مجله ریاضی

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ ششم، آذر ۱۳۸۰

۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ ششم، آذر ۱۳۸۰

نشانی پستی ماهنامه

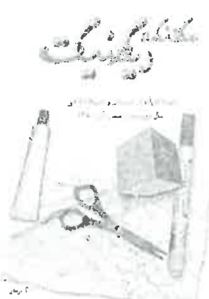
تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵

تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)

نمابر: ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست



روی جلد: نگاه کنید به «معمای مکعب‌های رنگی».

یادداشت

آرتور جفی استاد دانشگاه هاروارد (آمریکا) از ریاضیدانان سرشناس معاصر است. او علاوه بر آن‌که ریاضیدان برجسته‌ای‌ست، خلق و **خوی** اجتماعیِ بسیار برجسته‌ای نیز دارد. در سال جاری که تیم المپیاد ریاضی کشورمان برای شرکت در چهل و **دومین** المپیاد بین‌المللی ریاضی عازم آمریکا بود، مشکل حفظ حرمت هیأت اعزامی در مبادی ورودی با حمایت پرفسور جفی برطرف شد که البته اهتمام پرفسور کامران وفا فیزیکدان برجستهٔ ایرانی و استاد دانشگاه هاروارد نیز در حمایت از اعضای تیم و اعلام خواست آنان به پروفسور جفی، قدردانی ویژهٔ خود را طلب می‌کند. آن‌چه که در این شماره به‌عنوان یادداشت می‌آید، به‌نقل از مقاله‌ای به‌قلم پرفسور جفی است: به‌این وسیله، ضمن گرامی‌داشت او، با دیدگاه‌های جفی در زمینهٔ نقش و اهمیت ریاضیات آشنا می‌شویم. اصل این مطلب که مقالهٔ بلندی‌ست، در سال ۱۹۸۴ به‌عنوان ضمیمهٔ گزارش برای بررسی وضع ریاضیات در آمریکا **منتشر شد** و در اینجا با **تلخیص** به نقل از مجلهٔ نشر ریاضی (شمارهٔ ۱ فروردین ۱۳۷۶) با ترجمهٔ بهرام معلمی، درج می‌شود.

ریاضیات هنری‌ست باستانی و از همان آغاز از جملهٔ ذهنی‌ترین و در عین حال عملی‌ترین تلاش‌های آدمی به‌شمار آمده‌است. از ۱۸۰۰ سال پیش از میلاد، بابلی‌ها در زمینهٔ خواص مجرد اعداد به پژوهش پرداختند و در یونان دوران تمدن آتن، هندسه در حوزهٔ فعالیت‌های ذهنی انسان بلندترین جایگاه را از آن خود کرد. ریاضیات، در کنار این جنبه‌های نظری، به‌صورت ابزاری که هر روز برای مساحی زمین، دریانوردی و ساختن بناهای بزرگ مورد نیاز بود، شکوفا شد. مسایل عملی و پی‌آمدهای نظری یک‌دیگر را برانگیختند؛ آن‌قدر که تفکیک این دو رشته همواره ناممکن بوده است.

امروزه نیز وضع به‌همین منوال است. در قرن بیستم، دامنه و تنوع ریاضیات گسترش یافته و پیچیدگی و تجرید آن عمیق شده‌است. این رونق ناگهانی پژوهش‌های ریاضی چندان ژرف بوده که ممکن است حوزه‌هایی از ریاضیات برای افراد عامی ـ و در موارد زیادی حتی برای ریاضیدانانی که در زمینه‌های دیگری کار می‌کنند ـ نامفهوم به‌نظر برسد! علی‌رغم این روند به‌سوی تخصصی شدن ـ و در واقع به علت آن ـ ریاضیات بیش از هر زمان دیگری ملموس شده و نقش حیاتی یافته‌است.

در ربع قرن گذشته، ریاضیات و روش‌های ریاضی به جزء لاینفک، فراگیر و اساسی علوم، تکنولوژی و تجارت تبدیل شده‌است. در جامعهٔ ما که تکنولوژی‌گراست، بی‌سوادی جای خود را به «ناتوانی در درک یا به‌کارگیری ریاضیات» که نمایانگر شکافی آموزشی است، سپرده‌است. می‌توان سهم ریاضیات را در جامعهٔ تکنولوژیک ما با نیاز موجود زنده به هوا و غذا مقایسه کرد. در واقع می‌توان گفت که ما در عصر ریاضیات زندگی می‌کنیم: فرهنگ ما، «ریاضی‌سازی» شده است. هیچ‌یک از آثار ریاضیات پیرامون ما شگفتی آفرین‌تر از این کامپیوتری که در همه جا حضور دارد، نیست؛ به چند نمونهٔ معدود تأثیر کامپیوتر بر زندگی خود نظر می‌کنیم:

هواپیمایی. هم‌اکنون هواپیماهای خطوط هوایی تجاری می‌توانند در فرودگاه‌ها فرود آیند بدون آن‌که خلبان حتی ابزار کنترل را لمس کند. داده‌هایی در خصوص سرعت و موضع هواپیما به‌طور خودکار برای دستگاهی به‌نام فیلتر کالمن ـ باسی رله می‌شود. این دستگاه با پیدا کردن پیوستهٔ «بهترین برازش با روش کمترین مربع‌ها» برای تقریب مرتبهٔ اول قوانین فیزیک نیوتنی، هواپیما را به پرواز درمی‌آورد. «فیلترهای حالتی» مشابه، موشک‌ها و فضاکاوها و ماهواره‌های ردیاب را راهنمایی می‌کنند و از طریق «تجزیهٔ طیفی» با کامپیوتر نتایج کار آن‌ها را واضح‌تر و روشن‌تر می‌کنند.

پزشکی. نمونه گیری بزرگ مقیاس داده‌ها، پژوهش‌های پزشکی را برای یافتن همبستگی بیماری‌ها با الگوی سبک زندگی و تغذیه امکان پذیر می‌سازد؛ از این‌رو، تحلیل داده‌ها بررسی عامی از واگیرشناسی را ممکن می‌سازد. کامپیوترها با تدارک تجزیهٔ خودکار خون و ادرار و نیز سی‌تی‌اسکن از اندام‌های درونی، انقلابی در تشخیص بیماری‌ها بر پا کرده‌اند. کامپیوترها به‌زودی قادر خواهند بود با انجام آزمون‌های ساده و آزمون‌هایی که نیاز به عمل جراحی (بردن دستگاه‌ها به درون بدن) ندارند، خطر بیماری‌هایی را ده تا بیست سال زودتر پیش‌گویی کنند.

تجارت. روش سیمپلکس در برنامه‌ریزی خطی، با ساده کردن محاسبهٔ کارآمدترین تخصیص منابع، امر تولید، ساخت، کنترل موجودی و توزیع محصولات صنعتی را دگرگون کرده است. ظرفیت دست‌یابی و ذخیرهٔ بلوک‌های بزرگ داده‌ها، نگه‌داری سوابق، امور حساب‌داری، و مانند آن‌ها را به‌طور کلی تغییر داده‌است.

این کاربردهای بسیار گوناگون کامپیوتر چه نقطهٔ مشترکی دارند؟ هر یک از آن‌ها عمدتاً بر جبر خطی استوار است. جبر خطی حوزه‌ای از ریاضیات است که در اواخر قرن نوزدهم به وجود آمد و در آن زمان هیچ‌یک از این کاربردها به فکر کسی هم نیامده بود: انگیزهٔ تکامل این شاخه از جبر از تلاش برای فهم هندسهٔ فضای n بعدی منشأ می‌گرفت. استفاده از این ایده‌ها در خلال همین قرن به دست کسانی با استعداد استثنایی در ریاضیات انجام شد. وانگهی، هر یک از این کاربردها متضمن داده‌های چندان زیادی‌اند که حتی سریع‌ترین کامپیوترها نمی‌توانند تنها با جست و جوی کورکورانه به پاسخ‌های لازم دست یابند. این‌ها به ابداع و بهره‌گیری از روش‌های پیچیدهٔ ریاضی نیز نیاز داشتند.

می‌توانیم برای مستند کردن ارزش انتفاعی پژوهش‌های ریاضی برای جامعهٔ خود و نمایاندن چگونگی نفوذ ایده‌های خاص ریاضی بر جهان خویش، چندین جلد کتاب بنویسیم. اما چند مورد معدود را برگزیده‌ایم تا توان و ژرفای بسیاری از شاخه‌های فرعی مشتق از ریاضیات را نشان دهیم. هدف دیگری هم داریم که شاید مهم‌تر از گزارشی ساده در خصوص برخی از پیشرفت‌ها در جبههٔ مقدم ریاضیات و علوم باشد. می‌خواهیم بر دو موضوع که بارها و بارها در مسیر تاریخ پیش می‌آیند، تأکید ورزیم.

۱) ریاضیات عالی، هر چند تجریدی، به کاربردهای علمی در طبیعت منجر می‌شود. مسایل مشکل طبیعت، ابداع ریاضیات نوینی را بر می‌انگیزند. می‌توان از هر سویی به چرخهٔ تجرید و کاربرد عملی وارد شد. فاصلهٔ زمانی بین پیدایش ریاضیات تجریدی تا کاربردهای علمی بسیار گوناگون است. گاهی بی‌واسطه و آنی است و گاهی هم یک قرن طول می‌کشد تا نظریهٔ تجریدی از طریق کاربردهای علمی‌اش انقلابی بر پا کند. در بسیاری موارد، مقیاس زمانی چیزی بین این دو حالت است.

۲) پیش‌گویی این نکته که حوزه‌ای از ریاضیات دقیقاً در کجا سودمند خواهد بود ناممکن است. حتی مبدعین بسیاری از ایده‌های ریاضی هم غالباً از کاربردهای آن ایده‌ها به شگفت آمده‌اند. تنها چیزی که می‌توانیم با قطعیت بیان کنیم این است که زمانه به کسی که مدعی باشد «هرگز کاربرد عملی نخواهد یافت» پندی سزاوار خواهد داد. مثلاً، هاردی می‌نویسد که به خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته؛ اما پی‌آمدهای نظریهٔ تجریدی اعداد به آن‌جا کشیده شده‌است که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود و خصیصهٔ اعداد اول شالودهٔ طرح‌های نوینی را برای ساختن رمزهای سری تشکل می‌دهد. در خلال چند سال، اختراع دستگاه‌های شکافت و گداخت [هسته‌ای]، نظریات هاردی را در مورد نسبیت ابطال کرد.

شمارهٔ ۶
آذر [illegible] صفحه [illegible]

مصاحبه

تیم ملی المپیاد ریاضی ایران، امسال در مسابقات جهانی که در آمریکا برگزار شد به مقام هفدهم رسید؛ مقامی که کمتر کسی آن‌را پیش‌بینی می‌کرد. همان‌طور که در شماره‌های قبل گفتیم، بنا بود با صحبت چند تن از مسئولان تیم، دلایل این افت تیمی را بررسی کنیم.

در این شماره با آقای امید نقشینه‌ارجمند، سرپرست دوم تیم، گفت‌وگو کردیم تا نظرات ایشان را دربارهٔ المپیاد ریاضی در ایران و به‌طور خاص تیم المپیاد ریاضی امسال جویا شویم. گفت‌وگو در یکی از جلسات هیأت تحریریهٔ ماهنامه انجام شده و خانم نجمهٔ سروشی متن نهایی را آماده کرده‌اند.

لطفاً خودتان را معرفی کنید.

من، امید نقشینه ارجمند، دانشجوی دورهٔ دکترای ریاضی هستم و دو سال است که به عنوان سرپرست دوم تیم ملی المپیاد ریاضی همراه تیم به مسابقات می‌روم. هفت سال پیش، سال ۷۳، عضو تیم المپیاد ریاضی بودم و از آن زمان با تیم‌های سال‌های متوالی به‌عنوان مدرس همکاری دارم. چند سالی است که عضو کمیته ملی المپیاد نیز هستم.

در مورد نحوهٔ گزینش بچه‌ها توضیح دهید، چه‌طور انتخاب می‌شوند و چه امتحاناتی برای گزینش برگزار می‌شود؟

چند سالی است که سیستم گزینش تغییر کرده است. بچه‌ها اول در یک امتحان تستی شرکت می‌کنند. افرادی می‌توانند در این امتحان شرکت کنند که دانش‌آموز سال دوم یا سوم دبیرستان باشند و معدل دروس ریاضی آن‌ها از مقدار مشخصی کمتر نباشد. در این امتحان هزار تا هزار و ششصد نفر، انتخاب می‌شوند. در مرحلهٔ بعد یک امتحان تشریحی برگزار می‌شود. این‌بار ۴۰ نفر انتخاب می‌شوند که در دورهٔ دو ماهه‌ای که در باشگاه دانش پژوهان جوان برگزارمی‌شود شرکت می‌کنند. در طول این دوره هم یک سری امتحان برگزار می‌شود. در پایان ۹ نفر انتخاب می‌شوند که این ۹ نفر از کنکور دانشگاه معاف هستند. این‌ها یک دورهٔ دیگر هم می‌گذرانند و بعد از چند ماه تیم ۶ نفرهٔ المپیاد ریاضی انتخاب می‌شود. البته قبل از اعزام به مسابقات دورهٔ کوتاه مدتی هم برای این گروه ۶ نفره برگزار می‌شود.

سال‌های قبل این دورهٔ ۴۰ نفره وجود نداشت. در مرحلهٔ اول دانش‌آموزان یک امتحان تشریحی می‌دادند، حدود ۱۰۰ تا ۲۰۰ نفر انتخاب می‌شدند و بعد در یک شهر جمع می‌شدند و از بین آن‌ها ۹ نفر انتخاب می‌شد. بقیهٔ سیستم مثل الان بود.

شما خودتان هم در دوره‌های مختلف درس می‌دهید، سیستم تدریس در المپیاد چگونه است؟ اصولاً چه مباحثی بیشتر با بچه‌ها کار می‌شود؟

سیستم المپیاد طوری است که دانشجویانی که قبلاً المپیادی بوده‌اند، اگر بخواهند می‌توانند در دورهٔ المپیاد تدریس کنند و اکثراً هم همین افراد کار را بر عهده دارند. مباحثی که در دوره‌ها کار می‌شود عبارتند از هندسه، ترکیبیات، آنالیز، جبرخطی و نظریهٔ اعداد، که البته همهٔ این‌ها با تأکید بر حل مسأله است.

شما که از زمان دانشجویی‌تان، سال ۷۳، تا الان در این کلاس‌ها درس داده‌اید، آیا تغییر کیفی در این کلاس‌ها دیده‌اید؟

جواب دادن به این سؤال ساده نیست. چون همیشه مقداری نوسان وجود دارد و این چیز خاصی را نشان نمی‌دهد. البته طبیعی است که در سیستمی که آدم‌هایش عوض می‌شوند نوسان وجود داشته‌باشد. اما چیزی که بیشتر برای من اهمیت دارد این است که وقتی به گذشته نگاه می‌کنیم، می‌بینیم بچه‌هایی که وارد المپیاد می‌شدند و رتبه‌های بالایی کسب می‌کردند، علاقهٔ خاصی به ریاضی داشتند و تعداد قابل ملاحظه‌ای از آن‌ها در دانشگاه هم رشتهٔ ریاضی را انتخاب می‌کردند. حتی آن‌هایی که ریاضی نمی‌آمدند هم شور و شوقی داشتند؛ اما به دلایلی ریاضی را به‌عنوان رشتهٔ دانشگاهی انتخاب نمی‌کردند.

شمارهٔ ۶ (آذر ۱۳۸۰) صص ۶–۳

به‌طور کلی روشن بود که هر کس المپیادی است به ریاضی علاقه دارد؛ ولی احساس می‌کنم که چند سالی است که هم در دورهٔ تیم و هم در دورهٔ ۴۰ نفره اُفتی وجود دارد. المپیاد نسبت به قبل خیلی معروف‌تر شده و مزایای بیشتری پیدا کرده و بچه‌ها هم متوجه این مزایا هستند. در واقع کسی که وارد المپیاد می‌شود این‌طور هم می‌تواند فکر کند که درس می‌خواند، یک موقعیت ممتاز به‌دست می‌آورد، عضو تیم المپیاد کشور است. از کنکور معاف می‌شود، یک سفر خارج و اگر مدال هم بیاورد معافیت از سربازی. کلی هم جایزه می‌گیرد و اسمش هم دانش‌آموز المپیادی است. بنا براین خیلی‌ها با این اهداف حتی اگر به ریاضی علاقه نداشته باشند کار می‌کنند و بعضاً موفق هم می‌شوند. البته من آن‌ها را محکوم نمی‌کنم؛ به هر حال یک موقعیتی است که برای همه به‌وجود آمده است. ولی الان کسانی که وارد این سیستم می‌شوند، لزوماً علاقهٔ خاصی به ریاضی ندارند؛ یعنی انگیزه‌هایی غیر از ریاضی خیلی دخیل شده‌اند. البته عجیب هم نیست؛ چون هر وقت مسابقه‌ای بگذارید و یک جایزهٔ کوچک هم داشته باشد، هر کسی دوست دارد به آن برسد. اما در این‌جا اگر علاقه به ریاضی نباشد خیلی سیستم جالبی نخواهد بود. چیزی که برای من ناراحت کننده است این است که قبلاً المپیاد ابزاری بود که به‌وسیلهٔ آن یک سری استعدادهای خوب جذب ریاضی می‌شدند و رشتهٔ ریاضی به‌وسیلهٔ این‌ها قوت می‌گرفت؛ ولی الان آن افراد به‌وسیلهٔ این سیستم شناخته نمی‌شوند. البته همهٔ المپیادی‌ها حق دارند هر رشته‌ای که دوست دارند انتخاب کنند و اصلاً نمی‌توان به آن‌ها گفت حتماً باید رشتهٔ ریاضی را انتخاب کنند. اشکال در سیستم است.

خوب اگر هدف واقعاً ارتقای رشتهٔ ریاضی است، چرا شرط نمی‌گذاریم که مثلاً کسانی می‌توانند بدون کنکور وارد دانشگاه شوند که رشتهٔ ریاضی را انتخاب کنند و بقیه باید کنکور بدهند؟

برای این که بفهمیم المپیاد چه هدفی دارد، باید به گذشته برگردیم؛ یعنی ببینیم کسانی که المپیاد را بنیان‌گذاری کردند چه هدفی داشته‌اند. باید به این هدف احترام گذاشته شود. فکر می‌کنم یکی از بنیان‌گذاران المپیاد دکتر حداد عادل بود و یکی از اهداف ایشان هم این بود که ریاضیات در دبیرستان جدی‌تر گرفته شود و بچه‌های بیشتری به سمت این رشته کشیده شوند. قبل از این‌که المپیاد در کشور رواج پیدا کند، نسبت دانش‌آموزانی که در دبیرستان رشتهٔ ریاضی می‌خواندند در مقابل رشته‌های دیگر ـ مثلاً علوم تجربی ـ خیلی کم بود. به‌نظر می‌آید که این ایده برای این هدف واقعاً مؤثر بوده است؛ اما فقط گذشته هم مطرح نیست. این را هم باید در نظر گرفت که الان موقعیت چگونه است. الان در المپیاد چند چیز مهم وجود دارد. یکی این‌که المپیاد یک مسابقهٔ جهانی است و ما همان طور که مثلاً برای فوتبالمان دغدغه داریم، برای المپیاد هم حساس هستیم و نباید این را نادیده بگیریم و اگر بگوییم که فقط کسانی حق دارند وارد المپیاد شوند که می‌خواهد بروند رشتهٔ ریاضی، تیم افت می‌کند؛ چون طبعاً خیلی از کسانی که استعداد ریاضی دارند، خیلی چیزهای دیگر را هم دوست دارند. اگر بگوییم هر کسی می‌تواند بیاید ولی ما فقط از کنکور رشتهٔ ریاضی معاف می‌کنیم، باز هم مشکل وجود دارد. باید توجه کنیم که اصلاً چرا معافی از کنکور برای بچه‌ها گذاشته شد. در اولین دورهٔ المپیاد اصلاً قانون معافیت از کنکور وجود نداشت و مشکل عمده‌ای که ایجاد شد این بود که بچه‌ها ۶ تا ۷ ماه برای المپیاد وقت می‌گذاشتند و بعد هم باید در کنکور شرکت می‌کردند و همین دغدغهٔ کنکور باعث می‌شد بچه‌ها نتوانند با آرامش کار کنند و خوب نتیجه‌اش فشاری بود که به بچه‌ها وارد می‌شد. این بود که تصمیم گرفته شد بچه‌ها از کنکور دانشگاه معاف شوند. البته ایده‌هایی وجود دارد که این معافیت از کنکور یک مقدار توسعه پیدا کند؛ یعنی این‌که بچه‌هایی که در اردوی تابستان هستند هم بتوانند بدون کنکور رشتهٔ ریاضی را انتخاب کنند. این هم مشکلات خاص خودش را دارد؛ چون به هر حال سازمان سنجش امتحان مشخص و یکنواختی می‌گیرد و اگر ۴۰ نفر در رشتهٔ ریاضی و حدوداً همین تعداد در رشتهٔ فیزیک و کامپیوتر و شیمی بدون کنکور وارد شوند جمعیت قابل ملاحظه‌ای است و خوب مسألهٔ بزرگی ایجاد می‌کند. اما خیلی‌هایی که در سیستم المپیاد هستند فکر می‌کنند این کار می‌تواند برای علوم ریاضی مفید باشد.

فکر نمی‌کنید یکی از علت‌هایی که علاقه‌مندی بچه‌ها کم شده تغییری است که در نحوهٔ کار کردن برای ورود به المپیاد به‌وجود آمده است؟ مثلاً، یک سری مؤسسات که «تضمینی» آدم‌ها را وارد المپیاد می‌کنند ...

در این مورد نظر من کمی فرق می‌کند. من معتقدم وقتی المپیاد طوری شد که افرادی با علاقهٔ کم به ریاضی و انگیزه‌های دیگر خواستند واردش شوند این کلاس‌ها به‌وجود آمد؛ یعنی تقاضای

دانش‌آموزان عوض شد.

اگر ممکن است در مورد شیوهٔ تدریس در المپیاد توضیح بدهید، آیا تا به‌حال عوض شده؟

مسلماً طی سال‌ها به دلایلی مثل تغییرگروه سنیِ بچه‌هایی که در دوره شرکت می‌کنند محتوای تدریس تغییر کرده است. وقتی که «دورهٔ چهل نفره» اضافه شد، این مسأله مطرح شد که چهل نفر در تابستان وقت می‌گذارند، از بین این‌ها نه نفر از کنکور معاف می‌شوند و شش نفرشان هم عضو تیم می‌شوند. این که ما کاری بکنیم که این چهل نفر فقط مسأله حل کردن یاد بگیرند و آخر چهل منهای نُه نفر آن‌ها برگردند و بروند کار درستی نیست. این ایده مطرح شد که سعی کنیم یک مقدار ریاضیات به همه یاد بدهیم. به هر حال، تکنیک حل مسأله کل ریاضیات نیست. ریاضیات شامل یک سری مفاهیم هم هست. البته بچه‌ها برای این‌که مسأله‌ها را حل کنند، لزومی ندارد مفاهیم خیلی پیچیده‌ای یاد بگیرند؛ ولی یاد گرفتن یک سری مفاهیم در حل مسأله هم مفید است.

به طور کلی سیستم تدریس خیلی منسجم نیست؛ چون اساتید به نوعی گذرا هستند. کسانی که چند دوره درس داده‌اند و تجربه کسب کرده‌اند، پس از مدتی برای ادامهٔ تحصیل جدا می‌شوند و افراد جوان‌تر می‌آیند. در واقع با رفتن افراد، خیلی تجربه‌ها از بین می‌رود. هنوز یاد نگرفته‌ایم که طوری کار کنیم که اگر کسی کارش تمام شد و یک سری تجربه کسب کرد و رفت، نفر بعد مجبور نباشد راه رفته را دوباره طی کند. برای همین هنوز به یک جای خیلی خوب نرسیده‌ایم. البته این مدت صحبت‌هایی شده و یک سری جلسات گذاشته شده تا بفهمیم چه تغییراتی باید در سیستم آموزشی داده شود تا از لحاظ رتبهٔ جهانی که مهمترین نمود بیرونی المپیاد از نظر جامعه است به وضعیت بهتری برسیم و این مشکلات هم تا حدی حل شود.

این یکی دو سال اخیر رتبهٔ تیمی اُفت کرده، رتبه ۱۷ امسال هم در واقع کمترین رتبه در ۱۰ سال گذشته است.آیا دلایل این موضوع بررسی شده؟ آیا اصلاً دلایل خاصی داشته است یا نه؟

ببینید اگر چند سال اول المپیاد را که تیم در حال کسب تجربه بوده کنار بگذاریم، امسال رتبهٔ تیمی به حداقل رسید. در چند سال پیش یکی از نکات مثبت تیم ایران این بود که مکان ۱ تا ۱۰ را حفظ کرد. با توجه به آمار، در طول این ده سال سه یا چهار تیم در تیم‌های ۱ تا ۱۰ بودند و این نشان می‌دهد که تیم ایران قوی بوده است. سه سال پیش اول شدیم و رتبه‌های خوب دیگر هم وجود داشته است. باید سعی کنیم، دنبال دلایل این اتفاق باشیم و این اُفت را جبران کنیم.

ما احساس کردیم که بعضی از بچه‌هایی که وارد سیستم المپیاد می‌شوند، از همان اول تا انتها که برای تیم انتخاب می‌شوند روحیهٔ تخصصی دارند؛ مثلاً کسی هست که قدرت خیلی بالایی در حل مسایل هندسه دارد اما در ترکیبیات ضعیف است. اما در امتحانات به‌وسیلهٔ قدرتی که در یک سری شاخه‌ها دارد رُقبا را کنار می‌زند. آخر هم که وارد تیم می‌شود هنوز در بعضی شاخه‌ها ضعف دارد. نحوهٔ امتحان هم طوری است که همهٔ سؤالات درهم داده می‌شود و مجموع نمرات اهمیت دارد. در المپیاد جهانی سؤالات سختی مطرح نمی‌شود؛ مثلاً لزومی ندارد که کسی در ترکیبیات خیلی حرفه‌ای باشد و قدرت و اطلاعات فوق‌العاده‌ای داشته‌باشد. در واقع اطلاعات کمتری هم برای خوب دادن امتحان کافی است. اما ضعف در بعضی سؤالات در امتحان اثر منفی می‌گذارد و اضطرابی هم که در مسابقهٔ جهانی هست، این مسأله را تشدید می‌کند. چیزی که مطرح شد این بود که بچه‌ها در روند آموزش، مثلاً از دورهٔ ۹ نفره به بعد به طور شاخه‌شاخه گزینش شوند. یعنی اگر کسی بخواهد در تیم پذیرفته شود، در همهٔ شاخه‌ها یک حداقل توانایی را داشته باشد و همین حد کفایت می‌کند تا بچه‌ها با روحیهٔ بهتری امتحان بدهند و احتمالاً نتیجهٔ بهتری کسب کنند.

فکر می‌کنید مسأله مهم تغییر نظام آموزشی، تأثیری در اُفت تیم المپیاد دارد؟

با تغییر نظام آموزشی محتوای درس‌ها و در بعضی موارد روش کار تا حدی تغییر کرده است. چنین اتفاقی مستقل از این که نظام جدید بهتر یا بدتر از نظام قبلی باشد، پی‌آمدهای زودگذر منفی دارد. منظورم این است که با توجه به این‌که دبیران باتجربه به نظام قبلی عادت کرده‌اند، تغییر این عادت برایشان کار ساده‌ای نیست. این پی‌آمدی است که در خیلی مسایل از جمله المپیاد هم تأثیر می‌گذارد و تا حدی باعث افت رتبه تیم المپیاد می‌شود.

به عقیده من این موضوع، رتبه تیم، چندان مسألهٔ مهمی نیست.

مسایلی وجود دارد که بسیار نگران کننده‌تر است. همان‌طور که قبلاً هم گفتم یکی از کارکردهایی که المپیاد در کشور ما داشت این بود که به‌وسیله آن تعدادی از دانش‌آموزان مستعد جذب رشته ریاضی می‌شدند و با توجه به اهمیت علوم پایه و ضعفی که ما در این شاخه‌ها داریم، این اتفاق بسیار مفید بود. متأسفانه چند سال است که تعداد کسانی که از طریق المپیاد جذب رشته ریاضی در دانشگاه‌ها می‌شود کم و کم‌تر شده‌است. این یک سؤال است که این روزها بچه‌هایی که می‌خواهند در دانشگاه تحصیل کنند، روی چه حسابی رشته تحصیلی خود را انتخاب می‌کنند؟

بعضی وقت‌ها یک رشته مد می‌شود و اکثریت به سمت آن می‌روند، به نظر من دلیل این اتفاق این است که بچه‌ها آرمان درست و حسابی ندارند.

ببینید! اگر ما یک هدفی داشته باشیم، مثلاً من بخواهم که یک کار مفید در کشورم انجام بدهم، با این که نفر اول کنکور چه رشته‌ای را انتخاب کرده مسیر زندگی‌ام عوض نمی‌شود. الان بچه‌ها به سمت رشته‌ای می‌روند که رقابت در آن بیشتر است و فکر می‌کنم در بچه‌ها این احساس که باید درکشورشان همه با هم یک کاری انجام دهند و همکاری کنند ضعیف شده است؛ چون بچه‌ها رقیب یکدیگرند. این که ما این قدر از بچه‌ها امتحان می‌گیریم و آن‌ها را می‌سنجیم هم در به‌وجود آوردن چنین روحیه‌ای مؤثر است. حالا درست است که در مورد کنکور چاره‌ای جز این نیست؛ اما این خلق و خو در همهٔ سیستم آموزشی ما نفوذ کرده است. وقتی نگاه می‌کنیم، می‌بینیم المپیاد هم چیزی شده مثل کنکور. رقابت سالم نیست، در حقیقت رقابت هدف شده است و سیستمی که انگیزه‌اش تنها رقابت باشد، سیستم سالمی نیست.

ریاضیات یک سوال دیگر که احتمالا برای بسیاری از دانش آموزان مطرح می‌شوداین است که چرا سیستم المپیاد همگانی نمی‌شود، به این مفهوم که چرا آموزش‌های دوره مثلا تکنیک‌های حل مسأله در مدارس ارایه نمی‌شود؟

درکتاب‌های درسی نظام جدید، مطالبی در مورد حل مسأله اضافه شده که به نظر می‌آید بر پایهٔ همین طرز فکر است که بچه‌ها با هنر حل مسأله یا آموزش بر پایهٔ حل مسأله آشنا شوند؛ ولی چیز دیگری که به ذهن ما رسید این است که دوره‌ای که برای چهل نفر گذاشته می‌شود همگانی بشود. ایده‌ای که به ذهن رسید این بود که این کلاس‌ها به صورت تلویزیونی اجرا شود؛ یعنی کلاس‌هایی در مورد تجزیه و تحلیل مسأله‌ها گذاشته شود. البته این ایدهٔ خامی است و نمی‌دانم تا چه حد قابل اجراست و به‌علاوه مشکلات خاص خودش را دارد؛ مثلاً بیشتر افرادی که توانایی انجام این کار را دارند، برای ادامهٔ تحصیل خارج از کشور هستند و در ضمن، برای یک چنین برنامه‌ای که در سطح میلیونی اجرا می‌شود تجربه و امکانات زیادی لازم است. ولی به‌هر حال اگر آموزش در سطح گسترده انجام شود خیلی مفیدتر است. من معتقدم دانش‌آموزان از نظر داشتن اطلاعات مشکلی ندارند؛ اما اکثر آن‌ها در حل مسأله ضعیف هستند. این مشکل مخصوص ریاضی نیست؛ چون خیلی جاها هست که آدم با مسأله برخورد می‌کند. در کتابی دیدم که «این‌که شما چه‌طور وسایلتان را در صندوق عقب اتومبیل می‌چینید یک مسأله است» و از این قبیل مسأله‌ها در همه جا هست. اما جایی که می‌شود قدرت حل مسأله را پرورش داد ریاضیات است.

در این جا باید به آموزش توجه شود. شاید نباید به دانش‌آموز گفت باید این کار را بکنی. باید سعی کنیم او را در موقعیتی قرار دهیم که خودش راه را کشف کند و مسأله را حل کند.

ریاضیات اما الان خیلی جاها این‌طوری است که دبیر راه‌حل خودش را ارائه می‌کند و بچه‌ها هم فرصت فکر کردن را پیدا نمی‌کنند.

البته این هم یک طرف قضیه است. بچه‌ها هم مهم هستند. یعنی باید ببینیم که بچه‌ها از کلاس چه توقعی دارند. شما یک معلم خوب را فرض کنید که در سال چهارم تدریس می‌کند و در یک وضعیتی قرار بگیرد که بچه‌ها فقط تست بخواهند. حالا او هر چه بگوید، بچه‌ها نمی‌پذیرند. واقعاً گاهی معلمین در موقعیتی قرار می‌گیرند که نمی‌دانند چه‌کار چه‌کار کنند. به‌هر حال بچه‌ها هم کنکور دارند و نمی‌توان این مسأله را نادیده گرفت. البته در این مورد باید خیلی فکر کرد تا به یک معضل تبدیل نشود. من فکر می‌کنم سیستم آموزشی وقتی کاملاً عوض می‌شود که معلم‌ها این تغییر را پذیرفته باشند. به هر حال، از نسلی که سال‌ها به یک سیستم عادت کرده است نمی‌توان انتظار داشت که روش کارش را به‌راحتی عوض کند.

بیضی‌ها و هذلولی‌ها

سلمان ابوالفتح‌بیگی

در این مقاله ابتدا به معرفی بیضی و هذلولی می‌پردازیم سپس به بعضی از خواص جالب آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱. یک بیضی مکان هندسی نقاطی مانند P است که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت مانند A و B مقداری ثابت است ($PA = PB =$ مقدار ثابت). به نقاط A و B کانون‌های بیضی گفته می‌شود.

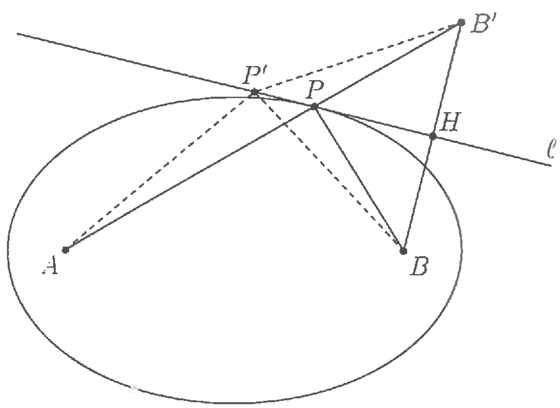
تعریف ۲. یک هذلولی مکان هندسی نقاطی مانند P است که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت مانند A و B مقداری ثابت است ($|PA - PB| =$ مقدار ثابت). به نقاط A و B کانون‌های هذلولی گفته می‌شود.

تمرین. معادلهٔ یک بیضی (هذلولی) را در حالت کلی در یک صفحه به‌دست آورده و بررسی کنید که در هر نقطه روی بیضی (هذلولی) مماس بر بیضی (هذلولی) وجود دارد.

خاصیت اول.

فرض کنید P نقطه‌ای روی بیضی به کانون‌های A و B باشد. در این‌صورت خط مماس بر بیضی در نقطهٔ P، نیم‌ساز خارجی زاویهٔ $\widehat{APB}$ است.

برهان. با توجه به این‌که بیضی یک شکل محدب است (و همچنین مماس بر منحنی از یک نقطه روی آن یکتاست) کافیست نشان دهیم اگر خط l نیم‌ساز خارجی زاویهٔ $\widehat{APB}$ باشد در این‌صورت نقطهٔ P تنها نقطه‌ای روی این خط است که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ A و B برابر $AP + BP$ است (در واقع می‌خواهیم نشان دهیم بیضی فقط در یک نقطهٔ P با خط l تلاقی دارد).



شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۵) صص [illegible]

با توجه به شکل فوق فرض کنید l، بیضی را در نقطه‌ای دیگر به‌نام P' قطع کند. در این‌صورت داریم: $AP' + BP' = AP + BP$.

حال فرض کنید H پای عمود وارد از B بر l و B' قرینهٔ B نسبت به خط l باشد. در این‌صورت با توجه به این‌که l نیم‌ساز خارجی زاویهٔ $\widehat{APB}$ است سه نقطهٔ A، P و B' در یک امتداد قرار خواهند گرفت. همچنین خواهیم داشت $BP = B'P$ و $BP' = B'P'$.
حال با توجه به نامساوی مثلث داریم

$$AP' + P'B' > AB' = AP + PB'$$

و در نتیجه

$$AP' + P'B > AP + PB$$

که تناقض است. ∎

خاصیت فوق برای هذلولی به این‌صورت خواهد بود:

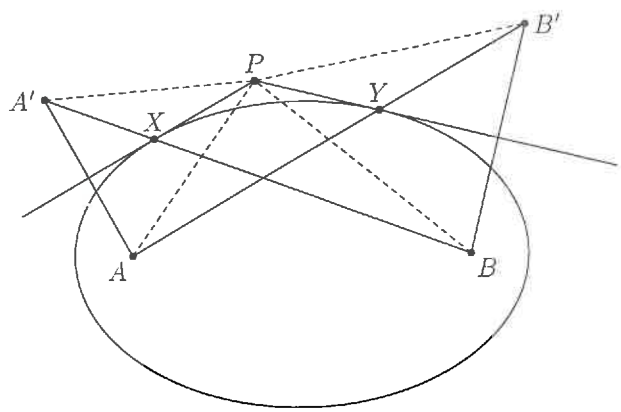
فرض کنید P نقطه‌ای روی هذلولی به کانون‌های A و B باشد. در این‌صورت خط مماس بر هذلولی در نقطهٔ P نیم‌ساز داخلی زاویهٔ $\widehat{APB}$ است.

برهان. اثبات، مشابه اثبات برای بیضی است. ∎

خاصیت دوم.

فرض کنید P نقطه‌ای خارج بیضی (هذلولی) به کانون‌های A و B باشد و X و Y نقاطی روی بیضی (هذلولی) به‌طوری که PX و PY بر بیضی (هذلولی) مماس باشند. در این‌صورت زوایای $\widehat{APX}$ و $\widehat{BPY}$ برابرند.

برهان. در واقع این خاصیت تعمیمی از خاصیت اول است. این خاصیت را برای حالت بیضی ثابت می‌کنیم (برای حالت هذلولی، اثبات مشابه است).



با توجه به شکل فوق فرض کنید A' قرینهٔ A نسبت به PX و B' قرینهٔ B نسبت به PY باشد در این‌صورت با توجه به خاصیت اول B و X و A' در یک امتداد و همچنین A و Y و B' نیز در یک امتداد قرار دارند. در ضمن چون $XA = XA'$ و $YB = YB'$ بنابراین $A'B = AB'$، همچنین $PA = PA'$ و $PB = PB'$. در نتیجه دو مثلث $A'PB$ و APB' با هم برابرند. پس دو زاویهٔ

$\widehat{APB}$ و $\widehat{A'PB}$ با هم برابرند. حال داریم $\widehat{A'PB} = \widehat{APB'}$؛ پس $\widehat{A'PA} = \widehat{B'PB}$ که نتیجه می‌دهد $2\widehat{XPA} = 2\widehat{YPB}$؛ پس

$$\widehat{XPA} = \widehat{YPB}.$$

▮

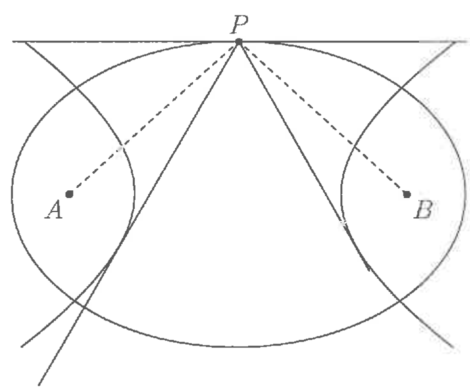
خاصیت سوم.

فرض کنید پرتو نوری درون یک بیضی که محیط آن آینه است تابیده می‌شود. در این‌صورت برای این پرتو نور و بازتاب‌های آن سه حالت وجود دارد: یا همواره پرتوهای نور از یکی از دو کانون بیضی می‌گذرند، یا همواره بر یک بیضی به کانون‌هایِ دو کانون بیضی اولیه مماسند و یا همواره بر یک هذلولی به کانون‌هایِ دو کانون بیضی اولیه مماسند.

برهان. بر حسب این‌که پرتو اولیه از یکی از دو کانون یا از بین دو کانون و یا خارج از دو کانون بگذرد یکی از سه حالت مطرح شده در بالا اتفاق می‌افتد.

الف) پرتو اولیه از یکی از دو کانون بگذرد. اگر کانون‌های بیضی نقاط A و B باشند و پرتو اولیه از نقطهٔ A بگذرد در این‌صورت با توجه به این‌که زاویهٔ تابش و بازتابش با هم برابرند و همچنین خاصیت اول، به راحتی نتیجه می‌شود که پرتوی بازتابش از نقطهٔ B می‌گذرد و این روند ادامه دارد.

ب) پرتو اولیه از بین دو کانون بگذرد. فرض کنید A و B کانون‌های بیضی باشند و پرتو اولیه از بین A و B بگذرد. حال هذلولی به کانون‌های A و B را در نظر بگیرید که بر پرتو اولیه مماس باشد (چرا چنین هذلولی وجود دارد؟). فرض کنید این هذلولی در نقطهٔ X بر پرتو نور مماس بوده و پرتو نور در نقطهٔ P با بیضی برخورد کرده و در آن نقطه بازتابش یابد.



حال فرض کنید PY مماس دیگری باشد که از نقطهٔ P بر هذلولی رسم می‌شود. کافی‌ست ثابت کنیم که PY پرتو بازتابش است. برای این کار با توجه به خاصیت اول کافی‌ست ثابت کنیم زوایای $\widehat{APX}$ و $\widehat{BPY}$ با هم برابرند که این حکم نیز با توجه به خاصیت دوم برقرار است.

▮

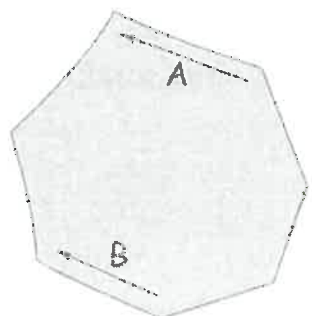
ج) پرتو اولیه از خارج دو کانون بگذرد. اثبات مشابه حالت (ب) است.

تمرین. خاصیت سوم را برای هذلولی تعمیم دهید.

آرش در سیارهٔ توپاپ (۴)

ایمان افتخاری

برای مدتی هر سه نفر در فکر فرو رفته بودند و معلوم بود که هرکدام سعی می‌کرد که راهی برای پیش بردن مسأله پیدا کند. آقای سای گفت «آیا واقعاً به فلش‌ها نیاز داریم؟ من فکر می‌کنم که این‌ها زیادی هستند.» سپس دو نقطهٔ A و B را روی دو تا از ضلع‌های چند ضلعی مشخص کرد و ادامه داد «مثلاً ممکن است روی این دو ضلع شمارهٔ ۱ داشته باشیم و قرار باشد که A به B بچسبد اگر نزدیک نقطهٔ A داخل چند ضلعی کسی روی سیاره ایستاده باشد و داخل چند ضلعی سطح سیاره را نشان بدهد، او می‌تواند آن‌قدر بچرخد که ضلعی که شمارهٔ ۱ روی آن است سمت راست او قرار بگیرد اگر یک قدم به سمت راست بردارد روی نقطه‌ای خواهد بود که نزدیک B است و در این حالت ضلع، شماره ۱ در طرف چپ او خواهد بود. پس جهت روبه‌رو جهت فلش‌هایی است که به این شکل روی چند ضلعی قرار گرفته‌اند.



البته واضح است که فلش‌های روی ضلع‌های با شماره ۱ هم یا این‌ها هستند یا عکس این‌ها. به هر حال اگر شماره‌ها را بدانیم فقط یک راه برای چسباندن ضلع‌ها وجود دارد.»

آرش سرش را تکان داد و گفت: حق با شماست. نوشتن اعداد روی اضلاع برای مشخص کردن نحوهٔ چسباندن آن‌ها به هم کافی است.

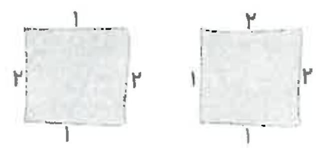
آقای خی گفت: پس در مرحلهٔ بعد باید فکری برای چند ضلعی‌هایی بکنیم که تعدادی عدد روی آنها نوشته شده. هر چند که این شکل‌ها می‌توانند خیلی پیچیده باشند.

آرش پیشنهاد کرد: چطور است که چند حالت ساده را بررسی کنیم؛ مثلاً حالت‌هایی که فقط ۲ یا ۴ ضلع در بیرون وجود دارد و ببینیم که آیا می‌توان حدسی زد یا نه.

آقای خی گفت «خوب حالت ۲ ضلعی که خیلی ساده است، چون فقط یک راه برای گذاشتن عددها داریم از طرفی ...» کمی مکث کرد. «از طرفی این شکل هم موجود آشنایی است چون اگر ضلع‌ها را بچسبانیم، چیزی شبیه یک کُره به‌دست می‌آوریم.

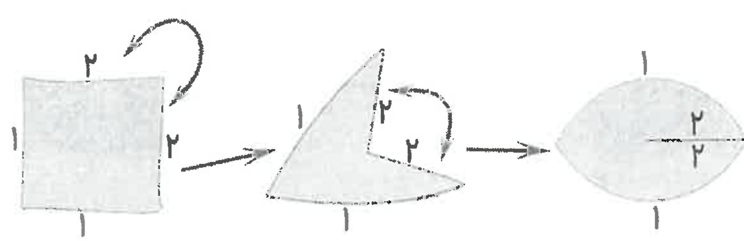
شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۰) صص ۱۳—۱۵

پس بهتر است برویم سراغ چهار ضلعی.»



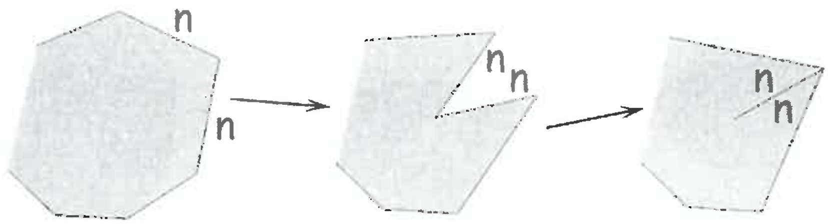
آقای سای دو تا شکل کشید و گفت «دو حالت بیشتر وجود ندارد. یا دو تا ضلع با شماره ۱ به هم چسبیده هستند یا از هم جدا هستند. پس در این حالت هم دو شکل خواهیم داشت در حالت ۶ ضلعی هم فاصلهٔ دو تا ۱ از هم، دو ضلع، یک ضلع یا صفر ضلع است. یعنی یکی از این شکل‌ها . . .»

قبل از این‌که ادامه دهد، آرش گفت «اما به این ترتیب ما فقط می‌فهمیم مسأله واقعاً چقدر پیچیده است و تعداد شکل‌های ممکن هم مرتباً بیشتر خواهد شد به نظر من بهتر است عجله نکنیم و همان حالت چهار ضلعی را کمی بیشتر بررسی کنیم.» آقای سای که خودش هم چندان از زیاد شدن حالت‌ها خوشحال نبود تأیید کرد که این کار شاید بهتر باشد. آقای خی کمی در فکر فرو رفته بود. بعد از این‌که آرش و آقای سای برای چند لحظه ساکت شدند گفت «یکی از چهارضلعی‌ها را می‌شود ساده کرد یعنی این کار را انجام بدهیم.» و مشغول کشیدن شکلی شد.

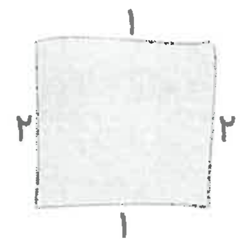


«. . . به این ترتیب به شکل مرحلهٔ قبل می‌رسیم که یک کُره است.»

آرش و آقای سای با تحسین سر تکان دادند، ناگهان آرش گفت «شما در واقع مطلب کلی‌تری را نشان دادید؛ اگر روی دو تا ضلع مجاور عددهای مساوی نوشته شده باشد می‌توانیم کار مشابهی انجام بدهیم و تعداد ضلع‌های چند ضلعی را دو تا کم کنیم.»

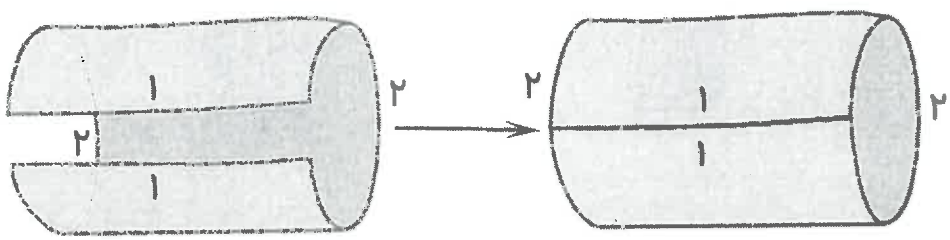


آقای سای گفت: پس فقط یک چهار ضلعی «ساده» داریم و آن هم این است. . . .

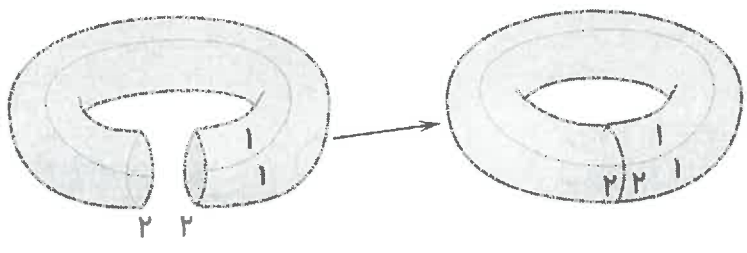


به نظر شما این همان کُرهٔ قبلی است یا با آن فرق می‌کند؟

آرش جواب داد: خوب، اگر ۱ها را به هم بچسبانیم یک استوانه درست می‌شود.

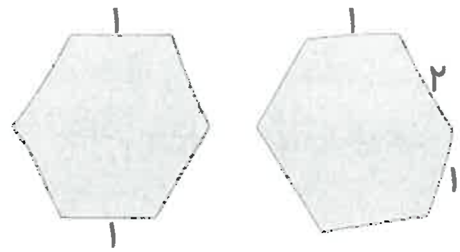


برای چسباندن دو تا عدد ۲ هم باید دو طرف استوانه را نزدیک همدیگر بیاوریم و این شکل که شبیه تیوپ ماشین است درست خواهد شد.

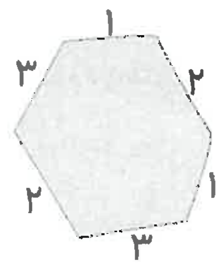


آقای خی گفت «خوب به نظر می‌رسد که واقعاً یک تفاوت‌هایی وجود دارد!» آقای سای و آرش لبخند زدند.

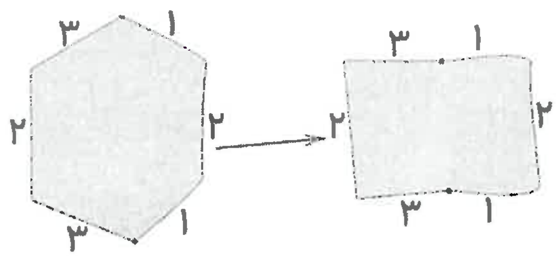
آقای سای: تا اینجا که امیدوارکننده بود! بهتر است به سراغ چند ضلعی بعدی برویم و البته حالا می‌دانیم که هیچ دو ضلع مجاوری نباید شماره مساوی داشته باشند. چون در غیر این‌صورت می توان شکل را ساده کرد. پس در شش ضلعی فقط دو حالت ممکن است. یا دو تا ضلع با شماره ۱ فاصله ۳ دارند یا فاصلهٔ ۲.



اگر فاصله ۱ باشد و مثلاً بین دو تا ضلع، عدد ۲ باشد. ضلع دیگر با شمارهٔ ۲ باید دو ضلع دیگر را جدا کند. در غیر این‌صورت دو ضلع با شمارهٔ ۳ مجاور خواهند بود پس در این حالت تنها شکل ممکن این‌جوری است.

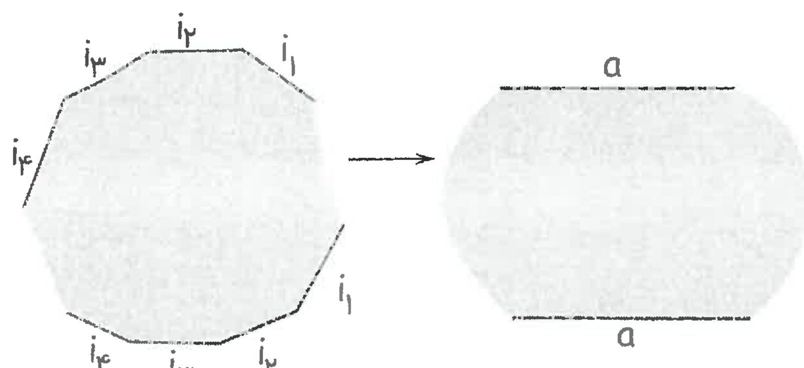


آقای خی گفت: جالب است. ولی این شکل کمی عجیب است. اگر من دو ضلع با شماره ۱ و ۳ را در امتداد هم قرار بدهم یک ضلع بلندتر به‌دست می‌آید که باید به یک ضلع بلند دیگر بچسبد یعنی این‌جوری ...



و در واقع این همان تویوپ ماشین است.

آرش: پس نوع دیگری هم از ساده کردن پیدا کردیم. اگر دنباله‌ای از ضلع‌ها با شماره‌های i_1، ...، i_m ظاهر شوند و یک بار هم با ترتیب عکس، یعنی i_m، ...، i_1 ظاهر شوند، می‌توان با آن‌ها مانند یک ضلع با یک شماره مثلا a نگاه کرد.



ادامه دارد ...

چند راه حل و تعمیم از قضیهٔ ویلسون

مرتضی بیات و حسین تیموری فعال

چکیده

در دانش بشری امکان دارد یک مسأله با راه‌حل‌های متنوع به اثبات برسد؛ از جمله، مسایل ریاضی از این دسته‌اند. تعدادی از این راه‌حل‌ها، ساده و بعضی دیگر نیم سخت و همچنین بعضی دیگر سخت هستند. اما در بعضی از این راه‌حل‌ها به‌راحتی می‌توان به تعمیمی از آن دست یافت و در بعضی دیگر به سختی و با اعمال شرایط اضافی به تعمیمی از آن دست می‌یابیم.

در این مقاله تصمیم داریم در ابتدا چندین راه‌حل متنوع که از ایده‌های جالب نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گراف‌ها و نظریهٔ ماتریس‌ها که برای اثبات قضیهٔ ویلسون در مجلات، کتب و پای‌گاه‌های اینترنتی مختلف ارایه شده است، گردآوری نماییم. در ادامه کاربردی از این قضیه را در ساختن تابعی که کلیهٔ اعداد اول را به‌دست می‌دهد، بیان می‌کنیم. سرآخر با بهره‌گیری از ایده‌های موجود و تلفیق این ایده‌ها به تعمیمی از این قضیه می‌پردازیم.

مقدمه

برای ایجاد تفکر تعمیم در دانش‌آموزان و دانشجویان می‌توان به آن‌ها اجازه داد و تشویق کرد که خودشان قضیه و مسألهٔ تازه را ارایه دهند. مهم نیست که قضیه یا مسألهٔ ارایه شده چقدر ساده و ابتدایی باشد، مهم این است که به آن‌ها فکر تعمیم دادن را یاد دهیم تا آنجا که می‌توانیم مطلب را به شکل تعمیمی در سر کلاس ارایه دهیم و بخواهیم دربارهٔ هر تعمیم هر مطلب ریاضی قابل فهم فکر کنند.

راه‌حل دیگری هم برای تعمیم مسایل می‌توان پیشنهاد کرد بدین صورت که ابتدا دانش‌آموزان و دانشجویان در یک موضوع خاص ریاضی کلیه راه‌حل‌های موجود را از طریق مجلات، کتب و اینترنت[۱] گردآوری نمایند و در مورد ایده‌های مختلف اثبات‌ها تفکر نمایند. در این‌صورت دانش‌آموزان و دانشجویان به قدرت تحلیل ویژه‌ای در اثبات‌ها دست پیدا خواهند کرد. همچنین با تلفیق راه‌حل‌های متنوع می‌توانند به اثبات‌های جدیدی از موضوع دست یابند. امکان دارد آن‌ها در بین اثبات‌ها، یک راه‌حل کاملاً مجرد را با یک راه‌حل هندسی و شهودی تلفیق کنند و به توجیه‌ها و تعمیم‌های زیبایی از این موضوع برسند. لازم به ذکر است که امکان دارد فرد، تعمیم خوب و یا حتی تعمیم بدی ارایه نماید، در صورتی‌که در طی زمان بر اثر دست‌یابی به تفکر ریاضی این تمایز را در خواهد یافت.

قبل از این‌که به راه‌حل‌های مختلف قضیهٔ ویلسون بپردازیم، بهتر است لطیفه‌ای را که جورج پولیا (ریاضیدان و آموزش‌گر موفق ریاضی) تعریف کرده، عنوان کنیم.

---

۱) با جستجوی کلمه کلیدی "Wilson's Theorem" این امر برای موضوع کار ما امکان‌پذیر است.

شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۵) صص ۲۱ـ۱۳

«ایشان در یک کنفرانس ریاضی چشمش به خانم امی نوتر که از زنان برجسته ریاضی بوده و کارهای با اهمیتی در جبر و هندسه جبری کرده و به تعمیم علاقه خاصی داشت می‌افتد، نزدیک می‌رود و سلام و احوال‌پرسی می‌کند، پولیا شروع می‌کند به گفتن این مطلب که ریاضیات امروز خیلی مبتذل شده‌است هرکس سریع شروع می‌کند به تعمیم کارهای دیگران و مرتب مقاله چاپ می‌کنند. خانم نوتر از این حرف کمی جا می‌خورند و پولیا دوباره ادامه می‌دهد که من اصلاً فکر می‌کنم آن‌هایی که فقط تعمیم می‌دهند مانند میمونی هستند که وقتی پای درختی می‌رسند بدون این‌که مفهومی از درخت بفهمند سریع از آن بالا می‌روند. در این موقع خانم امی نوتر طاقت نیاورده و سرش را پایین انداخته و می‌رود. پولیا پیش خود گفت چرا ناراحت شد، می‌توانست بگوید آن‌هایی که حالت‌های خاص را در ریاضی بررسی می‌کنند مانند همان میمونی هستند که یواش یواش از همان درخت پایین می‌آیند.» (به نقل از مقاله [۸])

ایده‌های مختلف اثبات قضیهٔ ویلسون

قضیهٔ ویلسون در نظریه اعداد به‌صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱ . *(ویلسون). فرض کنیم p یک عدد اول باشد، در این‌صورت*

$$(p-۱)! \equiv -۱ \pmod p.$$

(البته **عکس** این قضیه نیز برقرار است).

۱) راه‌حل اول (**قضیهٔ کوچک** فرما[۱]). طبق قضیهٔ کوچک فرما، جواب‌های معادلهٔ

$$x^{p-۱}-۱\equiv ۰ \pmod p$$

اعداد ۱، ۲، ...، $(p-۱)$ هستند؛ بنابراین چندجمله‌ای طرف چپ به‌صورت

$$x^{p-۱}-۱\equiv (x-۱)(x-۲)\cdots(x-p+۱) \pmod p$$

تجزیه می‌شود. حال اگر $x=۰$ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$-۱\equiv(-۱)^{p-۱}(p-۱)! \pmod p$$

راه‌حل دوم نیز از قضایای نظریهٔ اعداد به اثبات می‌رسد. برای این‌کار به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۱ . *فرض کنیم p یک عدد اول باشد.*

(a) $x^۲\equiv ۱ \pmod p$ *اگر و تنها اگر* $x\equiv \pm ۱ \pmod p$.

(b) *اگر a یک عدد صحیح باشد و $(a,p)=۱$ آنگاه عدد صحیحی مانند r وجود دارد به‌طوری‌که* $ar\equiv ۱ \pmod p$.

برهان. (a). اگر $x\equiv \pm ۱ \pmod p$ آنگاه $x^۲\equiv ۱ \pmod p$. برعکس، اگر $x^۲\equiv ۱ \pmod p$ آنگاه p عبارت $x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$ را عاد می‌کند و در نتیجه p باید $x-۱$ یا $x+۱$ را عاد کند.

(b). طبق قضیه بزو برای $(a,p) = ۱$ اعداد صحیح r و s وجود دارد به‌قسمی که

$$ar + ps = ۱$$

و این به‌این معنی است که

$$ar \equiv ۱ \pmod p.$$

▮

۲) **راه‌حل دوم (نظریهٔ اعداد[۲])**. اگر $p = ۲$ یا $p = ۳$ حکم واضح است. فرض کنیم $p \geq ۵$. طبق لم (b) برای هر عنصر $a \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ عددی چون $a^{-۱} \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ وجود دارد به‌طوری که $aa^{-۱} \equiv ۱ \pmod p$. حال طبق لم (a)، $a = a^{-۱}$ اگر و تنها اگر $a = ۱$ یا $a = p-۱$. بنابراین، $p-۳$ عنصر مجموعه $\{۲, ۳, \ldots, p-۲\}$ به $(p-۳)/۲$ جفت از اعداد صحیح به‌صورت $\{a_i, a_i^{-۱}\}$ اختیار می‌کنیم به‌طوری که $a_i a_i^{-۱} \equiv ۱ \pmod p$ برای $i = ۱, \ldots, (p-۳)/۲$. بنابراین

$$\begin{aligned}(p-۱)! &\equiv ۱ \cdot ۲ \cdot ۳ \cdots (p-۲)(p-۱) \\ &\equiv (p-۱) \prod_{i=۱}^{(p-۳)/۲} a_i a_i^{-۱} \\ &\equiv p-۱ \\ &\equiv -۱ \pmod p.\end{aligned}$$

۳) **راه‌حل سوم (نظریهٔ ماتریس‌ها [۴])**. ماتریس تابعی $P_n[x]$ یک ماتریس پایین مثلثی $n \times n$ است که سطر k ـ ام آن برای $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$ شامل جمله‌های بسط $(x+۱)^k$ است. این ماتریس را ماتریس تابعی خیام ــ پاسکال از مرتبه n گوییم. مثلاً $P_۴[x]$ می‌شود:

$$P_۴[x] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ & ۰ \\ x^۲ & ۲x & ۱ & ۰ \\ x^۳ & ۳x^۲ & ۳x & ۱ \end{bmatrix} \begin{array}{l} (x+۱)^۰ \\ (x+۱)^۱ \\ (x+۱)^۲ \\ (x+۱)^۳ \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم که $P_n[۰] = I_n$ و $P_n^{-۱}[۱] = P_n[-۱]$.

زیبایی این نوع ماتریس در قضیهٔ جالب زیر نهفته است.

قضیه ۲. *برای هر دو متغیر x و y داریم:*

$$P_n[x]P_n[y] = P_n[x+y].$$

اثباتی از این قضیه در مقاله [۱۰] آمده است.

حال با استفاده از ماتریس خیام ــ پاسکال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۲. فرض می‌کنیم e_i برداریکه در $\mathbb{R}^{n+1}$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باشد و $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. دراین‌صورت برای هر $t \in \mathbb{Z}$ و $i = 0, 1, \ldots, n$، داریم:

$$e_i P_n^t[1] e' = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} t^{i-j} = (t+1)^i.$$

(e' بمعنی ترانهادهٔ e است.)

قضیه ۳. برای هر عدد صحیح مثبت i و k، داریم:

$$\sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} (t+1)^i = k! \delta_{i,k}.$$

برهان. به‌وضوح ماتریس $A = P_n[1] - I_{n+1}$ یک ماتریس پوچ‌توان است. بنابراین، اگر $i < k$ و $i < n$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= e_i (P_n[1] - I_n)^k e' \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} e_i P_n^t[x] e' \\ &= \textstyle\sum_{t=0}^{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} (t+1)^i \end{aligned}$$

حال اگر $i = k = n$، ماتریس A بعد از n بار ضرب کردن تمامی درایه‌های آن صفر شده به‌جز درایهٔ سطر n ـ ام و ستون صفرام آن که برابر $n!$ است، بنابراین خواهیم داشت

$$(*) \qquad n! = e_n (P_n[1] - I_{n+1})^n e' = \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \binom{n}{t} (t+1)^n$$

و این حکم را ثابت می‌کند.

حال اگر در رابطهٔ $(*)$، $n = p - 1$ قرار دهیم و دو طرف را در پیمانهٔ p حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$(p-1)! \equiv \sum_{t=0}^{p-2} (-1)^{p-1-t} \binom{p-1}{t} (t+1)^{p-1} \pmod{p}.$$

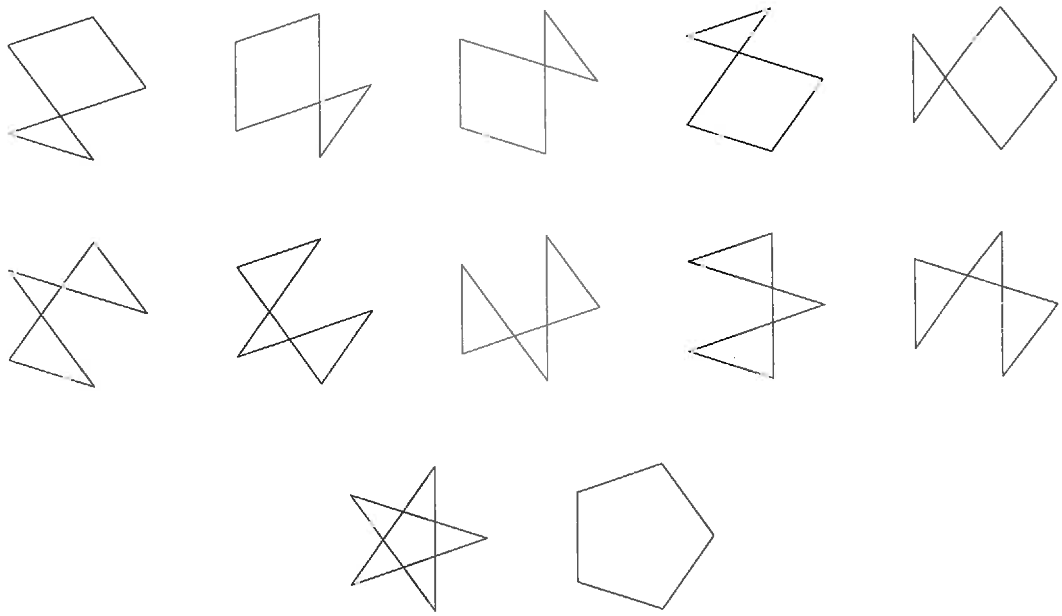
اینک طبق قضیه کوچک فرما ($(t+1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ برای $0 \le t \le p-1$) نتیجه می‌گیریم:

$$(p-1)! \equiv \sum_{t=0}^{p-1} (-1)^{p-1-t} \binom{p-1}{t} - 1 \pmod{p}.$$

از طرفی داریم $\sum_{t=0}^{p-1} (-1)^{p-1-t} \binom{p-1}{t} = (1-1)^{p-1} = 0$. بدین ترتیب حکم اثبات می‌شود. ∎

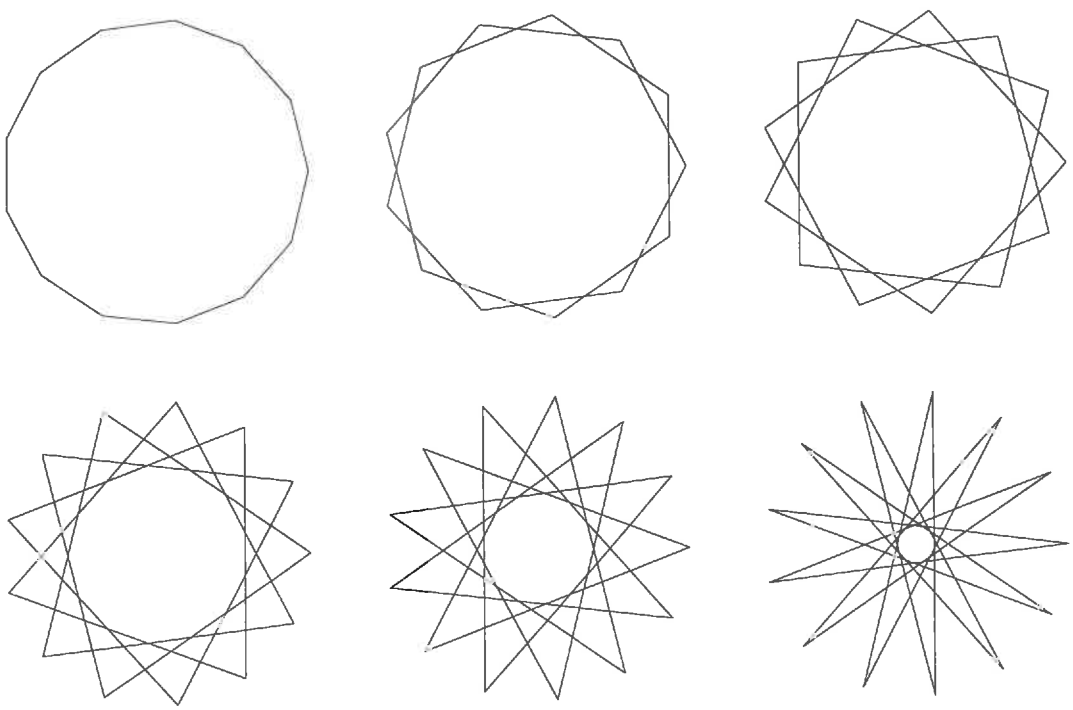
۴) **راه‌حل چهارم (نظریهٔ گراف‌ها[۳]).** اگر $p = 2$ آنگاه حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد. گیریم p نقطه روی محیط دایره واقع باشند، به‌طوری که دایره را به p کمان مساوی تقسیم کنند. چه تعداد چند ضلعی با اتصال این نقاط می‌توان، تشکیل داد (برخورد یال‌ها ایرادی ندارد)؟ این چند ضلعی‌ها را به‌خاطر آن‌که رؤوس‌شان، رؤوس یک p ضلعی منتظم محدب است، p ضلعی‌های ستاره‌گون می‌گوییم. به‌هر حال ملاحظه می‌کنیم که هر p ضلعی را به $2p$ طریق مختلف می‌توان رسم

کرد. از طرف دیگر همهٔ p ضلعی‌ها به تعداد $p!$ طریق مختلف قابل رسم هستند. بنابراین $p!/۲p$، p ضلعی ستاره‌گون مختلف را به‌دست می‌آوریم. شکل ۱، ۱۲ پنج ضلعی ستاره‌گون را نشان می‌دهد.



شکل ۱. دوازده ستاره‌گون پنج ضلعی

در بین $p!/۲p$، p ضلعی، دقیقاً $(p-۱)/۲$، p ضلعی وجود دارد که تحت دوران $۲\pi/p$ رادیان تغییر نمی‌کنند، چنین p ضلعی‌های ستاره‌گون را p ضلعی منتظم می‌گوییم، چون آن‌ها به‌صورت «ستاره» از p نقطه هستند و زاویهٔ پره‌های آن‌ها $(۱+۲k)\pi/p$ برای $۰ \leq k < (p-۱)/۲$ است. در حالت $p=۵$، تنها دو پنج ضلعی منتظم وجود دارد، و این در شکل ۱ در ردیف سوم نشان داده شده است، در حالت $p=۱۳$، شش ۱۳ ضلعی منتظم وجود دارد، که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. شش ۱۳ ضلعی منتظم ستاره‌گون

خاطر نشان می‌کنیم که $p!/2p-(p-1)/2$ تا p ضلعی ستاره‌گون در دسته‌های p تایی وجود دارد و عناصر هر دسته با دورانی به اندازه $2\pi/p$ به‌دست می‌آیند.

اگر $p=5$ تنها دو دسته از این دسته‌ها وجود دارند (در واقع ردیف اول و دوم شکل ۱ چنین هستند). بنابراین کل دسته‌های p تایی برابر است با

$$\frac{\frac{p!}{2p}-\frac{p-1}{2}}{p}=\frac{(p-1)!-(p-1)}{2p}$$

بنابراین $2p\,|\,(p-1)!-(p-1)$ و در نتیجه $p\,|\,(p-1)!+1$، که این حکم را ثابت می‌کند.

کاربردی از قضیهٔ ویلسون

قضیهٔ ویلسون به‌خاطر برقراری عکس‌اش در ساختن بسیاری از دستورها مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته بسیاری از این دستورها کاربرد عملی ندارند. برای مثال فرض کنیم $\{x\}=x-[x]$ که در آن $\{x\}$ جزء کسری و $[x]$ جزء صحیح عدد x است. آنگاه دستور زیر، فقط عددهای اول و همهٔ عددهای اول را به‌دست می‌دهد [۵]:

$$(n-2)^{\left\{\frac{(n-1)!+1}{n}\right\}}+2$$

فرمول دیگری توسط سی.پی. ویلانز در [۶] به شکل زیر ارایه گردیده است. قرار می‌دهیم

$$f(x)=\left[\cos^2\pi\frac{(x-1)!+1}{x}\right]$$

که در آن x عدد طبیعی است. بنابراین، به‌صورت ساده داریم

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{اول باشد یا } x=1\text{،}\ x\\ 0 & \text{اول نباشد،}\ x\end{cases}$$

حال اگر $\pi(m)$ تعداد اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی با m باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\pi(m)=-1+\sum_{x=1}^{m}f(x)$$

حال قرار می‌دهیم

$$F_n(a)=\left[\sqrt[n]{\frac{n}{1+a}}\right]\quad(a=0,1,2,\ldots;n=1,2,3,\ldots).$$

پس

$$F_n(a)=\begin{cases}1, & a<n\\ 0, & a\geq n\end{cases}$$

با توجه به این‌که n امین عدد اول کمتر یا مساوی 2^n است، خواهیم داشت

$$P_n=1+\sum_{m=1}^{2^n}F_n(\pi(m)).$$

تعمیمی از قضیهٔ ویلسون برای توان‌هایی از یک عدد اول

تعمیم‌های مختلفی از قضیهٔ ویلسون در مقاله‌های [۷، ۹] ارایه شده‌است. در اینجا تعمیمی از [۷] را که برای توان‌های یک عدد ارایه گردیده است، می‌آوریم.

برای شروع تعمیم در ابتدا نمادی را به‌شکل $(n!)_p$ معرفی می‌کنیم. این نماد به‌معنای حاصل‌ضرب کلیهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از n است که مضرب p نباشند.

قضیه ۴. *برای هر توان اول p^q، داریم:*

$$(p^q!)_p \equiv \pm 1 \pmod{p^q}$$

که در آن ± 1 برابر -1 است، مگر آن‌که در حالت $p = 2$، $q \geq 3$ عدد ± 1 برابر 1 است.

برهان. با بهره‌گیری از راه‌حل دوم دیده می‌شود که وارون m نسبت به عمل ضرب در پیمانه p^q، به‌قسمی که $m \leq p^q$، و در رابطه $m^2 \equiv 1 \pmod{p^q}$ صدق کند، تنها اعداد 1 و $p^q - 1$ هستند، مگر آن‌که $p^q = 2$ (موقعی که $m = 1$ باشد) یا $p = 2$، $q \geq 3$ که در این حالت جواب‌های اضافی $2^{q-1} - 1$ و $2^{q-1} + 1$ داریم. این حکم را ثابت می‌کند. ∎

نتیجه ۱. *برای توان اول p^q، گیریم N_0 کوچک‌ترین باقیماندهٔ نامنفی n در پیمانهٔ p^q باشد. پس*

$$(n!)_p \equiv (\pm 1)^{[\frac{n}{p^q}]}(N_0!)_p \pmod{p^q}$$

که در آن ± 1 همان چیزهایی است که در قضیه قبل وجود داشت.

برهان. هر r را به‌صورت حاصل‌ضرب $ip^q + j$ می‌نویسیم، بگیرید:

$$(n!)_p = \dot{\prod_{r \leq n}} r = \prod_{i=0}^{[\frac{n}{p^q}]-1} \dot{\prod_{1 \leq j \leq p^q}} (ip^q + j) \times \left(\dot{\prod_{1 \leq j \leq N_0}} \left(\left[\frac{n}{p^q}\right] p^q + j \right) \right)$$

$$\equiv ((p^q!)_p)^{[\frac{n}{p^q}]}(N_0!)_p$$

$$\equiv (\pm 1)^{[\frac{n}{p^q}]}(N_0!)_p \pmod{p^q}$$

با استفاده از قضیهٔ اخیر $\dot{\prod}$ نمایش‌گر حاصل‌ضرب اعداد صحیحی‌است که مضربی از p نیستند. ∎

در پایان، کارمان را با یک لطیفه که بی‌ارتباط با تعمیم نیست به پایان می‌رسانیم.

یک ریاضیدان که معمولاً هنگام سخن‌رانی دیگران خواب می‌رفت، در پایان سخن‌رانی که با کف زدن حضار از خواب می‌پرید برای این‌که نشان دهد خواب نبوده است همیشه این سؤال کلی را از سخن‌ران می‌کرد که آیا امکان تعمیم آن‌چه که گفته‌اید، وجود دارد. یک‌بار در یکی از این سخن‌رانی‌ها ریاضیدان ما از همان شروع کنفرانس به خواب رفت و هنگامی که معرفی کننده سخن‌ران جلو رفت که سخن‌ران را معرفی کند ریاضیدان در خواب بود، مدت معرفی مقداری بیش از معمول طول کشید و معرفی کننده در آخر گفت که سخن‌ران بیش از ۲۰۰۰ مقاله ریاضی دارد که در آن موقع حضار شروع به کف زدن کردند و ریاضیدان ما هم طبق معمول از خواب پرید و چون یک عدد ۲۰۰۰ هم در لحظه‌های آخر به گوشش خورده بود، دست بالا برد و پرسید معذرت می‌خواهم این عدد ۲۰۰۰ را نمی‌توان تعمیم داد؟ (برگرفته از مقاله [۸])

مراجع

[1] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to Theory of Numbers*, Fourth Edition, Clarandon Press, Oxford 1960.

[2] M.B. Nathanson, *Elementary Metohods in Numbers*, Springer - Verlag 1996.

[3] G.E. Andrews, *Numbers Theory*, Hindustan Publishing Corporation India 1992.

[4] M. Bayat and H. Teimoori, *Pascal Matrix and Generalization Wilson's Theorem*, Submitted to Amer. Math. Monthly (2001).

[5] N. Mackinnon, *Prime Number Formulae*, The Mathematical Gazette. **71** (1987) 113 - 114.

[6] C.P. Willans, *On The Formula for The nth Prime Numbers*, The Mathematical Gazette. **48** (1964) 413 - 415.

[7] *Wilson's Theorem for Prime Powers*, http ://www.math.uga.edu/.

[۸] امید علی‌کرم‌زاده، تعمیم در ریاضی، رشد آموزش ریاضی ۲۲ (۱۳۶۸) ۱۰ تا ۲۱.

[۹] هاشم سازگار، تعمیم قضیهٔ ویلسون،رشد آموزش ریاضی ۳۲ (۱۳۷۰) ۲۳ تا ۳۳.

[۱۰] جواد بهبودیان، ماتریس‌های مثلث خیام - پاسکال،رشد آموزش ریاضی ۴۹ (۱۳۷۶) ۲۴ تا ۲۷.

[۱۱] محمدرضا درفشه، مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه‌ها، نشر علوم پایه (۱۳۶۹).

مرتضی بیات و حسین تیموری فعال، مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

اصل برتران

مجید هادیان

می‌دانیم که دنباله اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ... نامتناهی است. برای این‌که ببینیم که اندازهٔ حفره‌های آن کران‌دار نیست، فرض کنید $N = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p$ حاصل‌ضرب همه اعداد اول کوچک‌تر از $k + 2$ باشد و توجه کنید که هیچ‌کدام از k عدد

$$N + 2, N + 3, N + 4, \ldots, N + k, N + (k + 1)$$

اول نیستند، از آنجا که برای هر $2 \leq i \leq k + 1$، می‌دانیم که i یک عامل اول کوچک‌تر از $k + 2$ دارد و این عامل N را نیز می‌شمارد و بنابراین $N + i$ هم بر این عدد اول بخش‌پذیر است. با این روش، مثلاً برای $k = 10$ می‌توان دید که هیچ‌کدام از ده عدد ۲۳۱۲، ۲۳۱۳، ۲۳۱۴، ...، ۲۳۲۱ اول نیستند.

با این حال نوعی از کران بالا برای حفره‌های دنباله اعداد اول وجود دارد. یک کران معروف بیان می‌کند که «فاصله تا عدد اول بعدی نمی‌تواند از عددی که شروع جستجوی ما بوده است بیشتر باشد». این بیان به اصل برتران[1] معروف است؛ زیرا این حدس توسط جوزف برتران[2] طرح و برای $n < 3000000$ با روشی تجربی بررسی شد. این اصل برای اولین بار توسط پاف‌نوتی چبیشف[3] در سال ۱۸۵۰ برای هر n ثابت شد و بعد ریاضیدان هندی رامانوجان[4] نیز برهانی ساده‌تر برای این اصل ارایه داد. اثباتی که ما آورده‌ایم، از پاول اِردُش[5] است که از اولین مقالهٔ منتشر شدهٔ وی در سال ۱۹۳۲ اقتباس شده‌است؛ جالب این‌که در آن زمان اردش نوزده ساله بود.

اصل برتران. برای هر $n \geq 1$، یک عدد اول p بین n و $2n$ قرار دارد.

برهان. ابتدا ضریب دو جمله‌ای $\binom{2n}{n}$ را تخمین می‌زنیم تا ببینیم که اگر هیچ عامل اولی بین n و $2n$ نداشته‌باشد، باید «خیلی کوچک» باشد. روند اثبات شامل پنج مرحله است.

۱) ابتدا اصل برتران را برای $n < 4000$ ثابت می‌کنیم. برای این کار، لازم نیست که ۴۰۰۰ حالت را در نظر بگیریم؛ کافی‌ست بررسی کنیم که

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

دنباله‌ای از اعداد اول است که هرکدام از اعضایش از دو برابر قبلی کوچک‌تر است. بنابراین اگر $n \leq 4000$، یکی از این چهارده عدد اول بین n و $2n$ قرار می‌گیرند (این حقه لانداو[6] است).

۲) حال ثابت می‌کنیم که برای هر عدد حقیقی $x \geq 2$،

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \qquad (1)$$

که علامت ما ـــ هم اینجا و هم در قسمتهای بعد ـــ به معنی این است که ضرب روی همه اعداد اول تا بیش‌تر از x انجام می‌شود. این قسمت از برهان از اصل مقالهٔ اردش استخراج نشده ولی توسط خود اردش ارائه شده است و واقعاً اثباتی زیباست.

---

1) Bertrand Potulate 2) Joseph Bertrand 3) Pafnuty Chebyshev 4) Ramanujan 5) Paul Erdös 6) Landau

ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که اگر q بزرگ‌ترین عدد اول نابیش‌تر از x باشد آنگاه

$$\prod_{p\le x} p = \prod_{p\le q} p$$

و به‌علاوه، $۴^{x-۱} \le ۴^{q-۱}$. بنابراین، کافی است که درستی رابطهٔ (۱) را برای حالتی که $x = q$ عددی اول است بررسی کنیم.

برای $x = ۲$ داریم $۲ \le ۴$؛ بنابراین در ادامهٔ کار، اعداد اول فرد $x = ۲m + ۱$ را در نظر می‌گیریم. اکنون حاصل‌ضرب را به دو قسمت تقسیم کرده و سپس محاسبه می‌کنیم:

$$\prod_{p\le ۲m+۱} p = \prod_{p\le m+۱} p \cdot \prod_{m+۱<p\le ۲m+۱} p \le ۴^m \binom{۲m+۱}{m} \le ۴^m \cdot ۲^{۲m} = ۴^{۲m}$$

همه جزئیات این «محاسبه یک خطی» به‌راحتی به‌دست می‌آیند؛ در حقیقت

$$\prod_{p\le m+۱} p \le ۴^m$$

با استقرا به‌دست می‌آید و نامساوی

$$\prod_{m+۱<p\le ۲m+۱} p \le \binom{۲m+۱}{m}$$

نتیجهٔ این نکته است که $\binom{۲m+۱}{m} = \frac{(۲m+۱)!}{m!(m+۱)!}$ عددی صحیح است که اعداد اول مورد نظر ما همگی در $(۲m+۱)!$ ظاهر می‌شوند ولی هیچ‌کدام از آنها در $m!(m+۱)!$ نیستند. در نهایت

$$\binom{۲m+۱}{m} \le ۲^{۲m}$$

از آنجا درست است که $\binom{۲m+۱}{m}$ و $\binom{۲m+۱}{m+۱}$ دو عامل (مساوی!) هستند که در عبارت

$$\sum_{k=۰}^{۲m+۱} \binom{۲m+۱}{k} = ۲^{۲m+۱}$$

ظاهر می‌شوند.

۳) با توجه به قضیهٔ لژاندر[۱] (ضمیمه را ببینید) می‌دانیم که $\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n)!}{n!n!}$ دقیقاً به تعداد

$$\sum_{k\ge ۱}\left(\left\lfloor \frac{۲n}{p^k}\right\rfloor - ۲\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

عامل اول p دارد. چون

$$\left\lfloor \frac{۲n}{p^k}\right\rfloor - ۲\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor < \frac{۲n}{p^k} - ۲\left(\frac{n}{p^k} - ۱\right) = ۲,$$

و این عامل باید عددی صحیح باشد، هرکدام از عوامل جمع حداکثر یک هستند. علاوه بر این، وقتی که $p^k > ۲n$، عوامل جمع صفر می‌شوند؛ بنابراین $\binom{۲n}{n}$ دقیقاً به تعداد

$$\sum_{k\le ۱}\left(\left\lfloor \frac{۲n}{p^k}\right\rfloor - ۲\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \le \max\{r : p^r \le ۲n\}$$

1) Legendre

عامل اول p دارد. بنابراین بزرگ‌ترین توان p که $\binom{2n}{n}$ را می‌شمارد، بزرگ‌تر از $2n$ نیست؛ به خصوص، اعداد اول بزرگ‌تر از $\sqrt{2n}$ حداکثر یک بار در $\binom{2n}{n}$ ظاهر می‌شوند.

علاوه بر این ــ و این، بنا به گفته اردش، ایده کلیدی اثبات او بوده ــ اعداد اول p در بازهٔ $\frac{2}{3}n < p \leq n$ اصلاً $\binom{2n}{n}$ را نمی‌شمرند! در واقع، $3p > 2n$ نتیجه می‌دهد (برای $n \geq 3$ و $p \geq 3$) که p و $2p$ تنها مضارب p هستند که به عنوان عامل در صورت $\frac{(2n!)}{n!n!}$ ظاهر می‌شوند، در حالی‌که در مخرج هم دو عامل اول p داریم.

۴) حالا برای تخمین $\binom{2n}{n}$ (برای $n \geq 3$) آماده‌ایم. با استفاده از تخمینی که در ضمیمه برای کران پایین زده‌ایم، داریم

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

و بنابراین، از آنجا که تعداد اعداد اول نابیش‌تر از $\sqrt{2n}$ بیش‌تر از $\sqrt{2n}$ نیست، برای $n \geq 3$ داریم

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \qquad (2)$$

۵) حال فرض کنید که هیچ عدد اول $n < p \leq 2n$ وجود نداشته باشد، بنابراین حاصل‌ضرب دوم در عبارت (۲) برابر ۱ است. جاگذاری رابطه (۱) در (۲) نتیجه می‌دهد

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{2n/3}$$

یا

$$4^{n/3} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

که برای n های به اندازه کافی بزرگ غلط است! در حقیقت، با استفاده از $a + 1 < 2^a$ (که برای هر عدد $a \geq 2$ به راحتی با استقرا ثابت می‌شود) داریم

$$2n = \left(\sqrt[6]{2n}\right)^6 < \left(\left\lfloor\sqrt[6]{2n}\right\rfloor + 1\right)^6 < 2^{6\lfloor\sqrt[6]{2n}\rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}} \qquad (4)$$

و بنابراین برای $n \geq 50$ (و بنابراین $18 < 2\sqrt{2n}$)، از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم که

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$$

و در نتیجه $(2n)^{\frac{1}{3}} < 20$؛ بنا بر این $n < 4000$.

■

ضمیمه

قضیه لژاندر. نمای عامل اول p در $n!$ دقیقاً برابر است با

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

برهان. دقیقاً $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ از عوامل $n! = 1 \times \cdots \times n$ بر p بخش‌پذیرند که $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ عامل p را بوجود می‌آورند. بعد، $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ تا از عوامل $n!$ بر p^2 نیز بخش‌پذیرند که $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ عامل p بعدی $n!$ را به‌وجود می‌آورند و به همین ترتیب دامه می‌دهیم.

■

تخمین ضرایب دو جمله‌ای.

فقط از روی تعریف ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ به عنوان تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی، می‌دانیم که دنبالهٔ $\binom{n}{0}$، $\binom{n}{1}$، ...، $\binom{n}{n}$ از ضرایب دو جمله‌ای حاصل جمعی برابر $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ دارند و $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

با استفاده از تساوی کار آمد $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ می‌توان به‌سادگی فهمید که برای هر n، ضرایب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ تشکیل یک دنباله‌ای می‌دهند که مقدار جملات به طرف وسط دنباله افزایش پیدا می‌کنند؛ بنابراین، جملات وسطی بزرگ‌ترین جملات دنباله‌اند:

$$1=\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}=1$$

از روی فرمول‌های مجانبی که برای فاکتوریل موجودند، می‌توان تقریب‌های خیلی دقیقی برای اندازه ضرایب دو جمله‌ای به‌دست آورد. با این حال، در این مقاله فقط به تقریب‌های خیلی ساده و ضعیفی نیاز داریم، مانند $\binom{n}{k}\leq 2^n$ برای هر k، هر چند که برای هر $n\geq 2$ داریم

$$\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\geq\frac{2^n}{n}$$

که تساوی فقط برای «$n=2$» اتفاق می‌افتد. در حقیقت برای $n\geq 1$ داریم

$$\binom{2n}{n}\geq\frac{4^n}{2n}$$

زیرا $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$، یک ضریب دو جمله‌ای میانی است و بنابراین بزرگ‌ترین عضو در دنباله

$$\binom{n}{n}+\binom{n}{n},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n-1}$$

است که حاصل‌جمع‌شان برابر 2^n و بنابراین میانگین‌شان برابر $\frac{2^n}{n}$ است.

از طرف دیگر، کران بالای ضریب دو جمله‌ای داده شده با

$$\binom{n}{n}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\leq\frac{n^k}{k!}\leq\frac{n^k}{2^{k-1}}$$

وقتی n نسبت به k بزرگ است، تقریب خوبی برای ضرایب دو جمله‌ای کوچک در دو انتهای دنباله است.

مراجع

[1] P. Erdös, *Beweis eines Satzes ron Tschebyschef*, Acta Sci. Math. (Szeged) **5** (1930-32), 194-198.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Conerete Mathematies, A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading MA 1989.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduetion to the Theory of Numbers*, fifth edition, Oxford University press 1979.

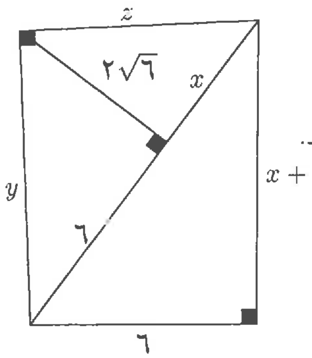
• این مقاله، ترجمهٔ آزادی‌ست از بخش «Bertrand's Postulate» از کتاب «Proofs from THE BOOK». ماهنامهٔ ریاضیات در شمارهٔ بعدی به معرفی و نقد این کتاب (و ترجمهٔ تازه منتشرشدهٔ فارسی‌اش) خواهد پرداخت.

مسأله‌های درسی

رؤیا درودی

• ریاضی ۱

۱) در شکل، x و y و z را بیابید.



۲) d را چنان بیابید که معادلهٔ

$$5x^2+5(d-3)x-9d^2+15d+30=0$$

فقط یک ریشه داشته باشد.

۳) به ازای چه مقادیری از x نمودار سهمی $y_1=-\frac{1}{2}x^2+4x-2$ بالایِ نمودار سهمی $y_2=\frac{1}{4}x^2-1$ قرار می‌گیرد؟

• ریاضی ۲

۱) اگر مجموعهٔ A پنج عضو داشته باشد و مجموعهٔ B هفت عضو، چند تابع متفاوت از A به B وجود دارد؟ از B به A چه‌طور؟ در هر مورد چند تا یک به یک هستند؟ چند تا پوشا هستند؟ چند تا دو سویی هستند؟

۲) رابطهٔ R را روی $\mathbb{R}^2$ این‌طور تعریف می‌کنیم که $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ هرگاه $y_1<y_2$ یا ($y_1=y_2$ و $x_1\leq x_2$). آیا این رابطه یک تابع است؟ نموداری از این رابطه را رسم کنید.

۳) هر یک از توابع $y=[x^2]$ و $y=[x^3]$ را رسم کنید.

• هندسه

۱) در مثلث ABC، M وسط BC، AN نیم‌ساز A و BN بر این نیم‌ساز عمود است. اگر $AB=14cm$ و $AC=19cm$، طول MN را بیابید.

۲) در مثلث DEF نقاط A و B و C به‌ترتیب روی اضلاع DE، DF و EF طوری انتخاب شده‌اند که $AC=EC$ و $BC=CF$. اگر $D=40°$، زاویهٔ $\widehat{ABC}$ را بیابید.

۳) اگر طول عقربه‌های بزرگ و کوچک ساعتی به‌ترتیب $6cm$ و $4cm$ باشد، در ساعت ۲ بعد از ظهر فاصلهٔ بین نوک‌های این دو عقربه چقدر است؟

۴) اگر $A=B=35°$ و $BC=4cm$، مساحت مثلث ABC را بیابید.

• جبر و احتمال

۱) به استقرا ثابت کنید

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

۲) اگر بدانیم هیچ شخصی در سرش بیش از ۳۰۰۰۰۰ تار مو ندارد و با فرض آنکه جمعیت یک شهر ۵ میلیون نفر است، حداکثر n که می‌توان گفت «در این شهر n نفر هستند که تعداد تارهای موی سرشان برابر است» را به‌دست آورید.

۳) اگر ۴۰۰ نفر در یک سالن حضور داشته باشند، کدام جملهٔ زیر نادرست است؟ برای جملات درست دلیل بیاورید.

۱ـ حداقل دو نفر دارای تاریخ تولد یک‌سان هستند (بدون در نظر گرفتن سال تولد).

۲ـ حداقل دو نفر در یک ماه به‌دنیا آمده‌اند.

۳ـ دست‌کم دو نفر در یک هفتهٔ معین از سال به‌دنیا آمده‌اند.

۴ـ دست‌کم دو نفر در یک روز معین از سال به‌دنیا آمده‌اند.

• حسابان

۱) باقی‌ماندهٔ $f(x)=4x^4+10x^3+kx^2+bx-2$ در تقسیم بر $x+1$، -3 است در حالی‌که باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر $x-1$، ۲۵ است. باقی‌ماندهٔ f را در تقسیم بر $x+2$ بیابید.

۲) m و k را چنان بیابید که تابع درجهٔ چهارم $m^2x^4+5x^3+k^2x^2+5mkx+6mk$ در تقسیم بر $x+1$ دارای باقی‌ماندهٔ ۳۲ و در تقسیم بر x دارای باقی‌ماندهٔ ۷۲ باشد.

۳) دامنهٔ

$$f(x)=\log_{10}(1-\log_{0/1}(x^2-5x+16))$$

را بیابید.

• حساب دیفرانسیل

۱) به‌کمک دنباله‌ها، ثابت کنید $f(x)=\sin^2\frac{1}{x^2-x-2}$ در $x=-1$ و $x=2$ حد ندارد.

۲) مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k^2+1)}{(k-1)^2(k+1)^2}$ را بیابید.

۳) ثابت کنید اگر تابع $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و داشته باشیم $\forall x: g(\sin x)=x^{2n-1}$ ($n\in\mathbb{N}$ ثابت) آنگاه معادلهٔ $g(x)=0$ دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

• هندسه تحلیلی و جبر خطی

۱) سهمی قائم به رأس $(0,2)$ از نقاط $(1,3)$ و $(-3,t)$ می‌گذرد. t را بیابید (محور سهمی‌های قائم موازی محور y است).

۲) زاویهٔ بین مجانب‌ها و فاصلهٔ هر رأس از مجانب‌ها را برای هذلولی $x^2-3y^2-2x-6y=5$ بیابید.

۳) مختصات کانون‌های یک هذلولی متساوی‌القطرین $F(2,-2)$ و $F'(6,-2)$ است. معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

• ریاضی گسسته

۱) یک k مکعب گرافی است که رؤوس آن k تایی‌های مرتب ۰ و ۱ هستند و دو رأس مجاورند اگر فقط و اگر تفاوت آنها در یک مختصه باشد. نشان دهید هر k مکعب، 2^k رأس و $k2^{k-1}$ یال دارد و دو پارچه است.

۲) مرکز گراف G رأسی مانند u است که $\max_{v\in V} d(u,v)$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. نشان دهید هر درخت یا فقط یک مرکز دارد و یا دو مرکز مجاور دارد (منظور از $d(u,v)$ طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v است)

۳) گراف $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q را در نظر بگیرید. گراف یالی G را «گرافی با مجموعهٔ رؤوس $E(G)$ که در آن دو رأس مجاورند اگر و فقط اگر آنها دو یال با رأس مشترک در گراف G باشند» تعریف می‌کنیم. اگر G گرافی ساده باشد، ثابت کنید گراف یالی G، q رأس و $\sum_{v\in V}\binom{d_G(v)}{2}$ یال دارد.

با عذرخواهی فراوان، لطفاً موارد زیر را اصلاح کنید.

• صورت درست فرمول مسألهٔ (۲، الف) حساب دیفرانسیل و انتگرال شمارهٔ چهارم این است:

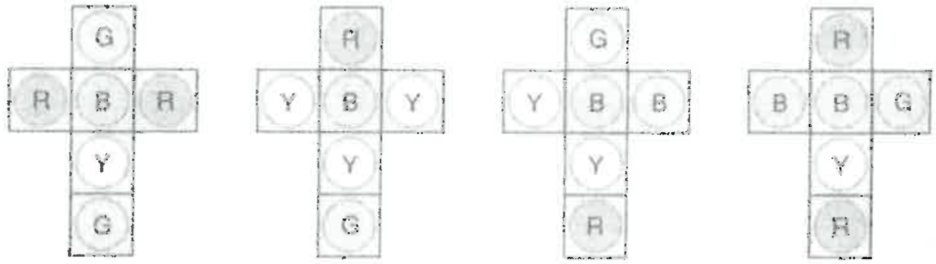
$$h^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(f^{(n-i)}\cdot g^{(i)})(x).$$

• صورت سؤال ۲ ریاضی ۲ شمارهٔ پنجم با چیز دیگری مخلوط شده. صورت درست سؤال این است که «میانگین ۱۲۰ عدد پنج‌رقمی ساخته‌شده از جای‌گشت‌های ارقام ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چیست؟».

معمای مکعب‌های رنگی

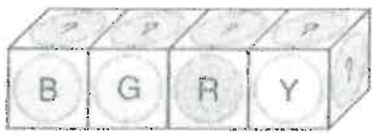
سپیده چمن‌آرا

می‌دانیم که هر مکعب، شش وجه دارد. اگر چهار رنگِ قرمز، سبز، زرد و آبی در اختیار داشته باشیم و بخواهیم با آن‌ها، یک مکعب را رنگ کنیم، قطعاً دو وجه از مکعب هم‌رنگ خواهند شد. در شکل زیر، چهار مکعب با شماره‌های ۱ تا ۴ را به‌صورت گسترده نمایش داده‌ایم. آن‌ها را بسازید و به‌صورتی که در شکل می‌بینید، رنگ‌آمیزی کنید.



مکعب ۴ مکعب ۳ مکعب ۲ مکعب ۱

معمایی که مطرح است این است که این چهار مکعب را طوری روی یک ردیف پشت سر هم بچینیم که هر چهار رنگ در هر یک از ۴ طرفِ مکعب مستطیلِ حاصل، دیده شود.



ما در شمارهٔ آینده، به بررسی راه‌حل این معما می‌پردازیم. اما پیش از آن، توجه کنید که ترتیب مکعب‌ها نقشی در پاسخ این معما ندارد. با توجه به این موضوع، به چند طریق مختلف می‌توان چهار مکعب را در یک ردیف چید؟ یعنی اگر بخواهیم تمام حالت‌های چیدنِ این چهار مکعب بر روی یک ردیف را در نظر بگیریم (یا در واقع بچینیم) و از بین آن‌ها حالتی را که پاسخ معما است بیابیم و هر چیدنِ ما حدود ۴ ثانیه طول بکشد، چه قدر وقت لازم است تا این کار را انجام دهیم؟

نخست تعداد حالت‌های مختلفی که مکعب اول را می‌توان قرار داد، می‌شماریم. این مکعب شش وجه دارد که سه جفت وجه روبه‌رو تشکیل می‌دهند: جلو ـ عقب، بالا ـ پایین و چپ ـ راست. از آنجا که در چیدن ۴ مکعب در یک ردیف، همیشه یک جفت از این سه جفت وجه‌های مکعب اول از وجه‌های مربوط به پاسخ معما (یعنی وجه‌هایی که در یک ردیف چهارتایی قرار گرفته‌اند) نیستند، پس در کل، سه حالت برای قرار دادنِ مکعب اول روی میز وجود دارد. پس از این‌که اولین مکعب را روی میز قرار دادیم، هر یک از مکعب‌های دوم، سوم و چهارم ۲۴ حالت برای قرارگرفتن در کنار مکعب قبل از خود دارند، زیرا پس از انتخاب یک وجه از شش مکعب که کنار مکعب قبلی قرار می‌گیرد، چهار دوران برای بالا قرارگرفتن چهار وجه از پنج وجهِ باقی‌ماندهٔ این مکعب وجود دارد که جمعاً می‌شود ۲۴ = ۴ × ۶ حالت. بنابراین، درکل ۴۲۴۷۲ = ۲۴ × ۲۴ × ۲۴ × ۳ حالت مختلف برای چیدنِ چهار مکعب در یک ردیف وجود دارد. یعنی ۲۰۵۸۸۸ = ۴۱۴۷۲ × ۴ ثانیه یا به عبارتی ۳۴۳۱/۵ دقیقه یعنی بیش از ۵۷۱ ساعت وقت لازم است تا همهٔ حالت‌ها را بررسی کنیم و پاسخ مسأله را بیابیم! این به این معنی است که روش آزمون و خطا به دردِ حل این مسأله نمی‌خورد!

موفق باشید.

شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۰) صص ۲۸ـ۲۸

آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۱۱. این بار قصد دارم برایتان چند مسأله طرح کنم که راه‌حل‌های آن‌ها در نظر اول ممکن است برایتان نامتعارف به نظر برسد. اجازه دهید با یک سؤال سادهٔ احتمالات شروع کنم: فرض کنید یک تاس دارید که «عادلانه» نیست؛ به این معنی که احتمال‌های به‌دست آمدن عددهای ۱ تا ۶، مساوی نیستند. فرض کنید مقدار احتمال این‌که عدد k، $1 \leq k \leq 6$، با انداختن تاس مشاهده شود، مساوی با $p(k)$ باشد، که $p(k)$ یک عدد حقیقی بین صفر و یک است (در حقیقت $p(k) \times 100$ برابر با درصد احتمال مشاهدهٔ k بعد از انداختن تاس است). بنابراین، روشن است که

$$p(1) + \cdots + p(6) = 1$$

سؤال. یک عدد صحیح مثبت m در نظر بگیرید. احتمال این‌که تاس را دوبار بیندازیم و مجموع مقدارهای به‌دست آمده، m شود، چه‌قدر است؟

خوب، اگر $q(m)$ را مقدار این احتمال در نظر بگیریم، به سادگی دیده می‌شود که

$$q(1) = q(13) = q(14) = q(15) = \cdots = 0$$

(چرا؟). از سوی دیگر، برای این‌که مجموع دو مقدارِ به‌دست آمده، m باشد ($2 \leq m \leq 12$)، باید پس از پرتاب اول و دوم، به ترتیب دو مقدار p و q به‌دست بیاید که $p + q = m$. به عبارتی، همهٔ حالت‌هایی که مجموع مقدارهای حاصل از انداختن تاس، m می‌شود، متناظر با مجموعهٔ زیر است.

$$\{(a, b) \mid a + b = m, a, b \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

احتمال این‌که تاس، در دفعهٔ اول مقدار a و در دفعهٔ دوم مقدار b را بدهد، چقدر است؟ تقریباً روشن است که مقدار b، هیچ ربطی به این‌که مقدار a چه بوده ندارد. به زبان احتمالات، این دو پیشامد «مستقل» هستند. مطابق قواعد نظریهٔ احتمالات، احتمال این‌که دو پیشامد مورد نظر ما، هم‌زمان رخ دهند، با توجه به استقلال آن دو ، برابر است با حاصل‌ضرب احتمال‌های رخ دادن هر یک از آن‌ها.[1] بنابراین احتمال این‌که در دو بار پرتاب تاس، مقدارهای a و b به ترتیب ظاهر شوند، برابر است با $p(a)p(b)$. اما در کدام‌یک از پرتاب‌های بالا، مجموع مقدارهای به‌دست آمده، m است؟ بدیهی است در آن‌هایی که $a + b = m$! باز هم تقریباً روشن است که اگر دو پیشامد، از هم مجزا باشند (یعنی اتفاق افتادن یکی، نتیجه بدهد دیگری اتفاق نیفتاده است) در این صورت احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها اتفاق بیفتد، برابر است با مجموع احتمال‌های رخ دادن تک‌تک آن‌ها. پس احتمال این‌که مجموع مقدارهای حاصل از دوبار انداختن، مساوی با

۱) اگر در فهم این مطالب مشکل دارید، باید قدری راجع به احتمالات بیاموزید. ساده‌ترین راه، مراجعه به کتاب‌های سال‌های بالاتر دبیرستان است.

ریاضیات شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۶۰) صص ۲۳ـ۲۹

m شود، برابر است با مجموع عددهای $p(a)p(b)$ برای a و b هایی که $a+b=m$. به عبارت بهتر

$$\begin{aligned} q(۲) &= p(۱)p(۱) \\ q(۳) &= p(۱)p(۲)+p(۲)p(۱) \\ q(۴) &= p(۱)p(۳)+p(۲)p(۲)+p(۳)p(۱) \\ &\vdots \\ q(۱۲) &= p(۶)p(۶). \end{aligned}$$

اگر قدری به این رابطه‌ها دقت کنید، احتمالاً شما هم چنین جرقه‌ای در ذهنتان خواهد زد: $q(i)$ ها ضریب‌های چند جمله‌ایِ $(p(۱)x+p(۲)x^۲+\cdots+p(۶)x^۶)^۲$ هستند. بنابراین، نتیجهٔ جالب زیر حاصل می‌شود: اگر برای یک تاس، مقدارهای $q(m)$ را بدانیم (یعنی بدانیم که اگر آن را دوبار بیندازیم، احتمال این‌که حاصل جمع مقدارهای حاصله m شود، چقدر است) در این‌صورت مقدارهای $p(k)$، یعنی احتمال این‌که با انداختن تاس، k به‌دست آید، را می‌توانیم به طور یکتایی معین کنیم (که معنایش این است که تاس را کاملاً «شناخته‌ایم»). این مطلب از این حقیقت ناشی می‌شود که اگر دو چند جمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$، که ضرایب‌شان نامنفی است، در رابطهٔ $(f(x))^۲\equiv(g(x))^۲$ صدق کنند، خودشان با هم برابرند؛ زیرا از

$$(f(x))^۲\equiv(g(x))^۲$$

نتیجه می‌شود که

$$(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))\equiv ۰$$

ولی f و g ضرایب نامنفی دارند؛ پس $f(x)+g(x)\not\equiv ۰$ که یعنی $f(x)-g(x)\equiv ۰$.

تمرین ۱. *استدلال بالا (برای تاس) را، کامل کنید.*

مسألهٔ زیر، در المپیاد جهانی ۱۹۹۵، در کانادا، مطرح شده‌است.

تمرین ۲. *فرض کنید p عددی اول و فرد باشد. تعداد زیر مجموعه‌های A از $\{۱,۲,\ldots,۲p\}$ را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق کنند.*

۱) *A دارای p عضو باشد.*

۲) *مجموع اعضای A بر p بخش‌پذیر باشد.*

(راهنمایی. چند جمله‌ای $F(x,y)=(۱+xy)(۱+xy^۲)\cdots(۱+xy^{۲p})$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد زیر مجموعه‌های A با خاصیت‌های بالا، برابر است با مجموع ضریب‌های تک جمله‌ای‌های x^py^p، $x^py^{۲p}$، ...، $x^py^{\frac{p(۲p+۱)}{۲}}$ در بسط $F(x,y)$. در حقیقت باید تناظری شبیه آن که در بند ۱۰ مطرح کردیم بیابید. اکنون نشان دهید که مجموع ضرایب تک‌جمله‌ای‌های ذکر شده، با ضریب x^p در چندجمله‌ای یک متغیرهٔ زیر برابر است.

$$G(x)=\frac{۱}{p}\left(F(x,۱)+F(x,\omega)+\cdots+F(x,\omega^{p-۱})\right)$$

که $\omega = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ ریشهٔ p ام «یک» است. برای اثبات این رابطه، بررسی کنید که در حاصل جمع، بر سر هر یک از جمله‌های x^py^m چه می‌آید و سپس از این نکته استفاده کنید که اگر k به p بخش‌پذیر باشد، $1 + \omega^k + \cdots + \omega^{(p-1)k}$ برابر p است و اگر نه، برابر صفر. پس مسأله منجر به محاسبهٔ ضریب x^p در چند جمله‌ای $G(x)$ شد. ولی چون $\omega^{k+p} = \omega^k$، روشن است که

$$G(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}[(1+x)(1+x\omega^j)\cdots(1+x\omega^{j(p-1)})]^2$$

برای $j = 0$، عبارت داخل کروشه مساوی با $(1+x)^p$ و برای $j \neq 0$، مساوی با $(1+x^p)$ است. در این گام باید از این نکته استفاده کنید که $\{\omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^{(p-1)j}\}$ همان $\{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}\}$ است که اعضایش با ترتیب جدیدی ظاهر شده‌اند. ضمناً، رابطهٔ $1 + x^p = (1+x)(1+\omega x)\cdots(1+\omega^{p-1}x)$ را هم فراموش نکنید. (خودتان بگویید چرا رابطهٔ بالا صحیح است! به ریشه‌های دو طرف دقت کنید.) حالا، محاسبات ساده هستند! در نهایت، باید جوابتان برای مسأله، $\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p} + 2(p-1)\right]$ باشد.)

۱۲. حالا که کمی با چندجمله‌ای‌ها دست و پنجه نرم کردید، به سراغ رشته‌های نامتناهی می‌رویم! چون شما بی‌تجربه هستید، فعلاً آن‌ها را به صورت عبارت‌هایی نامتناهی بر حسب x به شکل $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ که a_i ها عددهایی حقیقی هستند، در نظر بگیرید. مثلاً عبارت‌هایی به شکل $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ یا $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$. بنابراین، این موجودات به‌نوعی تعمیم چندجمله‌ای‌ها هستند. اکنون می‌خواهیم کمی با این موجودات شوخی کنیم!

سؤال. یک عدد طبیعی را به چند طریق می‌شود به صورت مجموعی از تعدادی عدد طبیعی نوشت؟ به بیان دقیق‌تر، برای هر عدد طبیعی n، به چند طریق می‌شود n را به صورت $n = n_1 + \cdots + n_k$ نوشت که

۱) n_i ها عددهای صحیح و مثبت باشند.

۲) $0 < n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ و $k > 0$ (که k ربطی به n ندارد و می‌تواند تغییر کند).

مثلاً، $p(6) = 11$؛ چون ۶ را به صورت‌های زیر می‌توان به صورت مجموعی از عددهای طبیعی با خاصیت‌های بالا نوشت:

$$6 = 6$$
$$6 = 1 + 5$$
$$6 = 2 + 4$$
$$6 = 3 + 3$$
$$6 = 1 + 1 + 4$$
$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$6 = 2 + 2 + 2$$
$$6 = 1 + 1 + 1 + 3$$
$$6 = 1 + 1 + 2 + 2$$
$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$$
$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

خوب، این مسألهٔ مشکلی است و نمی‌توان پاسخ صریحی به آن داد. اگر $p(n)$ تعداد راه‌های ممکن برای این کار را نشان دهد، می‌توان ثابت کرد که برای n های خیلی بزرگ

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

که معنی «$\approx$» تقریباً این است که «سرعت رشد» $p(n)$ با «سرعت رشد» تابع سمت راست برابر است. بیان دقیق‌تر این مطلب این است که وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، حد نسبت $p(n)$ به تابع سمت راست، به یک میل می‌کند. حالا این حرف‌ها را کنار بگذارید و اجازه دهید یک حقیقت جالب را به شما یادآور شوم. حاصل‌ضرب نامتناهی زیر را در نظر بگیرید (فعلاً همین‌جوری!).

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots)\cdots(1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{nk} + \cdots)\cdots$$

(به سه‌نقطهٔ انتهای سمت راست هم دقت کنید!) ضریب x^m، بعد از بسط دادن این حاصل ضرب، چقدر است؟ روشن است که پس از بسط دادن، اصولاً هر جملهٔ این حاصل‌ضرب به شکل $x^{s_1+2s_2+\cdots+ls_l+\cdots}$ است، که متناظر با این کار است که از پرانتز اول x^{s_1}، از پرانتز دوم x^{2s_2}، ...، از پرانتز l ام x^{ls_l} و ... را انتخاب کنیم؛ البته، معقول به‌نظر می‌رسد که پس از بسط دادن، نباید جملاتِ «x به توان بی‌نهایت» پدیدار شود. بنابراین، قاعدهٔ بسط دادنِ این حاصل‌ضربِ «همین جوری»، شبیه ضرب کردن چندجمله‌ای‌هاست با این تفاوت که فقط از تعدادی متناهی از پرانتزها، توان‌های مثبتِ «x» را انتخاب می‌کنیم. پس مثلاً یکی از تک جمله‌هایی که در حین بسط ظاهر می‌شود، x^7 ای است که به این طریق به‌دست می‌آید که از پرانتزِ اول (از سمت چپ)، «۱»، از پرانتز دوم x^4، از پرانتز سوم x^3 و از بقیهٔ پرانتزها، «۱» را انتخاب می‌کنیم (در ضمن، $x^0 = 1$). روشن است که x^7 به‌صورت‌های دیگری هم می‌تواند ظاهر شود. ولی x^∞ ای که به این‌صورت تولید شود که از پرانتزِ r ام از سمت چپ، x^r را انتخاب بکنیم، را هیچ‌وقت در نظر نمی‌گیریم.

طبق این شیوه، ضریب هیچ x^m ای، نهایتاً پس از بسط دادن، «بی‌نهایت» نمی‌شود. زیرا همهٔ ظاهر شدن‌های x^m پس از بسط دادن را به طور طبیعی می‌شود با نمایشِ

$$\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{s_1\ \text{بار}} + \cdots + \underbrace{(2 + \cdots + 2)}_{s_2\ \text{بار}}$$

از عدد $m = s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l + \cdots$ در تناظر قرار داد. روشن است که برای $l > m$، $s_l = 0$ و در ضمن تعداد s_1، ...، s_l های صحیح و نامنفی هم، که $s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l = m$، متناهی است. با بحث فوق انتظار داریم بعد از بسط دادن حاصل‌ضرب نامتناهی بالا، به عبارت

$$1 + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(m)x^m + \cdots$$

برسیم.

تمرین ۳. *ثابت کنید تعداد روش‌هایی که می‌توان یک عدد طبیعی m به‌صورت مجموع اعداد فرد «افراز» کرد، با تعداد روش‌های نمایش m به‌صورت مجموع اعداد متمایز برابر است. به بیان دقیق‌تر، تعداد افرازهای m به شکل $m = p_1 + \cdots + p_k$ که دارای خاصیت‌های زیر باشد*

۱) p_i ها عددهای فرد هستند.

۲) $0 < p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$ و $k > 0$.

برابر است با تعداد افرازهای m به شکل $m = q_1 + \cdots + q_l$ که $l > 0$ و $q_l > \cdots > q_1 > 0$ که q_i ها عددهای صحیح و مثبت هستند.

(راهنمایی. نشان دهید تعداد روش‌های نمایش m به اعداد فرد، مساوی با ضریب x^m در بسط حاصل‌ضرب نامتناهی زیر است:

$$(1 + x + \cdots + x^n \cdots)(1 + x^3 + \cdots + x^{3n} + \cdots)\cdots(1 + x^{2k+1} + \cdots + x^{n(2k+1)} + \cdots)\cdots$$

حالا به رابطهٔ $\cdots + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1}{1-x}$ (که می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x که $|x| < 1$ معنای «عددی» هم دارد!) دقت کنید. اثبات صوری این رابطه هم ساده است. باید نشان دهیم

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots)$$

ولی با بسط دادن سمت راست داریم

$$\text{طرف راست} = 1 + \underbrace{(-x + x)}_{=0} + \underbrace{(-x^2 + x^2)}_{=0} + \underbrace{(-x^3 + x^3)}_{=0} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

پس رشتهٔ نامتناهی مربوط به افرازهای m به اعداد فرد را با استفاده از رابطهٔ فوق و جای‌گزینی x با x^3، x^5، x^7، ... می‌شود به شکل

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)(1 - x^7)\cdots}$$

هم نوشت، که معقول‌تر به نظر می‌رسد!

نشان دهید تعداد افرازهای m به عددهای متمایز نیز، برابر با ضریب x^m در بسط حاصل‌ضرب زیر است.

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots(1 + x^n)\cdots$$

طبیعی است انتظار داشته باشیم دو رشتهٔ نامتناهی مساوی باشند اگر و تنها اگر ضرایب جملاتِ هم درجه در آن دو یکی باشند (مثل چند جمله‌ای‌ها)؛ بنابراین، طبیعی است که برای حل مسأله سعی کنیم نشان دهیم

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\cdots}$$

و بنا بر این قاعدتاً باید ثابت کرد که حاصل‌ضرب مخرج سمت راست تساوی در سمت چپ تساوی، برابر است با یک!

برای اثبات این تساوی، سمت چپ را به‌صورت

$$\left(\frac{1 - x^2}{1 - x}\right)\left(\frac{1 - x^4}{1 - x^2}\right)\cdots\left(\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^n}\right)\cdots$$

بنویسید و صورت و مخرج‌های مشابه را ساده کنید.)

بسیار خوب، احتمالاً هم هیجان‌زده شدید و هم سردرگم! در آینده‌ای نزدیک، این بحث را با دقت بیشتری دنبال خواهیم کرد.

آشنایی با تجانس

علیرضا صالحی گلسفیدی

تا کنون چندبار از یک عکس ۴ × ۳ نقاشی کشیده‌اید؟ چندبار اسلاید دیده‌اید؟ آیا فکر کرده‌اید که چه‌طور یک نقاشی دیواری را می‌کشند؟ چندبار قاعدهٔ پرسپکتیو در نقاشی را به شما گفته‌اند؟

حیف که اسم مقاله وجه اشتراک سؤالات فوق با این مجله را مشخص می‌کند، وگرنه می‌پرسیدید این سؤال‌ها چه ربطی به این مجله دارند؟

از روی یک عکس طراحی می‌کنید، به یکی از دوستانتان نشان می‌دهید، می‌گوید «آره، چقدر شبیهش شده!» (این چیزی جز این نیست که انتظار داریم مجانس یک شکل با آن متشابه باشد).

در وسط یک خیابان مستقیم ایستاده‌ایم، و شاهد رفتن یک اتومبیل هستیم. هرچه می‌گذرد، اتومبیل به نقطهٔ فرضی ما در افق نزدیک‌تر شده، کوچک‌تر می‌شود، ولی همواره سقف آن با خط افق موازی است. (این واقعیت به ما القا می‌کند که مجانس یک خط، باید با آن خط موازی باشد. این‌طور نیست؟!)

حال صریحاً بگوییم که تجانس چیست.

تعریف ۱ . نقطهٔ M' را متجانس نقطهٔ M، به مرکز O و به نسبت k گوییم، هرگاه

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

که در آن O نقطه‌ای ثابت و k عدد حقیقی ناصفر است، به O مرکز تجانس و به k ضریب تجانس گفته می‌شود و می‌نویسیم $M' = H_O^k(M)$.

(مثلاً، لامپ در دستگاه اسلاید نقش O را بازی می‌کند، و k از روی فاصلهٔ پرده تا دستگاه مشخص می‌شود یا نقطهٔ فرضی ما در افق همان O است. ضریب تجانس برای ماشین وابسته به زمان است!)

حال ببینیم انتظارهایمان را می‌توانیم برآورده کنیم؟ اما قبل از اینکه به سراغ انتظار اول برویم، بگوییم منظور از تشابه چیست؟

تعریف ۲ . شکل F را با F' متشابه گوییم هرگاه، تناظر ۱ − ۱ و پوشایی مثل ϕ بین آنها برقرار باشد به‌طوری که برای هر دو نقطهٔ P و Q از F داشته‌باشیم

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = k \cdot d(P, Q)$$

که در آن k عدد حقیقی مثبت ثابت و $d(P, Q)$ فاصلهٔ این دو نقطه از هم است.

شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۰) صص ۳۴ـ۴۰

شاید تعریف خیلی عجیب به‌نظر برسد، ولی در واقع خیلی ملموس است. مثلاً در مورد همان نقاشی، دوستتان به شما می‌گوید: «نه، زیاد خوب نکشیدی، چون گوشش رو نسبت به بینیش بزرگ کشیدی.»

یعنی دوست شما انتظار دارد، نسبت اندازهٔ گوش به بینی برای هر دو یکی باشد، چه عکس و چه نقاشی شما. یعنی در تناظر طبیعی موجود (چشم به چشم، گوش به گوش و ...) نسبت فاصله‌ها مقدار ثابت باشد. حال که تکلیفمان با واژه‌ها مشخص شد، به سراغ انتظارمان می‌رویم:

گزاره ۱. *فرض کنید F' مجانس شکل F باشد (می‌نویسیم $H_O^k(F) = F'$)، در این صورت F' با F متشابه است.*

برهان. برای اثبات تشابه به یک تناظر بین نقاط F و F' نیاز داریم، که به‌وضوح چیزی نیست جز H_O^k، حال برای دو نقطهٔ دلخواه P و Q در F داریم $P' = H_O^k(P)$ و $Q' = H_O^k(Q)$ و در نتیجه $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OQ}$. بنابراین $\overrightarrow{P'Q'} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$ که معادلاً یعنی $d(P', Q') = |k| d(P, Q)$. پس این دو شکل به نسبت $|k|$ با هم متشابه هستند. ∎

نتیجه ۱. *مجانس هر دایره به شعاع r، با ضریب تجانس k، دایره‌ای است به شعاع $|k|.r$. (چرا؟)*

گزاره ۲. *مجانس هر خط، خطی است که با آن موازی است.*

برهان. فرض کنیم M و N دو نقطه از خط l باشند و $H_O^k(N) = N'$، $H_O^k(M) = M'$. در نتیجه $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$، $\overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}$. بنابراین $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$. پس $M'N' || MN$، حال اگر P نقطه‌ای دلخواه روی l باشد و P' متجانسش، خواهیم داشت $MP || M'P'$، $MP || MN$ و $MN || M'N'$. در نتیجه P' روی خط گذرا از M' و N' قرار دارد و با توجه به این حقیقت که: $Q = H_O^{\frac{1}{k}}(Q')$ اگر و تنها اگر $H_O^k(Q) = Q'$ (چرا؟)، حکم حاصل می‌شود. (فکر می‌کنید این حقیقت چرا لازم است؟) ∎

امّا ببینیم دو شکل، کی مجانس هم هستند؟ از گزارهٔ ۱ مشخص می‌شود، که باید با هم متشابه باشند. ولی از گزارهٔ ۲ واضح است که این شرط کافی نیست. اگر در اثبات گزارهٔ ۱ دقیق شویم به نکتهٔ زیر می‌رسیم.

لم ۱. *F' متجانس F با ضریب تجانس k است، اگر و تنها اگر، تناظر ۱ − ۱ و پوشایی بین نقاط F و F' مثل ϕ برقرار باشد، به‌طوری که*

$$\forall P, Q \in F : P' = \phi(P), Q' = \phi(Q) \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q'} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$$

(در اینجا k مخالف ۱ فرض شده است.)

برهان. چون می‌خواهم بیشتر از این روی جزئیات وقت نگذارم، اثبات به عهدهٔ خواننده. ∎

لم ۲. *F' انتقال یافتهٔ F است، اگر و تنها اگر، تناظر ۱ − ۱ و پوشایی بین نقاط F و F' برقرار باشد ($\phi : F \mapsto F'$)، به‌طوری که:*

$$\forall P, Q \in F : P' = \phi(P), Q' = \phi(Q) \Longrightarrow \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$$

حال قبل از این‌که به سراغ حل مسأله با این ابزار به ظاهر بی‌استفاده برویم، آخرین قضیهٔ خوب را هم بیان کنیم.

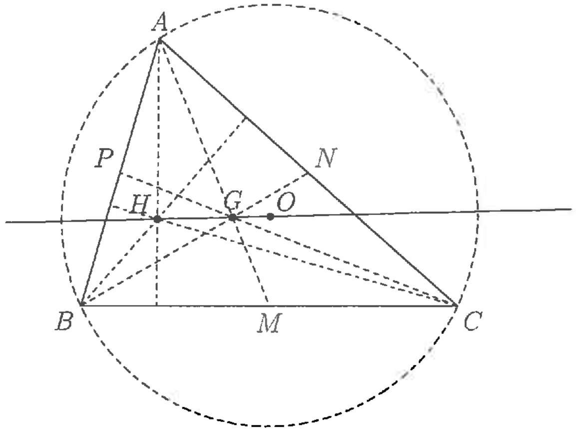
قضیه ۱ . (قضیهٔ سه مرکز تجانس) فرض کنید $H_O^k(F) = F'$ و $H_{O'}^{k'}(F') = F''$. اگر $k \cdot k' \neq 1$، آنگاه نقطهٔ O'' یافت خواهد شد که $H_{O''}^{kk'}(F) = F''$ و O'' روی خط واصل O و O' قرار دارد و اگر $k \cdot k' = 1$، آنگاه $H_{O'}^{k'} \circ H_O^k$ همواره یک انتقال است.

برهان. به‌ازای هر $P, Q \in F$ بگیرید $P' = H_O^k(P)$، $Q' = H_O^k(Q)$، $P'' = H_{O'}^{k'}(P')$ و $Q'' = H_{O'}^{k'}(Q')$. بنابر لم ۱، از اولی و دومی نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{P'Q'} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$ و از سومی و چهارمی نتیجه می‌شود که $P''Q'' = k' \cdot \overrightarrow{P'Q'}$ و بنابراین خواهیم داشت $\overrightarrow{P''Q''} = kk' \cdot \overrightarrow{PQ}$. حال $\phi : F \mapsto F''$ را به این صورت تعریف می‌کنیم $\phi = H_{O'}^k \circ H_O^k$. در نتیجه $P'' = \phi(P)$ و $Q'' = \phi(Q)$. به وضوح ϕ، ۱ − ۱ و پوشاست، در نتیجه با توجه به‌این‌که $\overrightarrow{P''Q''} = kk' \cdot \overrightarrow{PQ}$ و لم‌های بیان شده همه چیز حاصل می‌شود، به‌جز این نکته که O'' روی خط واصل O و O' قرار دارد. برای این نکته هم کافی است $\phi(O)$ را در نظر بگیریم، به‌وضوح O'' روی خط واصل O و $\phi(O)$ قرار دارد. حال آنکه: $\phi(O) = H_{O'}^{k'}(H_O^k(O)) = H_{O'}^{k'}(O)$، پس $\phi(O)$ روی خط واصل O و O' واقع است. در نتیجه حکم حاصل می‌شود. ∎

حال چند مسأله با هم حل می‌کنیم.

مثال ۱ . در هر مثلث، G مرکز میانه‌ای، H مرکز ارتفاعی و O مرکز دایرهٔ محیطی روی یک خط واقعند (خط اویلر).

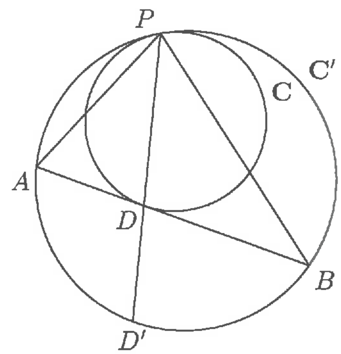
حل. به‌وضوح از $H_G^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle MNP$ می‌توان نتیجه گرفت $H_G^{-\frac{1}{2}}(H_{\triangle ABC}) = H_{\triangle MNP}$. امّا ارتفاع خارج شده از M، بر PN و در نتیجه بر BC عمود است، پس همان عمود منصف ضلع BC است. پس $H_{\triangle MNP} = O_{\triangle ABC}$ لذا از $H_G^{-\frac{1}{2}}(H) = O$ نتیجه می‌شود $2\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{HG}$. بنابراین H، G و O روی یک خط هستند.



∎

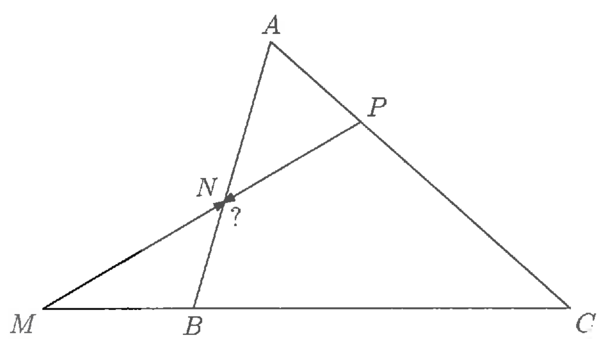
مثال ۲ . فرض کنید دو دایره در نقطهٔ P مماس داخل باشند و AB وتری از دایرهٔ بزرگ باشد که در D بر دایرهٔ کوچک مماس است. ثابت کنید، PD نیم‌ساز $A\widehat{B}C$ است.

حل. می‌دانیم که $C' = H_P^{\frac{r'}{r}}(C)$ و اگر PD دایرهٔ C' را در D' قطع کند، داریم $D' = H_P^{\frac{r'}{r}}(D)$ و متجانس AB با آن موازی است و در D' بر C' مماس است (چرا؟). اما طبق قضیه‌ای دو وتر موازی، کمان‌های مساوی، جدا می‌کنند. پس $\widehat{AD'} = \widehat{D'B}$ در نتیجه حکم حاصل شد.



∎

مثال ۳. فرض کنیم M روی خط BC، N روی خط AB و P روی خط AC قرار داشته‌باشد و $\frac{\overline{BN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = -1$ آنگاه این سه نقطه روی یک خط واقعند.(قضیهٔ سوا)



حل. کافی است به ترتیب دو تجانس $H_M^{\overline{MC}/\overline{MB}}$ و $H_P^{\overline{PA}/\overline{PC}}$ دقت کنیم. توجه داریم که

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \neq 1$$

پس با توجه به قضیهٔ سه مرکز تجانس نقطهٔ N' روی MP وجود دارد به‌طوری که:

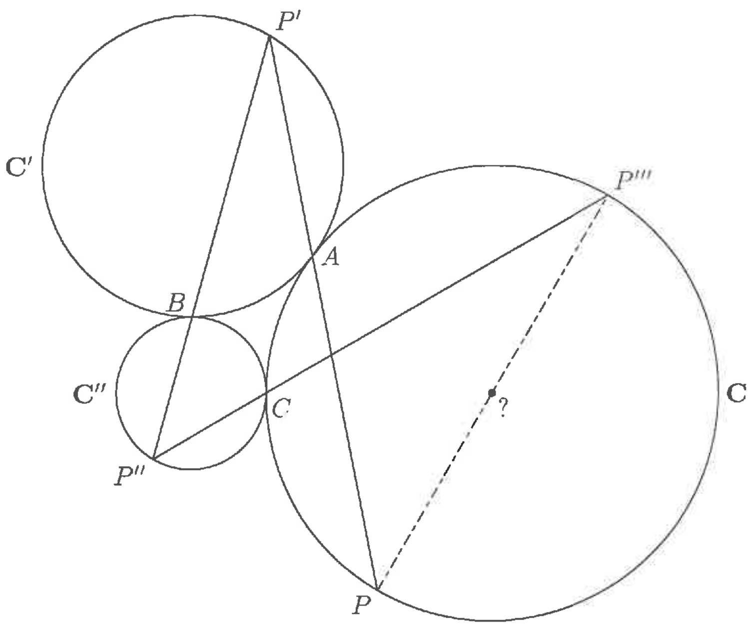
$$H_P^{\overline{PA}/\overline{PC}} \circ H_M^{\overline{MC}/\overline{MB}} = H_{N'}^{\overline{NA}/\overline{NB}}$$

از مطلب بالا نتیجه می‌شود که

$$H_{N'}^{\overline{NA}/\overline{NB}}(B) = H_P^{\overline{PA}/\overline{PC}} \circ H_M^{\overline{MC}/\overline{MB}}(B) = H_P^{\overline{PA}/\overline{PC}}(C) = A$$

بنابراین $\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ (چرا؟). پس $N = N'$ و حکم ثابت می‌شود. ∎

مثال ۴. سه دایرهٔ C، C' و C'' در نقاط A، B و C دوبه‌دو بر هم مماسند و $P \neq A$ نقطه‌ای دلخواه روی C است. آن را به A وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا C' را در P' قطع کند. حال P' را به B وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا C'' را در P'' قطع کند، در ادامه P'' را به C وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا C را در P''' قطع کند. ثابت کنید P و P''' دو سر یک قطرند.



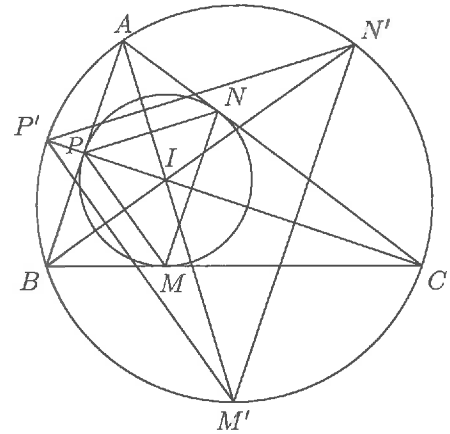
حل. تنها توجه شما را به حقیقت زیر جلب می‌کنم:

$$C \xrightarrow{H_A^{-\frac{r'}{r}}} C' \xrightarrow{H_B^{-\frac{r''}{r'}}} C'' \xrightarrow{H_C^{-\frac{r}{r''}}} C$$

$$P \longrightarrow P' \longrightarrow P'' \longrightarrow P'''$$

اما طبق قضیهٔ سه مرکز تجانس $H_C^{-\frac{r}{r''}} \circ H_B^{-\frac{r''}{r'}} \circ H_A^{-\frac{r'}{r}} = H_D^{-1}$ و چون $H_D^{-1}(C) = C$ پس $D = O$ (O مرکز دایرهٔ C) اما $H_D^{-1}(P) = P'''$ پس $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'''}$ و حکم حاصل می‌شود. ∎

مثال ۵. دایرهٔ محاطی در نقاط M، N و P بر اضلاع مثلث ABC مماس است. ثابت کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و H' مرکز ارتفاعی مثلث MNP بر یک راستا قرار دارند.



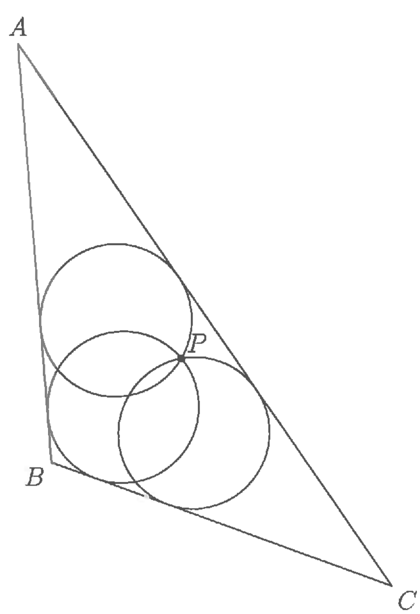
حل. فرض کنید نیم‌سازهای مثلث ABC، دایرهٔ محیطی را در M'، N' و p' قطع کنند. در نتیجه با توجه به:

$$\widehat{BP'} + \widehat{M'N'} = \widehat{BP'}\,\widehat{M'C} + \widehat{CN'} = \hat{C} + \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

چون $M'P'$ و MP بر BN' عمودند در نتیجه MP با $M'P'$ موازی است. به طرز مشابه $MN \| M'N'$ و $PN || P'N'$ پس مثلث PMN و مثلث $P'M'N'$ مجانس هم هستند (چرا؟). فرض کنیم $H_T^k(\triangle PMN) = \triangle P'M'N'$، پس $H_T^k(H_{\triangle PMN}) = H_{\triangle P'M'N'}$، اما $O_{\triangle P'M'N'} = O$ و $O_{\triangle PMN=I}$. در نتیجه O، I و T روی یک خط هستند و $H_T^k(H_{\triangle PMN}) = H_{\triangle P'M'N'}$. اما $H_{\triangle P'M'N'} = I$ و $H_{\triangle PMN} = H'$، در نتیجه I، H' و T روی یک خط هستند. پس روی هم رفته O و H' روی خط IT واقع‌اند، پس حکم حاصل شد. ∎

حالا چند تا تمرین.

تمرین ۱. *از نقطهٔ P واقع در داخل یک مثلث سه دایره با شعاع‌های مساوی طوری گذرانده‌ایم که هر کدام از آنها در داخل مثلث قرار گیرد و بر دو ضلع مثلث مماس باشد. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و نقطه P بر یک خط راست واقع‌اند.*



تمرین ۲. عکس مثال ۳ را ثابت کنید.

تمرین ۳. دایرهٔ C، خط l مماس بر آن و نقطهٔ M واقع بر l، در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقاطی مانند P را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق کنند:

«دو نقطهٔ Q و R روی مماس l وجود داشته باشند به‌طوری که M وسط پاره‌خط QR و دایرهٔ C دایرهٔ محاطی داخلی مثلث PQR باشد.»

تمرین ۴. مثلث غیر متساوی‌الساقین $A_1A_2A_3$، با ضلع‌های a_1، a_2 و a_3 داده شده‌است (a_i ضلع روبه‌رو به زاویهٔ A_i است). M_i وسط ضلع a_i و T_i نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با a_i است. اگر S_i را قرینهٔ R_i نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A_i بگیریم، ثابت کنید M_1S_1، M_2S_2 و M_3S_3 از یک نقطه می‌گذرند.

تمرین ۵. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی روی خط اویلر واقع است.

تمرین ۶. A را یکی از دو نقطهٔ برخورد دایره‌های C_1 و C_2 می‌گیریم که در آن C_1 و C_2 دارای شعاع‌های متفاوت هستند و دارای مرکزهای O_1 و O_2 می باشند. اگر P_1P_2 و Q_1Q_2 مماس‌های مشترک آن دو باشند و M_1 و M_2 به ترتیب اوساط P_1Q_1 و P_2Q_2 باشند، آنگاه $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$.

تمرین ۷. دو دایرهٔ نامتقاطع مفروض‌اند. دو نقطهٔ دلخواه F و F' روی دو مماس مشترک داخلی آنها اختیار شده‌اند. از هر دو نقطه، می‌توان بیش از یک مماس بر هر دایره رسم کرد. فرض کنید مماس‌های مرسوم از F و F' بر یک دایره، در نقطهٔ A، و بر دایرهٔ دیگر در نقطهٔ B به هم برسند ثابت کنید خط AB از نقطهٔ برخورد مماس‌های خارجی می‌گذرد.(در حالت تساوی با خط‌المرکزین موازی است)

مراجع

[۱] پرویز شهریاری، مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف، نشر فردوس.

[۲] پرویز شهریاری / ابراهیم عادل، مسأله‌های المپیادهای ریاضی، انتشارات فاطمی.

[۳] شاریگین، مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه، حمید بیرشک، نشر مبتکران.

[۴] دکتر عبادا...محمودیان، المپیاد ریاضی در ایران، نشر دانشگاه صنعتی شریف.

[۵] یاگلم، ایساک موئیسئیویچ، تبدیل‌های هندسی، محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی(جلد دوم).

- به خواننده پیش‌نهاد می‌کنم حتماً کتاب‌های «تبدیل‌های هندسی» را مطالعه کند، حداقل مقدمهٔ «هندسه چیست؟» آن را ورق بزند.

مسایل المپیادی

علی شوریده

۶-۱) فرض کنید $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که

۱ـ $f(1) = 1$،

۲ـ برای هر $x \in [0,1]$، $f(x) \geq 0$،

۳ـ اگر x، y و $x+y$ در $[0,1]$ باشند، $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

ثابت کنید برای هر x در $[0,1]$، $f(x) \leq 2x$.

۶-۲) تمام اعداد طبیعی n را بیابید که $3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n + 5^n$.

۶-۳) رضا یازده جواب حقیقی برای معادلهٔ $f(19x - \frac{96}{x}) = 0$ پیدا کرده است. ثابت کنید با بررسی دقیق‌تر او می‌تواند یک جواب حقیقی دیگر برای این معادله پیدا کند.

۶-۴) a و b دو عدد صحیح نامنفی‌اند و a عددی فرد است. دنبالهٔ $\{u_n\}$ را با $u_0 = b$ و

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2}u_{n-1} & \text{اگر } u_{n-1} \text{ زوج باشد} \\ u_{n-1} + a & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

برای $n \geq 1$ تعریف می‌کنیم.

۱ـ ثابت کنید حداقل یک n وجود دارد که $u_n \leq a$.

۲ـ ثابت کنید از جایی به بعد دنبالهٔ $\{u_n\}$ متناوب خواهد شد.

لطفاً مسألهٔ (۵-۴) در شماره قبل را به‌این صورت تصحیح کنید: به‌جای «$EF = AN + BN$» بنویسید «$AB = EN + FN$».

مجلهٔ ریاضیات شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۰) صص ۲۱ـ۲۶

حل مسأله‌های المپیادی (۴)

علی شوریده

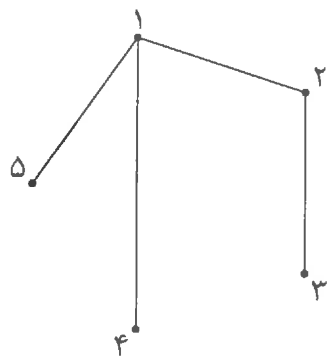
۴-۱) برای هر i، $k - a_i$ در نظر می‌گیریم. اعداد فوق در تقسیم بر n باقی‌مانده‌های مختلفی دارند (چرا؟). حال اگر اعداد زیر را در نظر بگیریم:

$$a_1, \ldots, a_m, k - a_1, \ldots, k - a_m$$

تعداد آن‌ها $2m$ می‌باشد و چون $2m > n$ پس دو تا از این اعداد باقی‌مانده‌های یکسان در تقسیم بر n دارند، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a_i و $k - a_j$ بر n یکی است. پس $a_i + a_j - k$ بر n بخش‌پذیر خواهد بود.

۴-۲) ابتدا می‌گوییم حداقل یک نفر هست که حداقل ۲ آشنا دارد. چرا که اگر هر شخص حداکثر یک آشنا داشته باشد شخصی هست که هیچ آشنایی ندارد (چرا؟). لذا ۴ نفر بقیه باید دوبه‌دو یک‌دیگر را بشناسند که تناقض است پس شخصی مثل شخص شمارهٔ ۱ هست که اشخاص شمارهٔ ۵ و ۲ را می‌شناسد.

بدیهی‌ست که ۲ و ۵ هم‌دیگر را نمی‌شناسند؛ پس یا ۲، ۳ را می‌شناسد و یا ۵. بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم ۲، ۳ را می‌شناسد. ۱، ۴ را نمی‌شناسد زیرا اگر بشناسد هیچ‌کدام از آشنایی‌های ۲ ـ ۴، ۴ ـ ۵ نمی‌تواند برقرار باشد که تناقض است (شکل زیر).



لذا ۳ باید ۴ را بشناسد و حال اگر مثلث ۵ ـ ۴ ـ ۲ را در نظر بگیریم ۵ ـ ۴ باید متصل باشد و حکم برقرار است.

۴-۳) فرض کنیم بتوانیم به ۹ تا صفر برسیم. اگر حالت قبلی آن‌را در نظر بگیریم باید یا دقیقاً ۹ تا صفر یا دقیقاً ۹ تا یک باشد، اگر ۹ تا صفر باشد باز هم باید به عقب برویم و اگر ۹ تا، یک داشته باشیم باز هم به مرحلهٔ قبلی نگاه می‌کنیم یا ۵ تا یک و ۴ تا صفر

ریاضیات شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۸۰) صص ۴۳ـ۴۲

داریم که در این‌صورت حتماً دو تا یک کنار هم قرار می‌گیرند که در مرحلهٔ بعد حتماً یک صفر خواهیم داشت که تناقض است و حالات دیگر نیز به همین ترتیب رد خواهند شد و حکم نتیجه خواهد شد.

۴-۴) مثلث BNM را حول مرکز مربع در جهت پاد ساعت‌گرد به اندازهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم تا M روی N و N روی P برود. فرض کنیم B به B' و C به C' برود.

داریم:

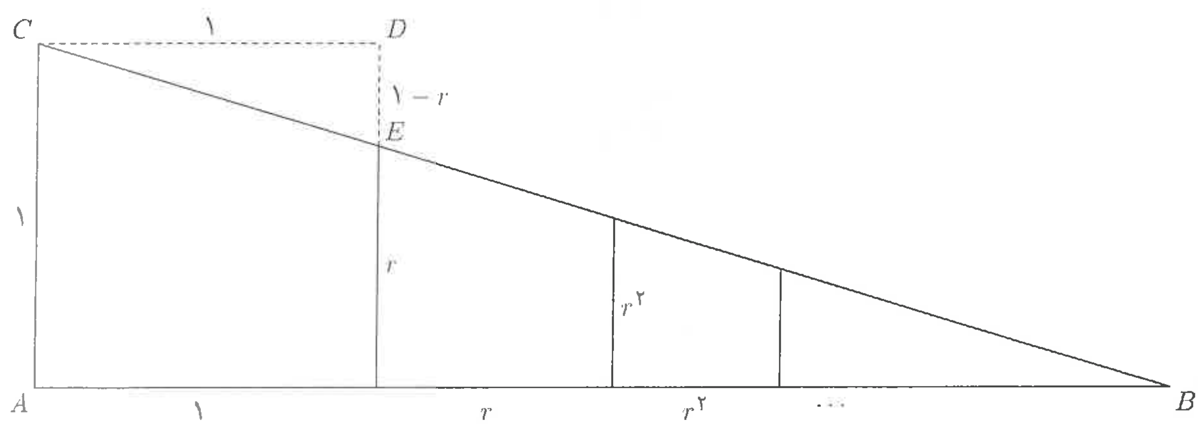
$$\widehat{NPB'} + \widehat{CNP} = \widehat{MNB} + \widehat{CNP} = ۹۰^\circ$$

در نتیجه چون $NB' = NC$ لذا B' در همان طرف CD است که N قرار دارد (چرا؟) در نتیجه C' در آن طرف از CD است که N قرار ندارد لذا $\widehat{CPN} \geq \widehat{B'PN}$ و در نتیجه $\widehat{CPN} \geq \widehat{BNM}$ و به همین ترتیب

$$\widehat{CPN} \geq \widehat{BNM} \geq \widehat{AMQ} \geq \widehat{PQD} \geq \widehat{CPN}$$

در نتیجه $\widehat{CPN} = \widehat{BNM} = \widehat{AMQ} = \widehat{PQD}$ پس $\widehat{CPN} + \widehat{CNP} = ۹۰^\circ$ و لذا $\hat{C} = ۹۰^\circ$. به همین ترتیب اثبات می‌شود که زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{D}$ نیز قائمه‌اند و به‌سادگی نتیجه می‌شود که $ABCD$ مربع است.

اثبات بدون کلام



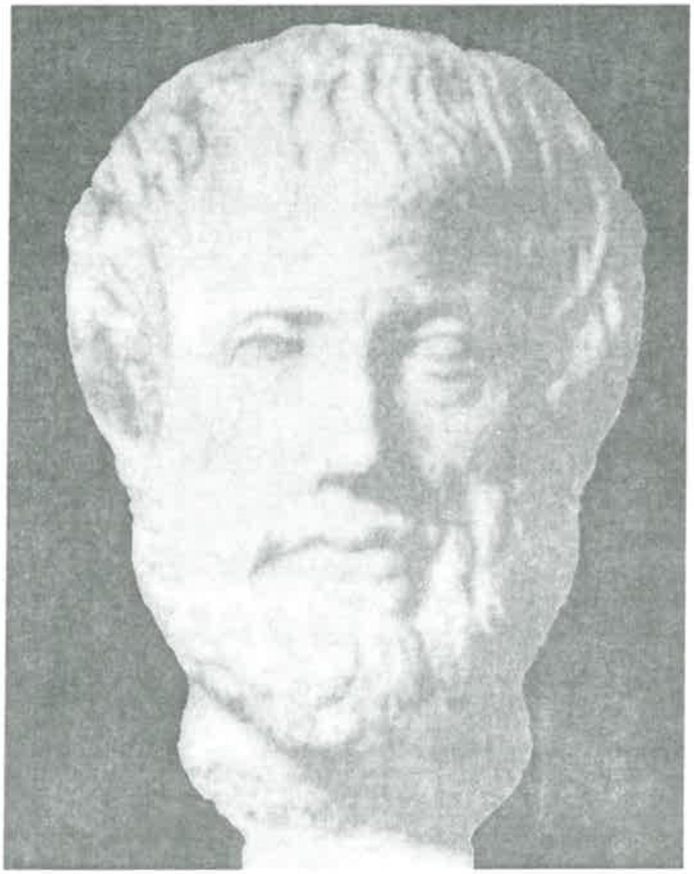
$$۱ + r + r^۲ + \cdots = \frac{۱}{۱ - r}$$

تاریخ هندسه، از مصر و بابل تا ویتن (۳)

رامین دانشی

با کاربرد پول که به‌صورت ضرب سکه در یونان رواج داشت، دگرگونی‌های گسترده و فراوانی رخ داد: رشد جمعیت باز هم سرعت بیشتری گرفت، روستاهای قبیله‌نشین کوچک، بزرگ شدند. شهرهای فعال با صدور کالاهای شناخته شده پیش‌رفت کردند و کشورشهرها که آن‌ها را پولیس[1] می‌نامیدند پدید آمدند.

در این کشورشهرها، یونانی‌های آزاد در همهٔ جنبه‌های زندگی عمومی مانند سیاست، دین، بازرگانی، صنعت و هنر مشارکت فعال داشتند. یونانی‌های آزاد، از نظر ذهنی باهوش و کنج‌کاو بودند و نیروهای ذهنی خویش را پرورش می‌دادند.



اقلیدس

بزرگ‌ترین کشورشهر یونان اسپارت بود که منطقه‌ای به وسعت بیش از ۵۰۰۰ کیلومتر مربع را در بر می‌گرفت. دورانی‌ها که نیاکان اسپارتی‌ها بودند، بیشتر مردم بومی را که هلات نامیده می‌شده‌اند و طبعاً دشمنان خطرناکشان شده بودند، به بردگی وامی‌داشتند. اسپارتی‌ها برای آن‌که بتوانند سیادت نظامی خود را بر سرزمین یونان حفظ کنند، شهر خود را به‌صورت یک دژ نظامی ساخته بودند. کودکان را پس از زاده شدن به نوعی دادگاه نظامی می‌بردند و آن دادگاه، در صورتی که تشخیص می‌داد که کودک مورد نظر سرباز خوبی نخواهد شد، حکم به مرگ او می‌داد. کودکان از هفت سالگی در سربازخانه می‌زیستند و تا بیست سالگی آموزش سخت نظامی می‌دیدند. به‌طور متوسط هر اسپارتی تا شصت سالگی در خدمت ارتش اسپارت بود. بر خلاف آتن، اسپارت که قسمت بزرگی از تاریخ یونان را تشکیل می‌داد هیچ چیز با اهمیتی برای علم و تمدن نیافرید و تأثیر چندانی بر پیشرفت تمدن نگذاشت.

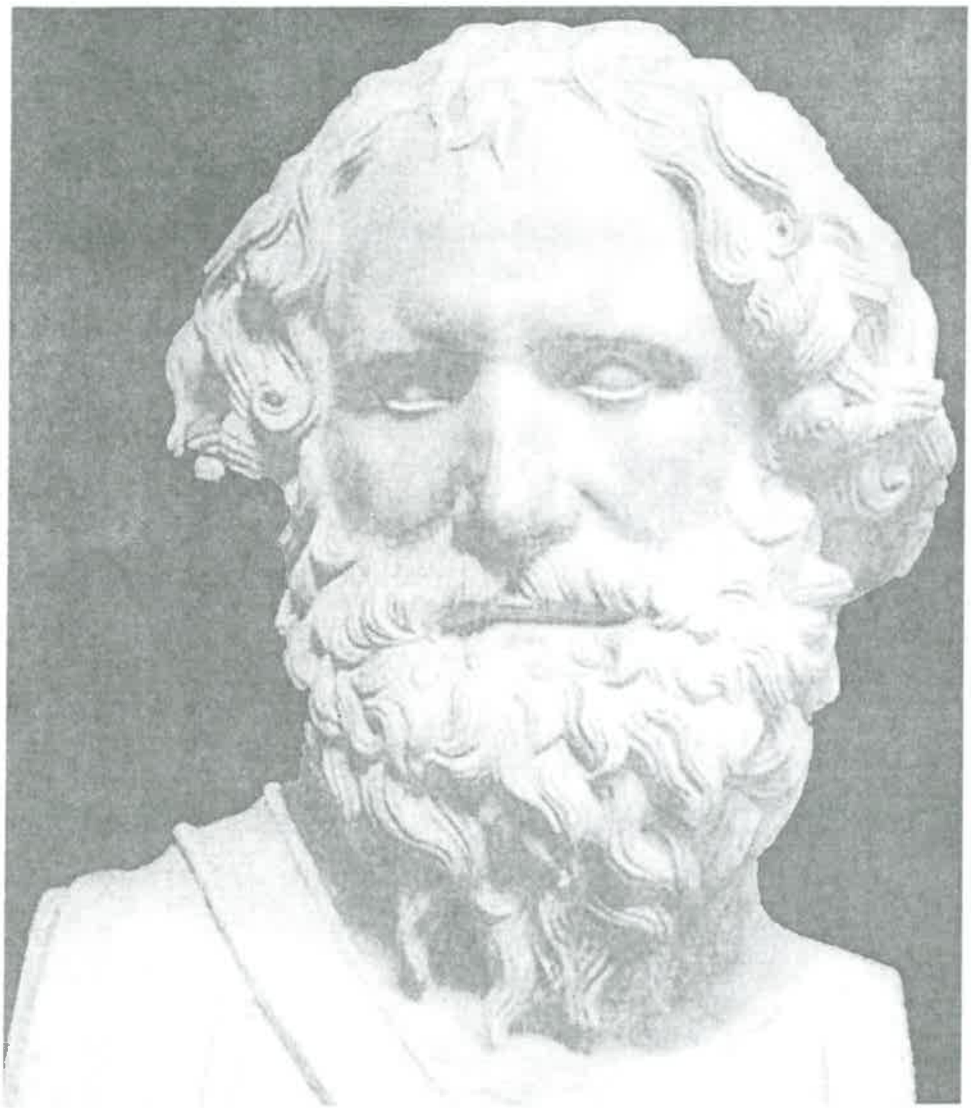
بر خلاف اسپارت، در آتن حکومت از هر جهت مردم سالارانه بود و کم و بیش دولت نمونهٔ بهترین کشورشهرهای یونان به‌شمار می‌رفت. آتن، سهم مستقیمی در حکومت داشت و از این‌رو، برای هر یونانی، شهروند آتن بودن امتیاز ویژه‌ای محسوب می‌شد.

1) Polis

شمارهٔ ۶
(آذر ۱۳۷۰) صص. ۳۶ـ۴۲

امپراتوری ایران، که پهناورترین امپراتوری‌ای بود که تا آن زمان فرمان‌روایان تشکیل داده بودند، با تصرف پادشاهی لیویا مرزهایش را تا دریای اژه گسترش داد. شهرک‌های بی‌شمار یونانی که در کرانه، دریای آسیای صغیر پراکنده بودند و از لیویا پیروی می‌کردند نیز به‌دست ایران افتادند و شهروندان این شهرک‌ها که به هیچ‌وجه حاضر به فرمان‌بری از امپراتوری جهانی ایران نبودند دست به شورش زدند و شهر سارد را به آتش کشیدند. داریوش بزرگ پادشاه ایران که از این عمل یونانی‌ها، که به تحریک آتنی‌ها انجام شده بود، سخت خشمگین شده بود، بر آن شد تا با حمله به آتن، علاوه بر تنبیه شورش‌گران، سراسر خاک یونان را هم ضمیمه، امپراتوری بزرگ ایران کند.

به این ترتیب، جنگی درگرفت که یاد آن هم‌واره در تاریخ غرب ماند؛ نبردی میان دو کشور بزرگ اما با دو نوع تمدن متفاوت. تمدن مردم‌سالارانه و مدنی یونانی‌ها در برابر تمدن امپراتوری ایران که ادامه‌ای بر تمدن‌های بابل و مصر بود و فرمان‌روایان را حاکمان مطلق‌العنان کشور می‌دانست.



ارشمیدس

نخستین تلاش داریوش در حمله به یونان در ۴۹۲ ق.م. با شکست روبرو شد. دومین تلاش او در جنگ ماراتون در سال ۴۹۰ ق.م. در ساحل آتیکا نیز به رسوایی‌ای برای امپراتوری ایران تبدیل شد. پس از دو تلاش نافرجام داریوش، خشایارشاه، جانشین داریوش، ارتشی بسیار بزرگ که گفته می‌شود بالغ بر دو میلیون سرباز و افسر می‌شد را فراهم آورد.

ارتش بزرگ خشایارشاه را، در دایرة‌المعارف جنگی، آرمادا می‌نامند. پس از آرمادای خشایارشاه، معروف‌ترین آرمادای تاریخ آرمادای ژنرال آیزنهاور در جنگ جهانی دوم است.

خشایارشاه از راه داردانل وارد خاک یونان شد؛ اما در گذرگاه ترموپیل[1] اسپارتی‌ها راه را بر نیروی عظیم او بستند (۴۸۰ ق. م). تنها خیانت سبب شد که شاه ایران موفق به گذر از این تنگه شود و به آکروپولیس برسد و آنجا را به آتش بکشد؛ ولی ناوگان دریایی ایران در

1) Thermopylae

خلیج سالمیس شکست سختی خورد که باعث عقب‌نشینی ارتش ایران از خاک یونان شد.

نبرد سالامیس نقطهٔ آغاز رهبری آتن در امور یونان است. رهبری آتنی‌ها چنان مقتدرانه و درخشان بود که حتی جنگ‌های معروف پلوپونزی [1] (۴۳۱ تا ۴۰۴ ق.م.) برتری آتن را در امور عقلی و فکری از میان نبرد.

نبوغ یونانی در هیچ فعالیتی خود را آشکارتر از هدف‌های مطلوب و روش‌های آموزشی و پرورشی کشورشهرهای یونانی نشان نداده است. آموزش و پرورش آتنی دست کم یک ویژگی تازه را در برداشت که تا پیش از آن به آن اهمیت داده نشده بود: جوانان آتنی نه تنها می‌آموختند که در مراوده با مردم چگونه عمل کنند، راه‌های جا افتادهٔ تفکر و انجام دادن کارها را هم مورد نقادی قرار می‌دادند.

پیش از این به دو هندسه‌دان بزرگ یونان یعنی تالس و فیثاغورس پرداختیم. در این‌جا ابتدا به نیروی فکری بزرگی که باعث پیدایش هندسه‌دانان بزرگی چون اقلیدس و و ارشمیدس شد می‌پردازیم. بدون شک اگر نبود تعالیم سقراط،[2] افلاطون[3] و ارسطو و ایده‌های بزرگ این سه فیلسوف بزرگ یونانی، هیچ‌گاه تمدن یونان به آن دست‌آوردهای بزرگ علمی دست نمی‌یافت.

گفته می‌شود که سقراط چهره‌ای زشت داشت ولی از کلامی دلنشین و زیبا بهره‌مند بود. سقراط در کوچه و خیابان می‌ایستاد و با جوانان به بحث می‌پرداخت و با ادلهٔ منطقی آنان را مجاب می‌ساخت. سقراط هیچ‌گاه از جست‌وجوی حقیقت باز نایستاد. مردم آتن تصور می‌کردند سقراط به خدایان یونانی بی‌اعتقاد است و باعث فساد ذهنی جوانان می‌شود و لذا سقراط را محاکمه کردند و او را وادار کردند تا با نوشیدن جام شوکران خودکشی کند.

افلاطون

افلاطون جانشین سقراط بود. او بر خلاف سقراط به تحصیل علم پرداخت و حتی هندسه را مقدمه مطالعهٔ فلسفه قرار داد؛ از این‌رو، بر سر در آکادمی معروف خود نوشته بود «هر که هندسه نمی‌داند وارد نشود».

سه مسأله که توسط افلاطونیان مطرح شد و باعث دل‌مشغولی عدهٔ بسیاری از شیفتگان هندسه حتی در زمان حال هم شده، باعث دست‌آوردهای زیادی در هندسه شد. این سه مسأله عبارتند از تثلیث زاویه (تقسیم هر زاویه مفروض فقط با خط‌کش غیر مدرج و پرگار به سه قسمت مساوی)، تربیع دایره (رسم دایره‌ای که مساحتش برابر با مساحت مربعی مفروض باشد فقط با خط‌کش غیر مدرج و پرگار) و تضعیف مکعب (ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد فقط با خط‌کش غیر مدرج و پرگار).

1) Poloponnesus 2) Socrates 3) Plato

![ماهنامهٔ ریاضیات]

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵» ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره. ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵» ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

مسأله‌های جایزه‌دار!

دراین شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. پاسخ‌های خود را به دفتر مجله ارسال کنید، به پاسخ‌های صحیح برگزیده جایزه تعلق می‌گیرد.

۱) یك صفحهٔ مربع شکل 1000×1000 مفروض است. کوچك‌ترین عدد صحیح و مثبت n را پیدا کنید که اگر به هر ترتیب دلخواه، n خانه از مربع را رنگ‌آمیزی کنیم، بتوانیم مثلثی قائم‌الزاویه روی مرکزهای سه مربع رنگ‌شده بنا کنیم که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن موازی ضلع‌های صفحه باشد.

۲) فرض کنید $A_1A_2A_3$ یك مثلث و C_1 دایره‌ای در صفحه باشد که از A_1 و A_2 می‌گذرد. فرض کنید دایره‌های C_2، ...، C_7 مجود باشند که دایرهٔ C_k برای $k = 2, \ldots, 7$ بر دایرهٔ C_{k-1} مماس خارج باشد و از A_k و A_{k+2} هم بگذرد (برای هر $n \geq 1$، A_{n+3} را A_n می‌گیریم). ثابت کنید $C_1 = C_7$.

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:
