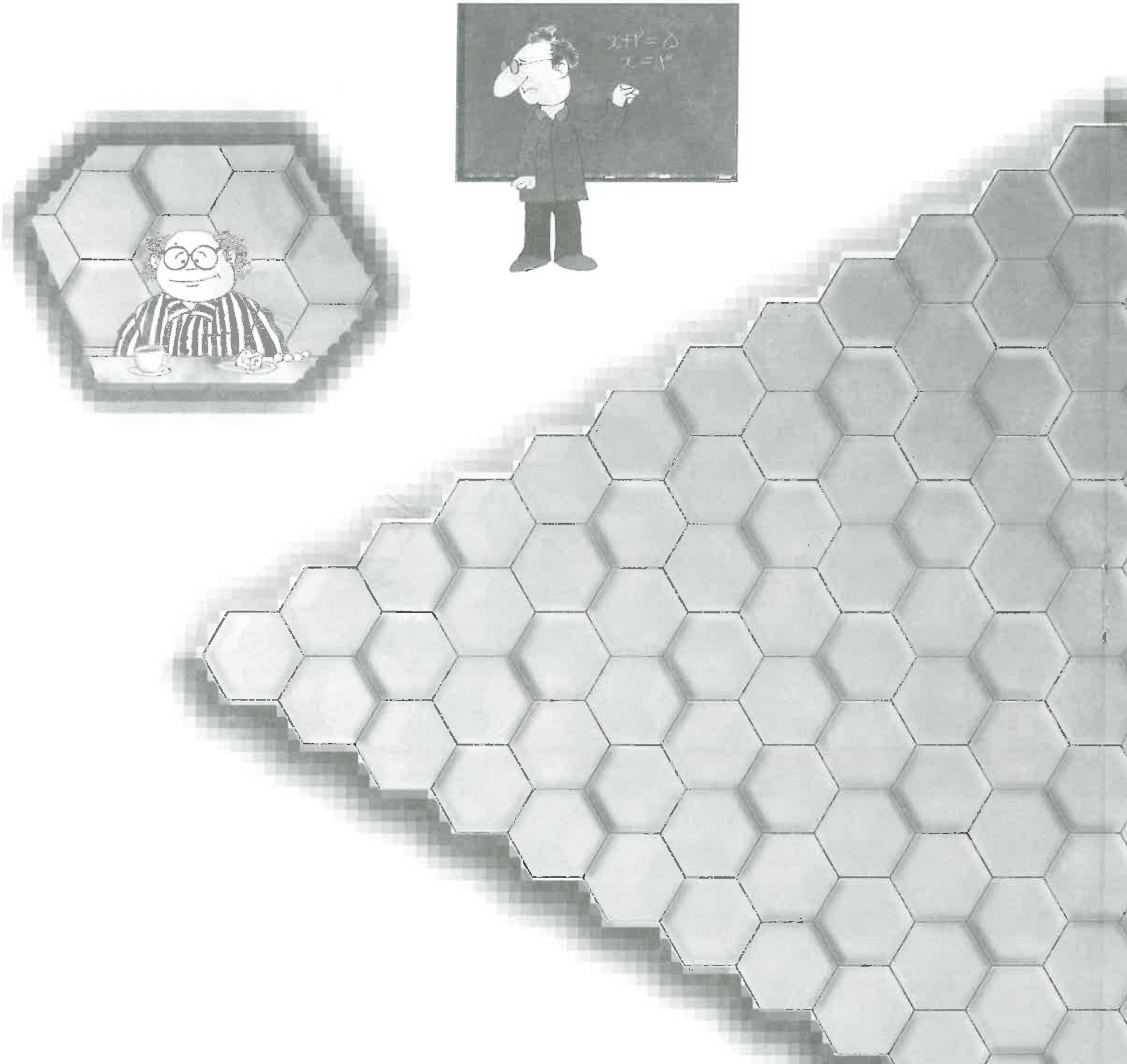


ریاضیات شمارهٔ ۴
(مهر ۱۳۸۰) صص ۲۵ـ۲۲



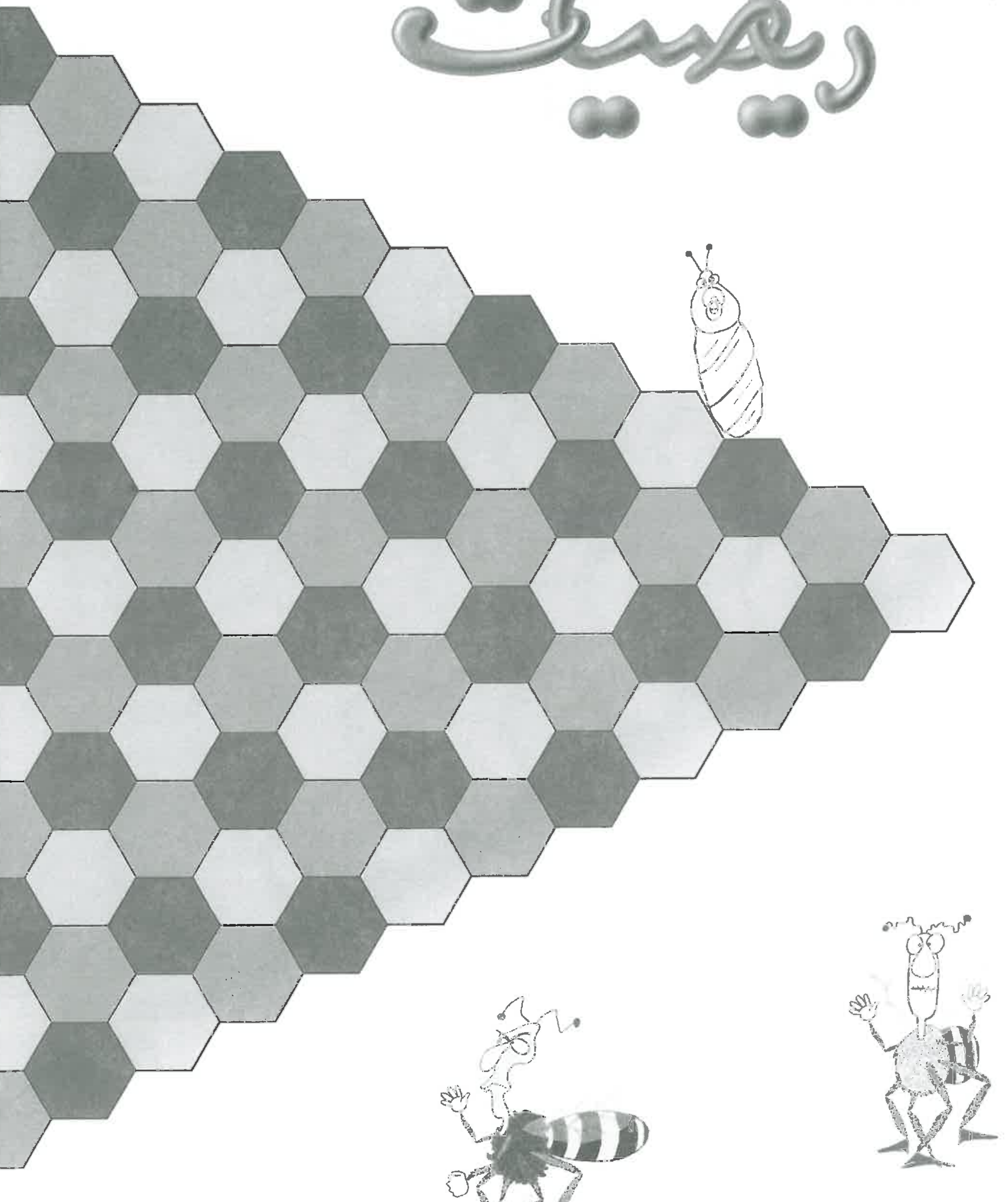
مطالعہ ریاضیات





HEX

مطالعه ریاضیات



«اما اگر کسی با این شرایط روی این شکل بایستد، هم A و هم B در طرف راست او خواهند بود.» کمی پیچیده به‌نظر می‌رسید؛ ولی آرش بالاخره متقاعد شد که از هر دو علامت مشابه باید یکی در جهت عقربه‌های ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد.

پیش‌رفت بزرگی به‌نظر می‌رسید و همه احساس خوبی داشتند. ناگهان آرش به ساعتش نگاه کرد. نزدیک ۱۱ بود. با تعجب گفت: اصلاً متوجه گذشت زمان نشدیم. ما شام خوردیم؟

آقای سای، به سراغ یخچال دفتر کارش رفت و بشقابی پر از کتلت بیرون آورد. چند تکه نان هم در یخچال بود. آنها را روی میز کارش گذاشت، و همه مشغول شدند. کتلت سرد و نان سفت بود ولی آرش پیش خودش فکر کرد که این خوشمزه‌ترین شامی است که تا حالا خورده است.

بعد، آرش و آقای خی از آقای سای خداحافظی کردند و از دفتر او خارج شدند. آقای سای گفت که شب را در اتاق کارش می‌ماند.

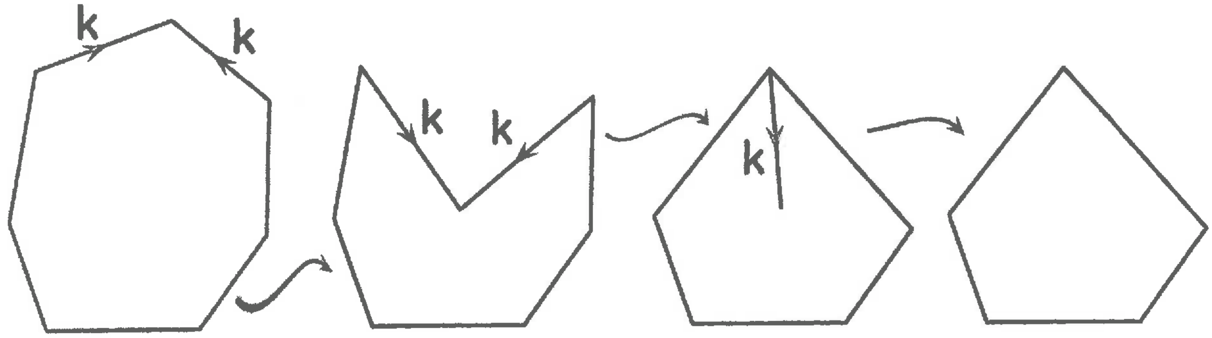
در راه هتل، آرش و آقای خی چیزی به‌هم نگفتند. روز سختی را گذرانده بودند که البته با موفقیت زیادی هم همراه بود.

شب، آرش در رختخواب باز هم به مسأله فکر کرد اما خیلی زود خوابش برد.

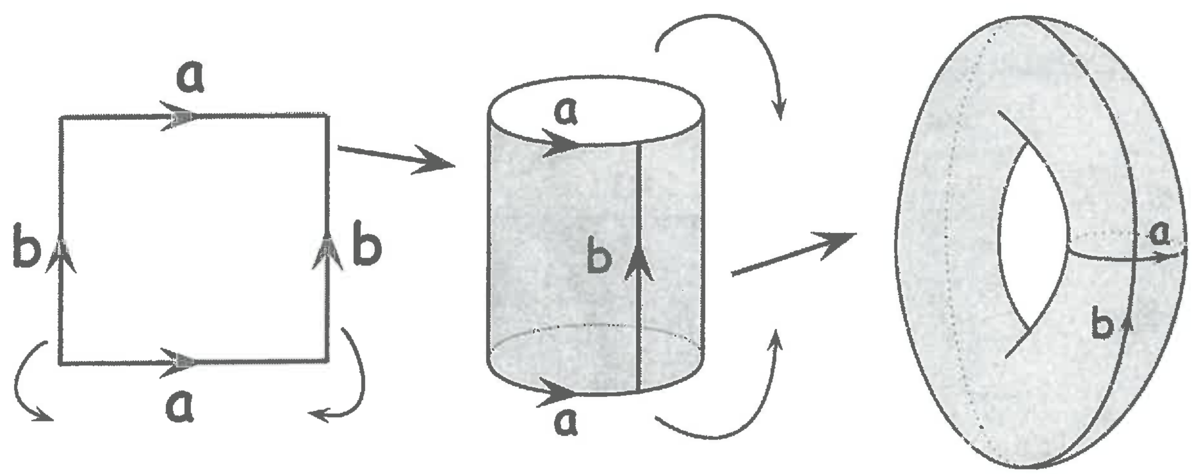
صبح روز بعد، وقتی آرش برای صرف صبحانه به طبقۀ پایین هتل رفت، آقای خی و آقای سای منتظرش بودند. به‌نظر می‌رسید که مسأله برای آن‌ها، حتی بیش از آرش، جالب است.

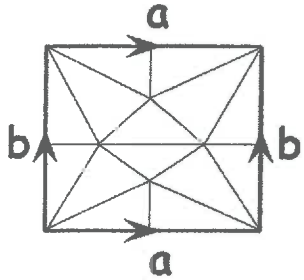
وقتی که نشستند، آقای سای که چشم‌هایش کمی پف کرده بود، گفت «من دیشب بعد از رفتن شما باز هم به مسأله فکر کردم. کارهایی برای ساده کردن شکل می‌شود انجام داد.» و بعد یک کاغذ را روی میز گذاشت و شکلی را روی آن رسم کرد.

«مثلاً این شکل را در نظر بگیرید. من می‌توانم این دوتا k را به هم بچسبانم و به این شکل برسم ...» و شکل‌های دیگری کشید.



«... به‌علاوه، علامت‌های زیر را روی چهارضلعی در نظر بگیرید و آنها را به هم بچسبانید؛ مثل این شکل.» و چند شکل دیگر اضافه کرد.



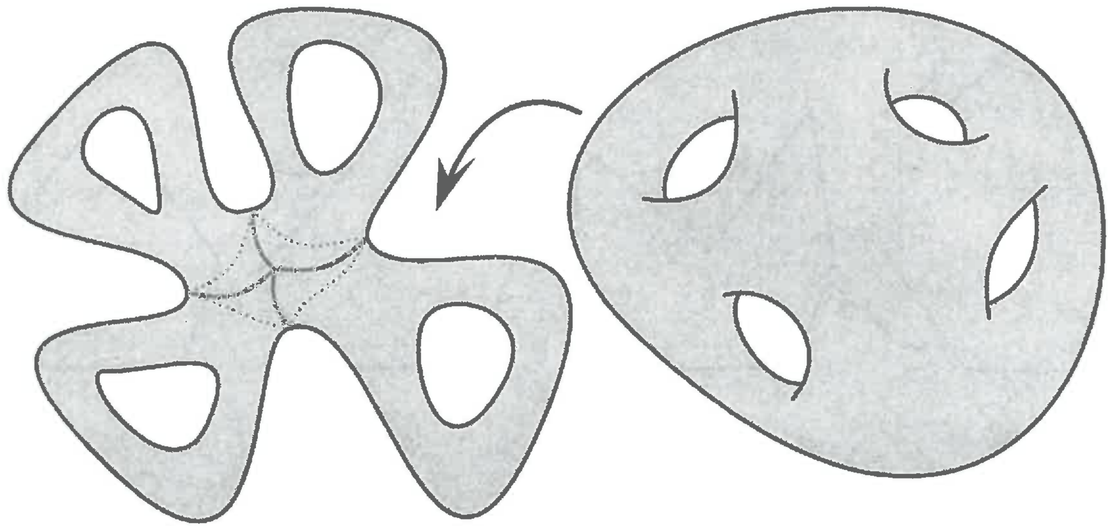


«این هم که مثل لاستیک ماشین است، یک موجود جالب است. فرض کنید که مثلث‌های مورد نظر من به‌این‌صورت باشند. در این حالت تعداد مثلث‌ها ۱۴ است. با توجه به این که بعضی از ضلع‌ها به هم می‌چسبند، ۲۱ ضلع داریم. تعداد رأس‌ها هم با این حساب ۷ است: چهار تا در وسط، چهار تا روی ضلع‌ها که دوبه‌دو به هم می‌چسبند و دو تا رأس می‌شوند و چهارتای گوشه هم که روی هم قرار می‌گیرند. پس عدد خی صفر است. البته من اینجا ضلع‌های a و b را نصف کردم؛ ولی این مسأله در لاستیک ماشین تفاوتی ایجاد نمی‌کند.»

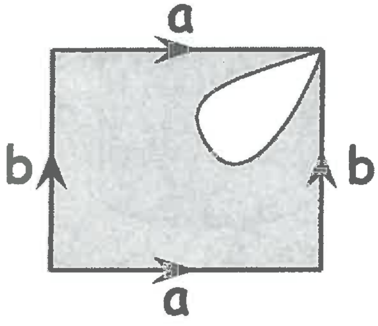
حرف‌های آقای سای خیلی جالب بود، اما با آن کاری که قرار بود انجام بدهند خیلی فرق داشت. آرش گفت «این مطالب خیلی جالب است؛ ولی قرار بود که کار دیگری انجام دهیم. می‌خواستیم همهٔ موجوداتی که می‌توانند یک سیاره باشند را پیدا کنیم. البته با این شرط که سطح آنها هم با تعدادی مثلث درست شده باشد که به‌نظر می‌رسد همهٔ سیاره‌ها این‌طور هستند.»

سای ادامه داد: تا اینجا حرف‌های من ربطی به آن حرف‌های قبلی نداشت؛ ولی ببینید! این موجودی که ساختیم و شبیه لاستیک ماشین است، سیاره‌ای است که یک سوراخ دارد. به نظرم رسید هر سیاره‌ای مثل کره‌ای است که چند تا سوراخ دارد، یا با کمی کشیدن و فشار دادن به این حالت می‌رسد و کشیدن و فشار دادن هم که عدد خی را عوض نمی‌کند.»

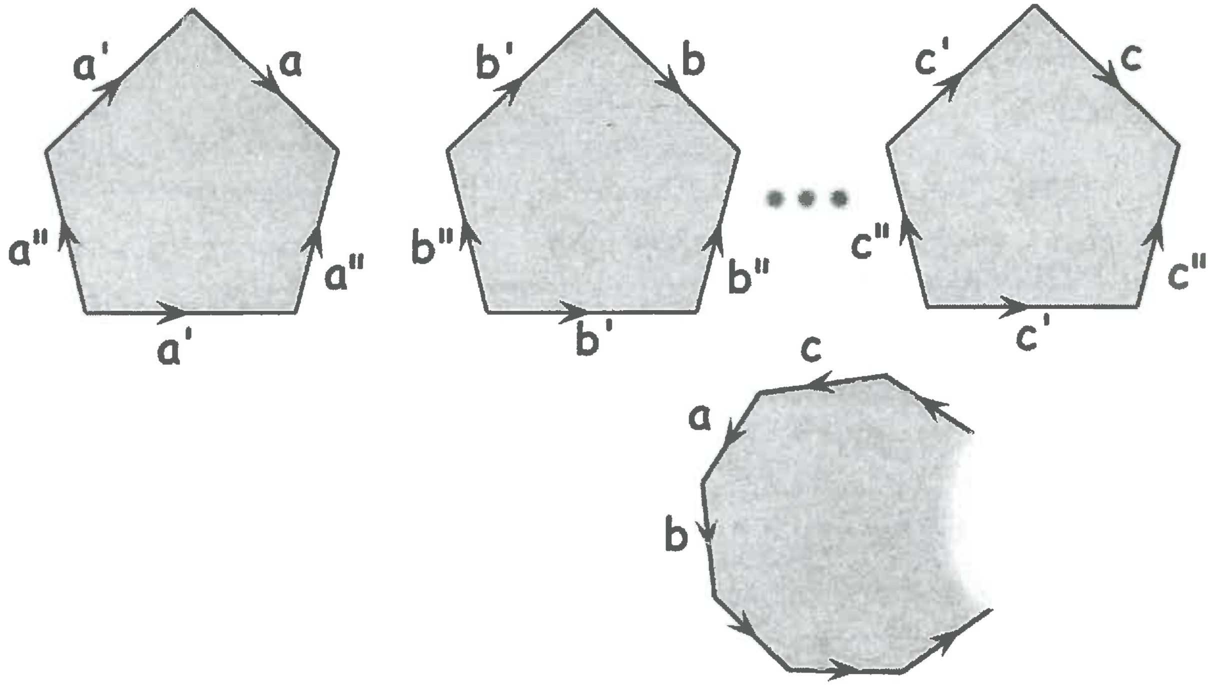
آقای خی که با دقت گوش می‌کرد گفت «اگر این‌طور باشد یعنی هر سیاره‌ای مثلاً به این شکل باشد ...» و شکلی رسم کرد و ادامه‌داد «با کمی کشیدن شبیه این شکل می‌شود. حالا اگر روی این خط‌ها شکل را ببریم و در نظر بگیریم که هر کدام از تکه‌ها، یک لاستیک ماشین پنچر است چه خواهد شد؟»



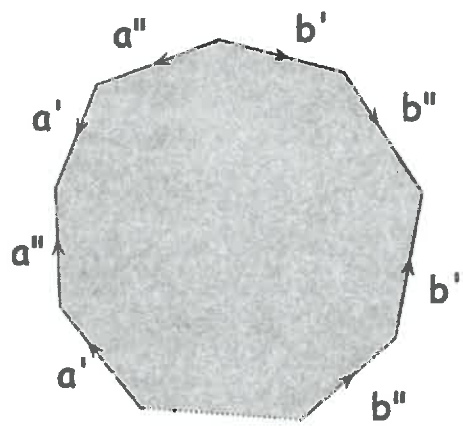
آرش که خیلی خوشش آمده بود گفت «قسمتی از شکل، یک n ضلعی می‌شود که رأس‌های آن باید به هم بچسبند و هر کدام از لاستیک‌های سوراخ‌دار هم این‌طوری هستند.» و شکلی را اضافه کرد.



آقای سای گفت «ولی این شکل در واقع یک پنج ضلعی است و اگر کل چیزهای موجود را با دقت بیشتر شماره گذاری کنیم به این حالت می‌رسیم . . .»



« . . . و حالا می‌توانیم این‌ها را به هم بچسبانیم. به این ترتیب که هر پنج ضلعی مثل $kk''k'k''k'$ را از روی k به n ضلعی بچسبانیم تا یک شکل به این صورت به دست بیاید.

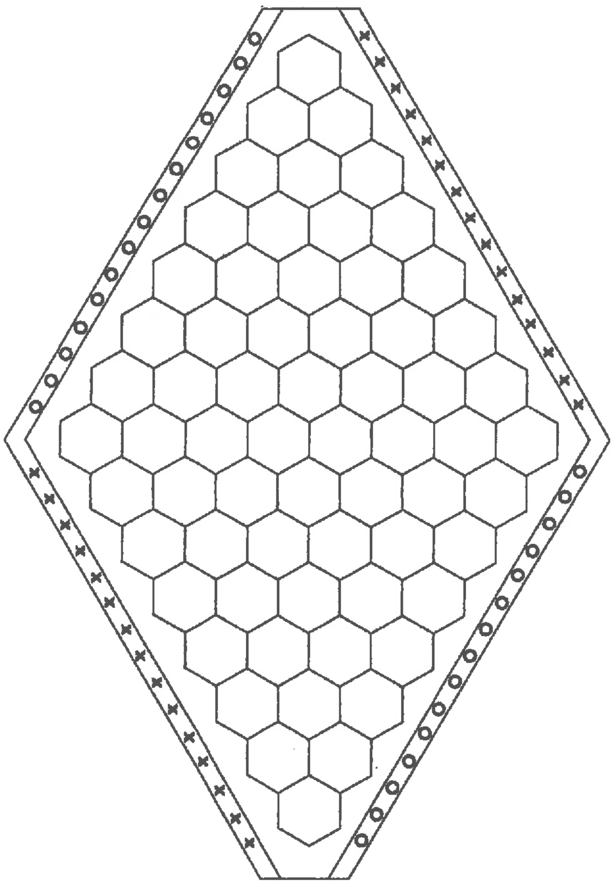


مقصودم از همهٔ این‌ها این است که اگر حدس من درست باشد، باید بشود هرکدام از آن شکل‌های قبلی را به چنین شکلی تبدیل کرد . . .»

ادامه دارد . . .

بررسی بازی هگز

سپیده چمن‌آرا



احتمالاً خوانندگان قدیمی ماهنامهٔ ریاضیات، بازی هِگز[1] را به‌خاطر می‌آورند. این بازی را در اولین شمارهٔ ماهنامهٔ ریاضیات معرفی کردیم. در این شماره، قصد داریم با کمکِ هم، روشی برای بُردن بازی بیابیم؛ یا، وضعیت‌های «مطلوب» را که منجر به بُرد حتمی می‌شوند، شناسایی کنیم. برای کسانی که این بازی را نمی‌شناسند، قوانین بازی را یادآوری می‌کنیم.

این بازی در صفحه‌ای به شکل روبه‌رو انجام می‌شود. صفحهٔ بازی از تعدادی شش‌ضلعی منتظم که در کنار هم شکلی لوزی مانند تشکیل می‌دهند، ساخته شده‌است. هر ضلع لوزی، از ۱۲ شش‌ضلعی تشکیل شده‌است. می‌توان صفحه را کوچک‌تر نیز در نظر گرفت؛ مثلاً می‌توان با ۱۱ شش‌ضلعی در هر ضلع (همان‌طور که در شمارهٔ ۱ ماهنامه آمده است) یا با ۸ یا ۶ شش‌ضلعی در هر ضلع، صفحه را ساخت. صفحه‌ای برای بازی هگز با ۱۲ شش‌ضلعی در هر ضلع، در صفحات وسط همین شمارهٔ ماهنامه، برای استفادهٔ شما چاپ شده‌است (توجه کنید که هر چه صفحهٔ بازی بزرگ‌تر باشد، حالت‌های بازی بیشتر و تجزیه و تحلیل بازی، پیچیده‌تر می‌شود). علاوه بر صفحهٔ بازی، تعدادی مهره در دو رنگ متفاوت (از هر رنگ ۳۰ تا) لازم است و هر بازیکن یکی از رنگ‌ها را انتخاب می‌کند.

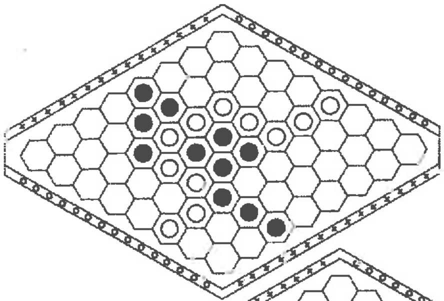
قوانین بازی

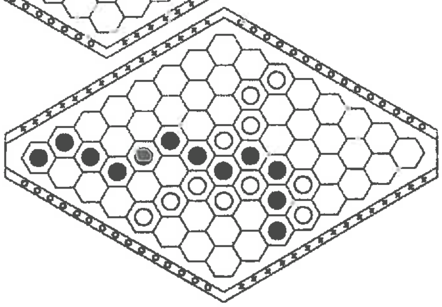
بازی با یک صفحهٔ خالی آغاز می‌شود. هر یک از دو بازیکن، در نوبت خود، یکی از مهره‌های خود را در یکی از خانه‌های خالی صفحهٔ بازی قرار می‌دهد. هدف هر بازیکن این است که توسط مهره‌های خود، مسیری پیوسته از یک ضلع صفحه (که مربوط به این بازیکن است) تا ضلع روبه‌روی آن بسازد. شش ضلعی‌های گوشه‌ای، متعلق به دو ضلع شامل این گوشه هستند. در شکل صفحهٔ بعد، دو نمونه مسیر نشان داده شده است.

نخستین بازیکنی که مسیر خود را تکمیل کند، برنده است.

---

۱) Hex



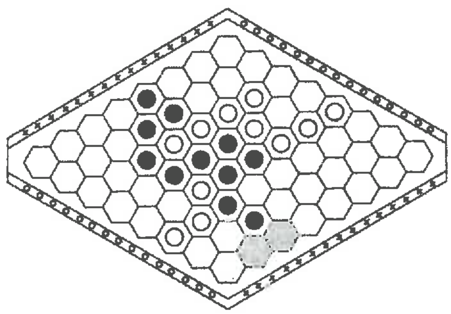


بد نیست بدانید که این بازی، اولین بار در دانمارک ابداع شد و امروزه، در سراسر آمریکا و اروپا، مردم گونه‌های مختلفی از هگز را بازی می‌کنند.

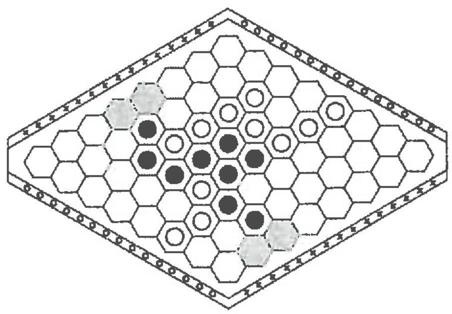
اینک بیایید به کمکِ هم سعی در یافتن موقعیت‌هایی کنیم که بُردمان را تضمین می‌کنند. نخست چند دور با دوستانتان بازی کنید تا بر بازی مسلط شوید. مطمئن باشید که این بازی به‌خوبی سلول‌های خاکستری مغز شما را به کار خواهد انداخت! لطفاً قبل از این کار به سراغ ادامهٔ مقاله نروید.

اینک مسأله‌های زیر را حل کنید.

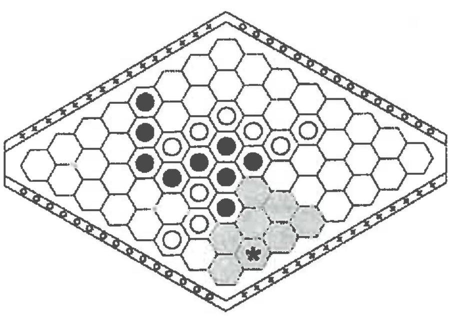
مسأله ۱. *شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر نوبت مهرهٔ سفید باشد، چه بازی‌ای انجام دهد تا نبازد؟ آیا می‌توان گفت در این وضعیت مهرهٔ سیاه حتماً برنده است؟ چه موقعیتی پیش آمده است که بُرد سیاه حتمی شده است؟*



مسأله ۲. *شکل زیر را ببینید. برندهٔ حتمی این بازی کدام مهره است؟ چه شباهتی بین موقعیت‌های شکل بالا و شکل زیر وجود دارد؟*



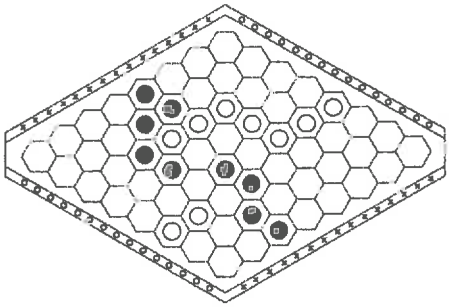
مسأله ۳. *اینک موقعیت زیر را که نوبت مهرهٔ سفید است در نظر بگیرید. ایا خانه‌ای هست که بازیکن سفید با قرار دادن مهرهٔ خود در آن، مانع از بُرد سیاه شود؟*



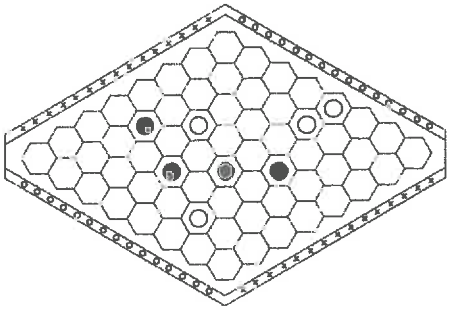
به نظر می‌رسد اگر بازیکن سفید، مهرهٔ خود را در خانهٔ * (در شکل مقابل) قرار دهد بهتر از هر بازی دیگری، از بُرد سریع بازیکن سیاه جلوگیری می‌کند. حال، بازی بازیکن سیاه باید چگونه باشد؟ اگر هنوز راهی به نظرتان نمی‌رسد، به پرسش‌های پنجم و ششم که در ادامه می‌آیند، پاسخ دهید.

مسأله ۴. *آیا می‌توان موقعیت شکل قبل را تعمیم داد و یک گام عقب‌تر از این موقعیت را پیش‌بینی کرد و وضعیتی را کشف کرد که حتماً به وضعیت این شکل منجر شود (یعنی بُرد سیاه را در یک گام قبل از این وضعیت تضمین کند)؟ (توضیح: پاسخ به این سؤال نیاز به بررسی و تجزیه تحلیل حالت‌های بیشتری دارد.)*

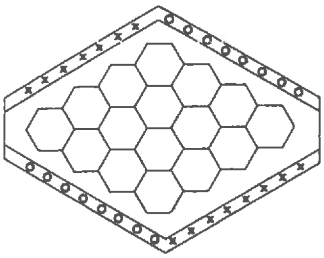
مسأله ۵. *در شکل زیر، نوبت با مهرهٔ سفید است. آیا این بازیکن می‌تواند مهرهٔ خود را جایی قرار دهد که از بُرد سیاه جلوگیری کند؟ آیا می‌توان گفت که در این وضعیت نیز بُرد سیاه حتمی است؟*



مسأله ۶. *موقعیت شکل روبه‌رو را با وضعیت موجود در شکل بالا و شکل آخر صفحهٔ قبل مقایسه کنید. آیا شباهتی بین آنها وجود دارد؟ آیا از روی این دو شکل می‌توانید وضعیتی برای چیدن مهره‌ها توصیف کنید که بُردتان را تضمین کند؟ این کار را انجام دهید!*



مسأله ۷. *برای تسلط بیشتر بر این بازی، نخست صفحهٔ کوچک با ۴ شش‌ضلعی در هر ضلع را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید به‌عنوان اولین بازیکن، مهرهٔ خود را جایی قرار دهید که بُرد شما را تضمین کند؟ برای این منظور تمام حالت‌های مختلف بازی را کاملاً بررسی کنید.*



لازم به توضیح است که با اضافه کردن تعداد شش‌ضلعی‌ها در هر ضلع و بزرگ کردن صفحهٔ بازی، حالت‌های پیچیده‌تری به‌وجود می‌آیند که تجزیه و تحلیل بازی را مشکل‌تر می‌کند.

مسأله ۸. *در مسایل بالا، وضعیت‌هایی را یافتیم که بُرد یک بازیکن را تضمین می‌کردند؛ اما یکی از هدف‌های جانبی و مهم در این بازی، جلوگیری از بُرد حریف است. آیا می‌توانید با کمک مسایل بالا، دستورهایی برای چیدن مهره‌ها ارایه کنید که از بُرد حریف جلوگیری کنید؟*

مسأله ۹. *در چه تعداد از بازی‌هایی که با دوستانتان انجام داده‌اید، به‌عنوان نفر اول برنده بوده‌اید و در چه تعدادی به‌عنوان نفر دوم؟ کدام‌یک فراوانی بیشتری داشته است؟*

مسأله ۱۰. *آیا در بازی‌هایی که تاکنون انجام داده‌اید، وضعیتی پیش آمده است که پس از چیدن مهره‌ها در همهٔ صفحه، هیچ‌یک از دو بازیکن برنده نشده باشند (یعنی بازی به تساوی انجامیده باشد)؟ اگر تاکنون به چنین وضعیتی برخورد نکرده‌اید، سعی کنید صفحهٔ بازی را با مهره‌های سیاه و سفید به‌گونه‌ای پُر کنید که این اتفاق بیفتد.*

منتظر استراتژی‌های بُرد شما هستیم.

موفق باشید.

آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۹. گمان می‌کنم این روزها، دیگر آن آدم‌هایی که هر از گاهی با ادعای پرطمطراق حل «مسألهٔ آخر فرما» سرکله‌شان پیدا می‌شد، با شنیدن خبر حل این مسأله[۱]، این کار را رها کرده‌اند. البته هنوز عده‌ای به دنبال یافتن اثباتی کوتاه‌تر هستند! (اثبات موجود، یک مقالهٔ حدوداً ۲۰۰ صفحه‌ای منتشر شده در یک شمارهٔ یک نشریهٔ تخصصی ریاضی[۲] است!) از شوخی که بگذریم، بعضی از شما با «مسألهٔ آخر فرما» آشنایی دارید.

مسأله ۱. *ثابت کنید برای عدد صحیح و مثبت* $n > 2$*، هیچ سه عدد صحیح* x*،* y *و* z *وجود ندارند که در رابطهٔ* $x^n + y^n = z^n$ *صدق کند.*

دیوفانتوس اسکندریه‌ای[۳]، که چیز زیادی از زندگیش نمی‌دانیم، گویا نخستین کسی است که به بررسی جوابهای یک معادله در بین عددهای صحیح پرداخته است؛ به همین جهت، به این معادلات، «معادلات دیوفانتی» می‌گویند[۴]. در اینجا قصد داریم چند شیوهٔ حل این معادلات (البته نه معادلاتی به دشواری مسالهٔ فرما!) را مطرح کنیم.

مثال ۱. همهٔ دوتایی‌های (x, y) از اعداد صحیح را بیابید که در رابطهٔ $x(y+1)^2 = 243y$ صدق کنند.

دو عدد صحیح متوالی، مقسوم علیه مشترکی به جز ± 1 ندارند. ولی $243y \mid (y+1)^2$ و y و $y+1$ مقسوم‌علیه مشترک ندارند؛ لذا $243 \mid (y+1)^2$. چون $(y+1)^2$ نامنفی و مقسوم‌علیه $3^5 = 243$ است پس باید $(y+1)^2 \in \{1, 9, 81\}$. از اینجا، به سادگی همهٔ دوتایی‌های مطلوب، به‌دست می‌آیند:

$$(0,0), (-486,-2), (54,2), (-108,-4), (24,8), (-30,-10).$$

تمرین ۱. *همهٔ دوتایی‌های صحیح* (x, y) *را بیابید که در رابطهٔ* $x(x+1)(x^2+x+1) = y^2$ *صدق کنند.*

یک شیوهٔ متداول دیگر، استفاده از باقی‌مانده در تقسیم یک عدد است.

مثال ۲. ثابت کنید معادلهٔ $x^2 = 3y^2 + 8$ جوابی در مجموعه اعداد صحیح ندارد.

اگر چنین x و y صحیحی پیدا شوند، باقی‌ماندهٔ تقسیم x^2 بر ۳، مساوی با ۲ خواهد بود. پس x بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ولی در این‌صورت عدد صحیح m وجود دارد که $x = 3m \pm 1$. بنابراین

$$x^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3(3m^2 \pm 2m) + 1$$

۱) این مسأله را اندرو وایلز Andrew Wiles ریاضیدان انگلیسی ساکن آمریکا در سال ۱۹۹۳ حل کرده است.

2) Annals of Mathematics 3) Diophantus of Alexandria

۴) وقتی جوانتر بودم و اهل خواندن کتابهای نظریه اعداد، با اسم «معادلات سیاله» هم مواجه می‌شدم.

شمارهٔ ۵
(آبان ۱۳۸۰) صص ۳۴–۳۱

در نتیجه، باقیماندهٔ تقسیم هر مربع کامل بر ۳، برابر با صفر یا یک است که با چیزی که قبلاً نتیجه گرفتیم، در تضاد است.

خودتان بررسی کنید که یک مربع کامل در تقسیم بر ۴ یا ۸ به چه باقی‌مانده‌هایی می رسد. گاهی بررسی باقی‌ماندهٔ طرفین تساوی، در تقسیم بر آنها می‌تواند کارساز باشد. به عنوان مثال، مسألهٔ زیر در المپیاد داخلی ۱۹۷۶ آمریکا مطرح شده است.

تمرین ۲. *همهٔ عددهای صحیح مثبت a، b و c را بیابید که* $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$. (راهنمایی. ابتدا، این معادله را به شکل $c^2=(a^2-1)(b^2-1)-1$ بنویسید. با بررسی باقی‌ماندهٔ طرفین تقسیم بر ۴ نشان دهید که a و b باید زوج باشند. پس c هم زوج است. اگر a، b و c هم‌زمان صفر نباشند، عدد صحیح مثبت r وجود دارد که a، b و c بر 2^r بخش‌پذیرند ولی حداقل یکی از آنها بر 2^{r+1} بخش‌پذیر نیست. فرض کنید $a=2^r a_1$ و $b=2^r b_1$ و $c=2^r c_1$. این مقادیر را در معادلهٔ مسأله قرار دهید، آن را ساده کنید و به باقی‌ماندهٔ طرفین در تقسیم بر ۴ توجه کنید. به چه تناقضی می‌رسیم؟)

تمرین ۳. *معادله‌های دیوفانتی زیر را برای عددهای صحیح x و y حل کنید.*

۱) $1+x+x^2+x^3=2^y$ (راهنمایی. سمت چپ را به صورت $(1+x)(1+x^2)$ بنویسید.)

۲) $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

گاهی در حل معادله‌های دیوفانتی درجهٔ دوم، بد نیست آن را به عنوان یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب یکی از متغیرها در نظر بگیریم.

مثال ۳. همهٔ جوابهای معادلهٔ دیوفانتی $x^2-5xy+4y^2=7$ را به دست بیاورید.

اگر معادلهٔ درجه دوم را بر حسب x حل کنیم،خواهیم داشت

$$x=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2+28}}{2}$$

چون x صحیح است پس مقدار $\sqrt{25y^2-16y^2+28}=\sqrt{9y^2+28}$ هم باید صحیح باشد. یعنی $9y^2+28=z^2$ که z صحیح است. بنابراین $(z-3y)(z+3y)=28$. خودتان با توجه به این که حاصل‌ضرب دو عدد صحیح $z+3y$ و $z-3y$ مساوی با ۲۸ است، این حل را کامل کنید.

همان‌طور که مثال بالا نشان داد، معادله‌های دیوفانتی به شکل $x^2-Dy^2=A$ را، وقتی D یک مربع کامل باشد، می‌توان به راحتی حل کرد: اگر $D=M^2$، می‌توان معادلهٔ بالا را به شکل $(x+My)(x-My)=A$ نوشت، و سپس برای هر نمایش A به صورت حاصلضرب دو عدد صحیح A_1 و A_2، دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x+My=A_1 \\ x-My=A_2 \end{cases}$$

را برای محاسبهٔ مقدارهای x و y حل کرد.

به طور کلی، معادله‌های به شکل $x^2-Dy^2=A$، به معادلهٔ پل[1] معروفند. در حالتی که $A=1$، مساله یافتن همهٔ جوابهای صحیح این معادله، حل شده است: اگر x_0، y_0 عددهای صحیحی باشند که $x_0^2-Dy_0^2=1$، و D هم عددی صحیح باشد که مربع

۱) Pell، نام ریاضیدانی است که عملاً هیچ کار مهمی در بررسی این معادلات انجام نداده است!

کامل نیست، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$(x_\circ \pm y_\circ\sqrt{D})^۲ = x_\circ^۲ + Dy_\circ^۲ \pm ۲x_\circ y_\circ\sqrt{D}$$
$$(x_\circ \pm y_\circ\sqrt{D})^۳ = x_\circ^۳ + ۳Dx_\circ y_\circ^۲ \pm (۳x_\circ^۲y_\circ + Dy_\circ^۳)\sqrt{D}$$
$$\vdots$$

به کمک استقرا می‌توان نشان داد که $(x_\circ + y_\circ\sqrt{D})^n$ را می‌توان به صورت $A+B\sqrt{D}$ نمایش داد که A و B عددهای صحیح هستند و به‌علاوه، $(x_\circ - y_\circ\sqrt{D})^n = A - B\sqrt{D}$. بنابراین،

$$A^۲ - DB^۲ = (A+B\sqrt{D})(A-B\sqrt{D}) = (x_\circ + y_\circ\sqrt{D})^n(x_\circ - y_\circ\sqrt{D})^n$$

$$= (x_\circ^۲ - Dy_\circ^۲)^n = (۱)^n = ۱$$

پس $x = A$، $y = B$ هم جوابی از معادلهٔ $x^۲ - Dy^۲ = ۱$ است. می توان نشان داد (و البته آن را ثابت نمی‌کنیم) که این معادله دارای جوابی مثل $x_\circ$ و $y_\circ$ است که هر دوی آنها صحیح و مثبت باشند. بنابراین وقتی D مربع کامل نباشد، به روش فوق می‌توان بی‌نهایت جواب برای معادلهٔ مذکور ساخت. در ضمن، بنا به قضیهٔ دیگری در نظریهٔ اعداد، می‌توان $x_\circ$ و $y_\circ$ را طوری انتخاب کرد که همهٔ جواب‌های معادلهٔ ذکر شده، به شیوهٔ بالا به دست بیایند. به این جواب مناسب، «جواب بنیادی» [1] می گویند.

تمرین ۴. *معادلهٔ $x^۲ - ۳y^۲ = ۱$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که $x = ۲$، $y = ۱$ جواب بنیادی است.* پس

$$(۲+\sqrt{۳})^۲ = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$
$$(۲+\sqrt{۳})^۳ = ۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}$$
$$(۲+\sqrt{۳})^۴ = ۹۷ + ۵۶\sqrt{۳}$$
$$\vdots$$

که جواب‌های جدیدی از معادلهٔ بالا را نشان می‌دهند.

در آینده باز هم به بررسی معادلات دیوفانتی خواهیم پرداخت.

۱۰. $(a+b)^n$ را، اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، چطور می‌توان صریحاً بر حسب a و b بیان کرد؟ روشن است که باید حاصل ضرب

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ بار}}$$

را بسط داد. به سادگی دیده می‌شود که نتیجه، مجموعی از عبارتهایی به شکل a^kb^{n-k} است که $\circ \le k \le n$: این عبارت درست وقتی ظاهر می‌شود که از k پرانتز، a و از $n-k$ پرانتز، b را انتخاب کرده باشیم. بنابراین، ضریب a^kb^{n-k} دقیقاً برابر است با تعداد این گونه انتخابهای a و b.

اگر پرانتزها را از چپ به راست با ۱ تا n شماره‌گذاری کنیم، هر انتخاب «از k پرانتز، a و از $n-k$ پرانتز، b» متناظر است با یک زیرمجموعهٔ k عضوی از $\{۱, ۲, \dots, n\}$، که در حقیقت پرانتزهایی را نشان می‌دهد که از آنها a را انتخاب کرده‌ایم.

تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از $\{۱, \dots, n\}$، که آن را با $\binom{n}{k}$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1) Fundamental solution

تمرین ۵. *ادعای فوق را ثابت کنید* (راهنمایی. تعداد k تاییهای مرتب $x_1, \ldots, x_k$ با مؤلفه‌های دو به دو متمایز از اعضای $\{1, \ldots, n\}$، برابر است با $n(n-1)\ldots(n-k+1)$: x_1، n انتخاب دارد و برای هر انتخاب x_1، برای x_2 هم $n-1$ انتخاب وجود دارد و برای هر انتخابِ x_1 و x_2، x_3 هم $n-2$ انتخاب دارد و ... ولی هر ترتیب چیدن اعضای یک زیرمجموعهٔ k عضوی، یک $k-$ تایی مرتب ایجاد می‌کند. پس هر زیر مجموعه، با $k!$ تا از این $k-$ تاییها متناظر است.)

بنابراین، گزارهٔ زیر که به «قضیهٔ دو جمله‌ای نیوتن» معروف است را ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۱.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

روشن است که $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

تمرین ۶. *فرض کنید* $P(x)$ *یک چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر* n *باشد و* r، *یک عدد حقیقی. می‌دانیم که اگر* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$، $P(i) = r^i$. *مقدار* $P(n+1)$ *را محاسبه کنید.*

(راهنمایی. فرض کنید $P(x)$ را به صورت $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + \cdots + a_nx(x-1)\cdots(x-n+1)$ بتوان نمایش داد. با استقرای ریاضی، و به‌کمک قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن، نشان دهید که برای هر $0 \le m \le n$، $a_m = \frac{(r-1)^m}{m!}$. بنابراین

$$P(x) = 1 + (r-1)x + \frac{(r-1)^2}{2!}x(x-1) + \cdots + \frac{(r-1)^n}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

و روشن است که سمت راست، یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n است که مقدارش در $n+1$ نقطه با مقدار $P(x)$ یکسان است؛ پس دو چندجمله‌ای، یکی هستند و بنابراین

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 1 + \tbinom{n+1}{1}(r-1) + \tbinom{n+1}{2}(r-1)^2 + \cdots + \tbinom{n+1}{n}(r+1)^n \\ &= r^{n+1} - (r-1)^{n+1} \end{aligned}$$

گزارهٔ ۱۰، دربند ۵[1] نتیجه می‌دهد که اگر دو چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر n، برای $n+1$ عدد دو به دو متمایز، مقدارهای مساوی داشته باشند، با هم یکسانند (راهنمایی: تفاضل آنها از درجهٔ حداکثر n است ولی $n+1$ ریشه دارد پس باید چندجمله‌ای صفر باشد.) یعنی حداکثر یک چندجمله‌ای $P(x)$، از درجهٔ حداکثر n، وجود دارد که در رابطه‌های $P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_{n+1}) = y_{n+1}$ (که x_i ها عددهای دو به دو متمایزی هستند) صدق کند. از سوی دیگر، می‌شود فرض کرد $P(x)$ به صورت

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

قابل نمایش است. از اینجا، می‌شود ضرایب a_i را، با قرار دادن x_i به جای x، به ترتیبی همانند تمرین بالا، محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} P(x_1) = y_1 &\implies a_0 = y_1 \\ P(x_2) = y_2 &\implies a_1 = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

متمایز بودن x_i ها نتیجه می‌دهد که همواره می‌توان همهٔ a_i ها را به دست آورد و نهایتاً به یک چندجمله‌ای رسید که در رابطه‌های $P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_{n+1}) = y_{n+1}$ صدق می‌کند. به این روشِ یافتن جواب یکتای مسألهٔ فوق، درون‌یابی [2] می‌گویند.

۱) آمادگی برای المپیاد ریاضی، ماهنامهٔ ریاضیات، سال اول، شماره سوم، مهر ۱۳۷۹

2) Interpolation

مسایل المپیادی

علی شوریده

۵-۱) ثابت کنید برای هر $n \geq 6$، شش‌ضلعی محدبی وجود دارد که قابل افراز به n مثلث مساوی است.

۵-۲) سه لیست A و B و C داده شده‌اند. لیست A شامل اعداد به شکل 10^k در پایه ۱۰ است. لیست‌های B و C شامل همان اعداد، به‌ترتیب در مبنای ۲ و ۵ هستند.

A	B	C
۱۰	۱۰۱۰	۲۰
۱۰۰	۱۱۰۰۱۰۰	۴۰۰
۱۰۰۰	۱۱۱۱۱۰۱۰۰۰	۱۳۰۰۰
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n > 1$، دقیقاً یک عدد در دقیقاً یکی از دو لیست B و C وجود دارد که دارای n رقم است.

۵-۳) $M \subseteq \mathbb{Q}$ دارای این خاصیت است که

۱ـ اگر $a, b \in M$، آنگاه $a + b \in M$، $ab \in M$.

۲ـ برای هر عدد گویای r، درست یکی از سه گزارهٔ زیر صحیح است.

$$r = 0, \qquad -r \in M, \qquad r \in M.$$

ثابت کنید M بر مجموعه اعداد گویای مثبت منطبق است.

۵-۴) دو دایره S_1 و S_2 با مراکز O_1 و O_2 یکدیگر را در M و N قطع کرده‌اند. شعاع O_1M، S_2 را در F و شعاع O_2M، S_1 را در E قطع می‌کند. خطی که از M به موازات EF رسم شده است S_1 و S_2 را به‌ترتیب در A و B قطع می‌کند. نشان دهید $EF = AN + BN$.

ریاضیات شمارهٔ ۵
(آبان ۱۳۸۰) صص ۳۵ـ۳۵

حل مسأله‌های المپیادی (شماره ۳)

امید نقشینه‌ارجمند

مسأله‌ها

۳-۱) ترازویی با n سنگ به وزن‌های ۱، ۳، $۳^۲$، ...، $۳^{n-۱}$ کیلو داده شده. نشان دهید که می‌توان با قرار دادن بعضی از سنگ‌ها در یک کفهٔ ترازو و بعضی دیگر در کفهٔ دوم، هر وزن N کیلویی را توزین کرد؛ به شرط این که N عددی طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$ باشد.

۳-۲) از پنج دایرهٔ مفروض، هر چهار دایره از یک نقطه می‌گذرند. ثابت کنید نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

۳-۳) وزارت راه و ترابری می‌خواهد بین ۶ شهر ۵ جاده بکشد، طوری که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر مسافرت کرد(هر جاده دو شهر را به هم وصل می‌کند، جاده‌ها یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند و از شهرهای دیگر نمی‌گذرند). آیا می‌تواند طوری این کار را انجام دهد که کوتاه‌ترین فاصله‌ها بین شهر به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ۳، ...، ۱۵ کیلومتر، از طریق شبکه جاده‌ها باشد؟

۳-۴) n نقطهٔ قرمز و n نقطهٔ آبی روی یک خط راست قرار دارند(همگی متمایزند). تعیین کنید کدام یک از این دو عدد بزرگ‌ترند:

مجموع فواصل دو به دوی نقاط آبی از نقاط قرمز،

یا

مجموع فواصل نقاط قرمز از یک‌دیگر، به‌اضافهٔ مجموع فواصل دو به دوی نقاط آبی از هم.

۳-۵) در یک دوره مسابقهٔ تنیس، n بازیکن با نام‌های $A_۱, \ldots, A_n$ شرکت دارند. هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم مسابقه می‌دهند. اگر W_i تعداد بردهای A_i و L_i تعداد باخت‌های A_i باشد، ثابت کُنید

$$W_۱^۲ + W_۲^۲ + \cdots + W_n^۲ = L_۱^۲ + L_۲^۲ + \cdots + L_n^۲$$

(توجه کنید که مسابقهٔ تنیس، تساوی ندارد!)

شمارهٔ ۵ (آبان ۱۳۸۰) صص ۳۸_۳۶

پاسخ‌ها

۳-۱) می‌دانیم که $\circ < N + \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱) \leq ۳^n - ۱$ پس $\circ \leq N \leq \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$. هر عدد طبیعی بسطی یکتا در مبنای ۳ دارد؛ پس $N + \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$ (که عددی طبیعی است) را نیز می‌توان در مبنای ۳ بسط داد. با توجه به این‌که این عدد از ۳^n کوچک‌تر است، بسط آن حداکثر n رقم دارد یعنی اعداد $a_\circ$، $a_۱$، …، $a_{n-۱}$ در مجموعهٔ $\{\circ, ۱, ۲\}$ موجودند که

$$N + \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱) = a_\circ + ۳a_۱ + ۳^۲ a_۲ + \cdots + ۳^{n-۱}a_{n-۱}$$

توجه کنید که $۱ + ۳ + ۳^۲ + \cdots + ۳^{n-۱} = \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$؛ پس

$$N = (a_\circ - ۱) + ۳(a_۱ - ۱) + ۳^۲(a_۲ - ۱) + \cdots + ۳^{n-۱}(a_{n-۱} - ۱)$$

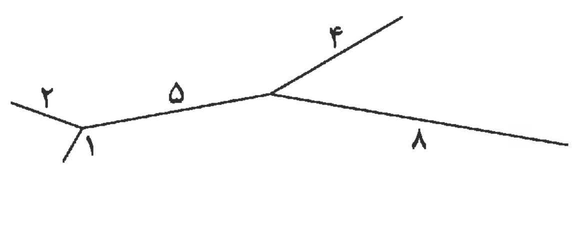
و در ضمن $a_i - ۱ \in \{\circ, +۱, -۱\}$ اکنون برای توزین وزنه N کیلویی، کافی است سنگ ۳^i کیلوگرمی را در کفه راست قرار دهیم اگر $a_i - ۱ = ۱$ و آن را در کفه چپ قرار دهیم اگر $a_i - ۱ = -۱$.

۳-۲) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید هیچ نقطه‌ای موجود نباشد که هر پنج دایره از آن گذشته باشند. به ازای هر چهار دایره، نقطه‌ای وجود دارد که روی این چهار دایره است. به پنج حالت می‌توان چهار دایره انتخاب کرد و نقطه متناظر با هر انتخاب، با نقطهٔ متناظر با انتخاب دیگر متفاوت خواهد بود، و لذا پنج نقطه وجود دارند که از هر کدام دقیقاً چهار دایره می‌گذرد.
از دو راه تعداد تقاطع‌های بین این پنج دایره را محاسبه می‌کنیم. از طرفی هر دو دایره یکدیگر را حداکثر دو نقطه قطع می‌کنند؛ پس تعداد تقاطع‌ها کوچک‌تر یا مساوی $\binom{۵}{۲} \times ۲$ است. توجه کنید که منظور ما از تعداد تقاطع، تعداد نقاط نیست؛ تعداد برخوردهاست.
در هر یک از پنج نقطه کذایی چهار دایره عبور کرده است، پس تعداد تقاطع‌ها دست کم $\binom{۴}{۲} \times ۵$ است. در نتیجه نامساوی زیر باید درست باشد.

$$۵ \times \binom{۴}{۲} \leq ۲ \times \binom{۵}{۲}$$

و یا به عبارتی $۳\circ \leq ۲\circ$، که تناقض است.

۳-۳) بله، می‌تواند این کار را انجام دهد. شکل زیر یک روش برای این جاده‌کشی را نشان می‌دهد. آیا می‌توانید روش دیگری بیابید؟



۳-۴) نشان می‌دهیم مجموع اول از مجموع دوم بیشتر است. این $2n$ نقطه، روی خط مذکور $2n-1$ پاره خط به وجود می‌آورند. یکی از این پاره‌خط‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنید سمت راست این پاره خط b نقطه آبی و r نقطه قرمز وجود داشته باشد؛ پس سمت چپ آن $n-b$ نقطه آبی و $n-r$ نقطه قرمز وجود دارد. در محاسبه مجموع اول (فاصله نقاط ناهم‌رنگ) طول این پاره‌خط دقیقاً $b(n-r)+r(n-b)$ مرتبه شرکت می‌کند و در محاسبه مجموع دوم (فاصله نقاط هم‌رنگ) طول این پاره خط دقیقاً $b(n-b)+r(n-r)$ مرتبه شرکت می‌کند. تفاضل این دو را محاسبه می‌کنیم.

$$b(n-r)+r(n-b)-b(n-b)-r(n-r)$$

$$=b^2-2br+r^2=(b-r)^2\geq 0$$

توجه کنید که در بعضی حالات نیز r و b مساوی نیستند و در نتیجه مجموع فواصل نقاط ناهم‌رنگ از مجموع فواصل نقاط هم‌رنگ بیشتر است.

۳-۵) آنچه باید ثابت کنیم معادل است با

$$(W_1^2-L_1^2)+(W_2^2-L_2^2)+\cdots+(W_n^2-L_n^2)=0$$

اگر دوجمله، دوجمله تجزیه کنیم خواهیم داشت

$$(W_1^2-L_1^2)+(W_2^2-L_2^2)+\cdots+(W_n^2-L_n^2)$$

$$=(W_1+L_1)(W_1-L_1)+(W_2+L_2)(W_2-L_2)+\cdots+(W_n+L_n)(W_n-L_n)$$

و با توجه به این که هر بازیکن دقیقاً $n-1$ بازی انجام داده است، به ازای هر i، $W_i+L_i=n-1$ و در نتیجه عبارت بالا برابر است با

$$(n-1)(W_1-L_1+W_2-L_2+\cdots+W_n-L_n)$$

$$=(n-1)\left((W_1+W_2+\cdots+W_n)-(L_1+L_2+\cdots+L_n)\right)=0$$

تساوی آخر، از این نتیجه می‌شود که به ازای هر برد، یک باخت و دقیقاً یک باخت وجود دارد.

تاریخ هندسه، از مصر و بابل تا ویتن (۲)

رامین دانشی

یونان

در حدود ۱۲۰۰ قبل از میلاد، قبایل دوریایی[1] دژهای کوهستانی خود را در شمال ترک کردند و برای یافتن قلم‌روهای بهتر و مساعدتر راهی جنوب شدند. هلاس[2]، جایی که یونانی‌ها پس از آن‌که از شمال رسیدند در آنجا مستقر شدند، شامل سرزمین‌های فعلی یونان و کرانهٔ دریایی آسیای کوچک و جزیره‌های دریای اژه بود.

قبیلهٔ اصلی یونانی‌ها، یعنی اسپارت‌ها، شهر اسپارت را بنا نهادند و ساکنان قبلی این سرزمین‌ها که مورد تعرض اسپارت‌ها قرار گرفته‌بودند برای حفظ جان به آسیای صغیر و جزایر یونیا[3] در دریای اژه گریختند و در این سرزمین‌ها، مهاجرنشین‌های تجاری یونانی را بر پا کردند.

این تمدن جدید، مکتب یونانی را بنیان نهاد؛ تمدنی که بر تفکر بر اساس استدلال و برهان تأکید می‌کرد. در این نوع تفکر، برای نخستین بار هندسه‌دانان شروع به پرسش سؤال‌هایی هم‌چون «چرا زوایای مجاور قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین مساوی‌اند؟» و یا «چرا قطر دایره آن را نصف می‌کند؟» کردند. در این دوران بود که جنبه‌های قیاسی که دانشمندان اکنون آن‌را مشخصهٔ بنیادی ریاضیات می‌دانند، اهمیت یافت.

از نخستین هندسه‌دانانی که اقدام به رواج تفکر هندسهٔ برهانی نمود تالس ملطی[4] بود که یکی از حکمای هفت‌گانه عهد باستان به‌حساب می‌آید. تالس بخش اول زندگی خود را به عنوان بازرگان گذراند و به آن اندازه ثروت اندوخت که بتواند نیمهٔ دوم زندگی خود را وقف مطالعه و سفر کند. تالس مدتی را در مصر گذراند و در آنجا با محاسبهٔ ارتفاع یکی از هرم‌ها به‌وسیلهٔ سایه‌ها، اعجاب همگان را برانگیخت. هم‌چنین، تالس نخستین فرد شناخته شده‌ای‌ست که کشف‌هایی در ریاضیات را به او منسوب کرده‌اند.

از جمله نتایج منسوب به او، می‌توان از حکم‌های زیر یاد کرد.

۱) یک دایره با قطرش به دو نیم می‌شود.

۲) زوایای مجاور قاعده در هر مثلث متساوی‌الساقین مساوی‌اند.

۳) زوایای متقابل‌به‌رأس که از تقاطع دو خط به‌وجود می‌آیند، مساوی‌اند.

۴) هر دو مثلث که دو زاویه و ضلع نظیر مساوی داشته باشند، مساوی‌اند.

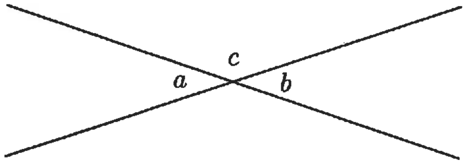
۵) هر زاویهٔ محاط در نیم‌دایره، قائمه است.

ارزش این نتایج را نباید با خود قضایا سنجید. این قضیه‌ها باید با این باور ارزیابی شوند که تالس آنها را به‌جای استفاده از شهود و تجربه با نوعی استدلال منطقی ثابت کرده‌است. برای مثال، در شکل صفحهٔ بعد، تالس برای اثبات تساوی دو زاویه a و b که متقابل

1) Doris 2) Hellas 3) Eunia 4) Thale Miletus

به رأس هستند، به‌جای روش سنتی که با بریدن زاویهٔ a و قرار دادن آن بر روی b برابری a و b را ثابت می‌کردند، با روش قیاسی چنین استدلال کرد که دو زاویهٔ a و c درکنار هم تشکیل زاویهٔ نیم‌صفحه می‌دهند و دو زاویهٔ b و c هم نیم‌صفحهٔ دیگری را تشکیل می‌دهند؛ پس

$$a + c = b + c$$



حال اگر از دو مقدار مساوی، مقدار مساوی را کم کنیم حاصل باز هم برابر است پس

$$a = b.$$

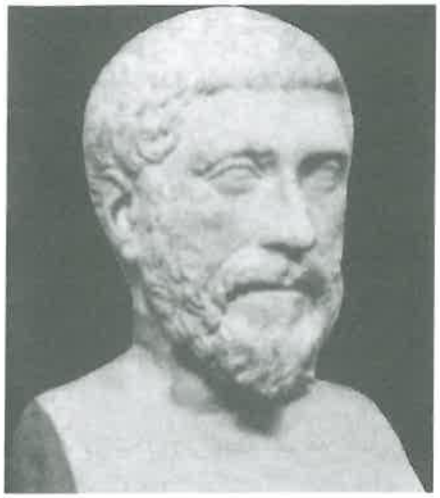
همان‌طور که گفته شد، تالس ارتفاع یک هرم را با کمک سایه‌ها محاسبه کرد. دو روایت از چگونگی این محاسبه توسط تالس بیان شده‌است. مشخص نیست که تالس دقیقاً از کدام روش استفاده کرده؛ اما هر دو روش به‌هرحال بیان‌گر نوع تفکر برهانی‌ای هستند که تالس در هندسه از آن استفاده می‌کرده‌است.

نخستین روایت بیان می‌کند که تالس، طول سایهٔ هرم را زمانی که سایه به اندازهٔ قد خود او بود یادداشت کرد. در روش دیگر گفته می‌شود که وی چوبی را بر زمین نصب کرد و سپس از مثلث‌های متشابه استفاده کرد. در هیچ‌یک از دو روایت، ذکری از روش به‌دست آوردن طول سایهٔ هرم (یعنی فاصله رأس سایه تا مرکز قاعدهٔ هرم) به میان نیامده‌است.

منبع اصلی اطلاعات ما دربارهٔ ریاضیات یونان قدیم، اثری‌ست به‌نام خلاصهٔ ائودومی [1] نوشتهٔ پروکلوس[2]. این اثر شامل شرح بسیار کوتاهی از رشد هندسهٔ یونانی از قدیم‌ترین زمان تا زمان اقلیدس است. با این‌که پروکلوس در قرن پنجم میلادی (یعنی حدود هزار سال پس از آغاز هندسه یونانی) می‌زیسته، دست‌رسی نسبتاً خوبی به آثار و نوشته‌های یونان باستان داشته‌است.

از جمله موضوعاتی که کتاب به آن می‌پردازد، شرح دستاوردهای تالس است که به‌طور خلاصه در این کتاب از آن یاد شده‌است. ریاضیدان برجستهٔ دیگری که در این اثر از او نام برده شده، فیثاغورس[3] است.

1) Eudemian Summery 2) Proclus 3) Pythagoras



پیروان فیثاغورس چنان هاله‌ای از ابهام دربارهٔ شخصیت او ساختند که اکنون دربارهٔ شخصیت و دستاوردهای واقعی فیثاغورس اطلاعات بسیار کمی وجود دارد.

ظاهراً فیثاغورس در حدود سال ۵۷۲ قبل از میلاد در جزیره ساموس[1] واقع در دریای اژه متولد شده‌است. با توجه به این‌که فیثاغورس ۵۰ سال از تالس جوان‌تر بوده و نزدیکی مکان زندگی او با ملط، این احتمال وجود دارد که فیثاغورس مدتی را نزد تالس به طلبگی گذرانده باشد.

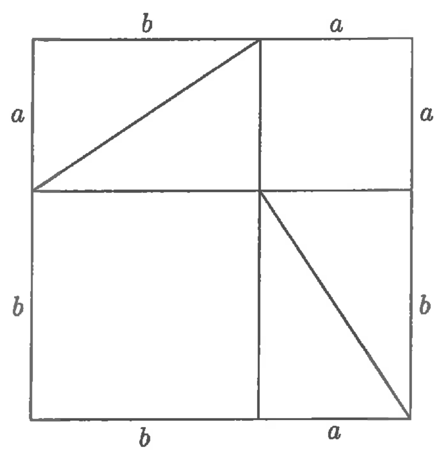
فیثاغورس مدتی را در مصر گذراند و سپس به سفرهای دور و درازی پرداخت و هنگام بازگشت به وطن، یونیا را تحت سلطه ایرانیان یافت؛ بنابراین به بندر کروتانا واقع در ایتالیای جنوبی مهاجرت کرد و در آنجا مدرسهٔ مشهورش را تأسیس کرد. او با وضع قوانینی خاص یک انجمن اخوت از اعضا و شاگردان مدرسه به‌وجود آورد.

او به اعضای فرهنگستان خود تأکید می‌کرد تا هندسه، حساب، موسیقی و فلسفه را بیاموزند، که از نظر او و پیروانش هر کسی که بر این علوم تسلط داشته باشد به سعادت واقعی در زندگی دست یافته‌است.

تأثیر انجمن اخوت و شعائر و مناسک آن به‌گونه‌ای بود که اعضای انجمن با افراد جامعه رفتاری کاملاً اشرافی و مغرورانه داشتند و همین رفتار باعث شد که نیروهای آزادی‌خواه جنوب ایتالیا به مدرسه هجوم بردند و ساختمان مدرسه را ویران کردند و همین موجب پراکندگی اعضای انجمن اخوت شد.

گفته می‌شود که پس از این حادثه، فیثاغورس به بین‌النهرین گریخت و حدود سنین ۷۵ تا ۸۰ سالگی در همان‌جا درگذشت. چون تعلیمات انجمن اخوت این بود که تمام کشفیات را به بنیان‌گذار عالی‌قدر فرهنگستان منسوب می‌کردند، به‌سختی می‌توان فهمید که کشفیات منسوب به فیثاغورس واقعاً توسط خود او به‌دست آمده یا توسط شاگردانش به‌دست آمده و به او منسوب شده‌است. به‌هرحال، معروفیت فیثاغورس در هندسه، مربوط به قضیه معروف فیثاغورس دربارهٔ رابطهٔ بین مربعات اضلاع مثلث قائم‌الزاویه است. اکنون می‌دانیم که این قضیه را بابلیان عصر حمورابی می‌دانستند، ولی برهان کلی برای اثبات این قضیه، توسط فیثاغورس بیان شد. این قضیه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است. فیثاغورس برای اثبات این قضیه، ابتدا مربعی به ضلع $a+b$ ساخت و سپس مانند شکل زیر آن‌را به شش قسمت تقسیم کرد. از این شکل داریم

$$(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab.$$



1) Samus

سپس مربعی دیگر مانند مربع اول ساخت و آن‌را به پنج قسمت مانند شکل ۴ تقسیم کرد. مجموع چهار مثلث داخل مربع به‌علاوه مساحت مربع داخلی، برابر است با مساحت مربع اصلی یعنی داریم

$$(a+b)^۲ = c^۲ + ۲ab$$

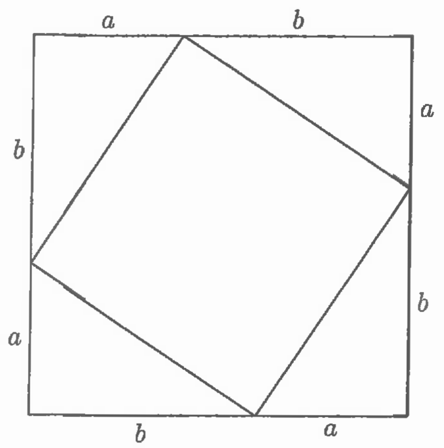
مقدار $۲ab$ برای چهار مثلث در مربع شکل بالا ثابت شده است؛ پس داریم

$$c^۲ + ۲ab = a^۲ + b^۲ + ۲ab$$

و در نتیجه

$$a^۲ + b^۲ = c^۲.$$

برای این‌که در شکل زیر ثابت کنیم که شکل داخلی مربعی به ضلع c است، باید این حقیقت را به‌کار ببریم که مجموع زوایای داخلی یک مثلث دو قائمه است.



مراجع

[1] G. J. Allman, Greek Geometry From Thales to Euclid. Dublin University Press, 1889. Reprint From Bell & Howell Cleveland, Ohio.

[2] Waclaw Serpinski, Pythagorean Triangles, Scripta Mathematica Studies, no. 9, Translated by Ambikeshwar Sha-ma, N.Y:Y.U,1962.

[۳] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم ۱۳۶۹، جلد اول.

[۴] جان برنان، علم در تاریخ. ترجمهٔ اسد پورپیرانفر، ح. فانی کامران. مؤسسه انتشارات امیرکبیر، ۱۳۵۴، جلد اول.

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹— ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

مسأله‌های جایزه‌دار!

در این شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. پاسخ‌های خود را به دفتر مجله ارسال کنید، به پاسخ‌های صحیح برگزیده جایزه تعلق می‌گیرد.

۱) سه دسته سنگ‌ریزه داریم که در آن‌ها به ترتیب ۵۱، ۴۹ و ۵ سنگ‌ریزه وجود دارد، در هر حرکت می‌توانیم دو دسته را با هم ادغام کنیم و یا دسته‌ای را که تعدادی زوج سنگ‌ریزه داشته باشد را به دو دسته با تعداد مساوی سنگ‌ریزه تفکیک کنیم، آیا می‌توانیم ۱۰۵ دسته که در هر کدام فقط یک سنگ‌ریزه وجود داشته باشد به دست آوریم؟ چگونه؟

۲) مکعب یک عدد n رقمی، m رقم دارد، آیا ممکن است $n+m=۱۳۸۰$؟

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس: