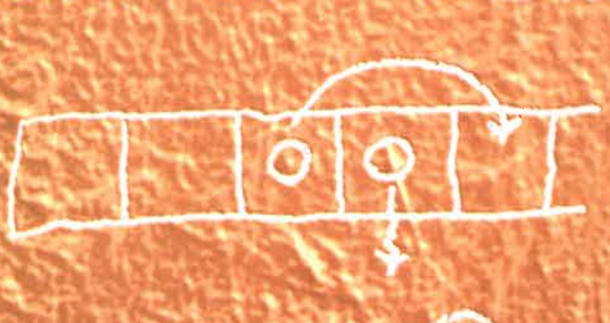
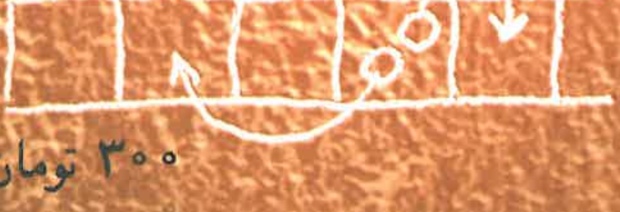
ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ هفتم، دی ۱۳۸۰



$$F_n + F_{n+1} = F_{n+۲}$$



$$۲F_n = F_{n+1} + F_{n-۲}$$

۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال دوم، شمارهٔ هفتم، دی ۱۳۸۰

نشانی پستی ماهنامه
تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵
تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)
نمابر: ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: نگاه کنید به
«داستان طرح یک مسأله».

یادداشت

یاد استاد ابوالقاسم قربانی را گرامی می‌داریم

در ماه گذشته، استاد ابوالقاسم قربانی رخ در نقاب خاک کشید و جامعهٔ ریاضی ایران را داغدار کرد. استاد قربانی یک معلم برجستهٔ ریاضی بود که با تألیف مجموعه‌ای از کتاب‌های ریاضی دورهٔ دبیرستان به اتفاق استاد حسن صفاری، سالها کانون توجه دانش‌آموزان زیادی بود. تا قبل از دههٔ چهل، وزارت آموزش و پرورش (که در آن زمان وزارت فرهنگ نامیده می‌شد) صرفاً برنامه‌های درسی را تدوین می‌کرد و کار تألیف و نشر کتاب‌ها به‌صورت آزاد انجام می‌شد.

در آن دوره کتاب‌های صفاری ـ قربانی برای خود جذبهٔ ویژه‌ای داشت که در زمینه‌های مختلف اعم از جبر و حساب و هندسه چه بسا دانش‌آموزان علاقه‌مندی را ساعت‌ها سرگرم مسائل پیچیده و جذاب خود می‌کرد. پس از آن‌که در دههٔ چهل انتشار کتاب را وزارت آموزش و پرورش خود عهده‌دار شد بعضی از کتاب‌های صفاری ـ قربانی در بین مجموعهٔ هماهنگ قرار گرفت و به‌عنوان کتاب سرتاسری توسط وزارت آموزش و پرورش چاپ و پخش شد و دانش‌آموزان سال‌های چهل همیشه در کتاب‌فروشی‌هایی که کتاب‌های کهنه و دست دوم می‌فروختند دنبال کتاب‌های صفاری ـ قربانی می‌گشتند تا با حل مسائل آن‌ها به چالش بنشینند. از بین کتاب‌های صفاری ـ قربانی خیلی از قدیمی‌ها کتاب‌های هندسه و به‌ویژه «نُه مقالهٔ هندسه» را فراموش نمی‌کنند.

استاد قربانی از سال‌های پنجاه به مطالعه و تحقیق و تدریس تاریخ ریاضیات روی آورد. به‌ویژه به بررسی شرح احوال و آثار ریاضیدانان دورهٔ اسلامی پرداخت و مجموعهٔ آثار بدیع و ارزشمندی را از خود به‌جای گذاشت. استاد قربانی هم به جمع‌آوری و تصحیح و انتشار آثاری از ریاضیدانان دورهٔ اسلامی همت گماشت و هم شرح احوال آثار آنان را در مجموعه‌هایی در دسترس عموم قرار داد. همهٔ این‌ها باقیات صالحات اوست.

ی. ت.

نه مقالهٔ هندسه

بخش اول

هندسهٔ مسطحه و متمم آن

برای دانشسراهای مقدماتی و سال ششم ریاضی
و کلیهٔ کسانیکه مایل بآموختن هندسهٔ مقدماتی هستند

تألیف:

ابوالقاسم قربانی — حسن صفاری

معلمان علوم ریاضی

حق هرگونه اقتباس و تجدید طبع این کتاب ممنوع است

سال ۳۲-۱۳۳۱

کتابفروشی و چاپخانهٔ علی اکبر علمی

تهران-خیابان ناصرخسرو-تلفن ۲۱۲۸۳ ۳۸۷۰۹

برای بزرگداشت یاد استاد ابوالقاسم قربانی، در این شماره از ماهنامهٔ ریاضیات در بخش از گذشته‌ها، مطالبی دربارهٔ شکل مغنی به نقل از کتاب «تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی» اثر استاد قربانی که مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۷۴ منتشر کرده است، درج می‌کنیم. ادامهٔ مطلب تاریخ هندسه را در شمارهٔ بعدی می‌خوانید.

باز هم دربارهٔ المپیاد ریاضی

در سال‌های ۱۳۶۰ که گرایش دانش‌آموزان به تحصیل در رشته ریاضی دبیرستان افت شدیدی پیدا کرده بود مسئولین وزارت آموزش پرورش دست به ابتکار و راه‌اندازی المپیاد ریاضی زدند تا جنب و جوشی در میان دانش‌آموزان دبیرستانی به‌وجود آورند که بدون تردید برگزاری المپیاد تأثیر بسیار مثبتی برای ایجاد رونق و جوشش علمی بین دانش‌آموزان ایجاد کرد و کسب افتخارات بین‌المللی نیز موجب کسب اعتبار بیشتر برای جمهوری اسلامی ایران گردید وگذشته از آن موج نوینی از اقبال دانش‌آموزان برجسته برای ادامه تحصیل در دانشگاه و برای تحصیلات عالی راه افتاد که این امید را ایجاد کرده است که موجب تحول اساسی در علوم ریاضی درکشور باشد.

ولی اکنون در پایان دههٔ دوم برگزاری المپیاد ریاضی، نتایج دور از انتظار تیم در عرصهٔ بین‌المللی در سال‌های اخیر این نگرانی را ایجاد کرده است که با مشکلی ریشه‌دار مواجه شده‌ایم. این گزارش به بررسی مقدماتی این امر می‌پردازد.

برای نخستین بار در سال ۱۳۶۶، تیم المپیاد ریاضی جمهوری اسلامی ایران به مسابقات جهانی کوبا اعزام شد. این تیم با کسب یک مدال برنز و رتبهٔ تیمی ۲۶ (در میان ۵۶ کشور) آغازگر نهضت پرشور شوق فعالیت‌های علمی در بین دانش‌آموزان ایرانی بود. پس از این دوره، روندی صعودی از لحاظ کسب مدال و رتبهٔ تیمی طی شد تا این‌که در سال ۱۳۷۷، تیم جمهوری اسلامی ایران با کسب ۵ مدال طلا و یک نقره بر سکوی اول جهان ایستاد.

گذشته از آن گرایش ادامهٔ تحصیل اعضای تیم به تحصیل در رشتهٔ ریاضی، انتشار مقالات و یادداشت‌های علمی بعضی از اعضای تیم که حتی انعکاس بین‌المللی یافته است و توفیق ادامه تحصیل آنان در سطح بین‌المللی، همه حاکی از وجود یک شور و اشتیاق علمی و روحیهٔ علمی بسیار عمیق بین برگزیدگان المپیاد ریاضی بوده است.

اما در دو ــ سه سال گذشته نزول شدید و باور نکردنی رتبهٔ تیمی و کم شدن تمایل اعضای تیم به ادامه تحصیل در رشته ریاضی نکته‌ای قابل توجه است. و روند موجود این نگرانی را ایجاد می‌کند که با مسأله‌ای جدی که شاید ناشی از افت روحیهٔ علمی بین دانش‌آموزان طراز اول کشور باشد. روبه‌رو هستیم.

در المپیاد بین‌المللی امسال که تیر ماه ۸۰ درکشور آمریکا برگزار شد، تیم اعزامی با کسب ۲ مدال نقره و ۴ مدال برنز به رتبه تیمی دور از انتظار هفدهم دست یافت. و همین باعث شد ریشه‌یابی افت تیم المپیاد ریاضی به‌عنوان مسأله‌ای مهم مطرح شود در بررسی مقدماتی بعضی دلایل اولیه مطرح شد مثلاً:

۱) اضطراب بیش از حد اعضای تیم در هنگام شرکت در آزمون‌های المپیاد، به‌طوری که حتی سؤالات ساده را هم به‌طور مطلوب پاسخ ندادند.

۲) بلاتکلیفی اعزام تیم، به دلیل مشکلات سیاسی تا آخرین لحظه ورود به آمریکا و فشار مضاعفی که روی بچه‌ها وجود

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۵ــ۳

داشت.

۳) کم رنگ شدن مباحث ریاضی در نظام جدید

اما بررسی عمیق‌تر این وضعیت، دلایل موجه‌تری را برای این افت تیم بیان می‌کند.

عمدهٔ این دلایل را می‌توان افت روحیهٔ علمی و دانش پژوهی بین عموم دانش‌آموزان دبیرستانی عنوان کرد که نتیجهٔ مستقیم وجود مسألهٔ بزرگی به نام کنکور است.

شاید وقتی «کنکور» به‌عنوان تنها راه برای ورود به دانشگاه‌ها تعیین شد این گمان وجود نداشت که پس از گذشت چند سال به مشکلی جدی در سیستم آموزش و پرورش تبدیل شود و همهٔ اهداف آموزشی آن را تهدید کند.

در حال حاضر افزون شدن جمعیت دانش‌آموزی و تمایل بسیار زیاد آنان برای ورود به دانشگاه و همچنین محدودیت ظرفیت دانشگاه‌ها، باعث شده است تا کنکور به جای آن که بر اساس اهداف تعیین شدهٔ آموزش و پرورش، افراد شایسته را برای دانشگاه انتخاب کند، به نوعی خود هدف گذار آموزش و پرورش کشور شده است و دانش‌آموزان را به رقابتی ناسالم فرا می‌خواند که عمدتاً مبتنی بر حفظیات است و از توانایی تحصیل و خلاقیت در آن اثری نیست. و همین باعث افت علمی در سطح گستردهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی شده است.

در سال‌های اخیر دیگر جایی برای پرورش استعدادها و روحیات علمی دانش‌آموزان وجود ندارد و افرادی هم که خود دارای توانایی‌ها و قابلیت‌های علمی هستند در لابلای قالب‌های کنکوری و دوپینگهای کلاس‌های کنکور پژمرده می‌شوند که یکی از نتایج آن نزول تیم المپیاد ریاضی کشور است.

به طور کلی کنکور به دو طریق در المپیاد تأثیر می‌گذارد.

اول آن که به دلیل رقابت سنگین در کنکور و لزوم داشتن قابلیت‌های خاص ـــ البته نه لزوماً قابلیت‌های علمی ـــ و کسب آمادگی بسیار زیاد برای موفقیت در کنکور، بسیاری از افراد توانمند که می‌توانند در عرصه المپیاد موفق باشند ترجیح می‌دهند تا به جای این‌که به المپیاد فکر کنند برای کنکور که راهی مطمئن‌تر برای رسیدن به دانشگاه است ـــ آماده شوند و همین امر باعث می‌شود که همان اندک روحیهٔ علمی که در آنان وجود دارد در راه آمادگی برای کنکور از بین برود.

و به‌همین دلیل از تعداد افرادی که قابلیت‌های علمی دارند کاسته می‌شود.

از سوی دیگر سنگینی کنکور باعث می‌شود تا عده‌ای به المپیاد به‌عنوان وسیله‌ای برای ورود به آموزش عالی و برخورداری از دیگر مزایای مادی و معنوی آن نگاه می‌کنند. و دخیل شدن این انگیزه‌های غیر علمی باعث افت روحیهٔ علمی و دانش‌پژوهی افراد شرکت‌کننده در المپیاد شده است. با توجه به آمار نیز می‌بینیم که تعداد افرادی که پس از ورود به دانشگاه رشتهٔ ریاضی را به‌عنوان رشتهٔ دانشگاهی خود برگزیده‌اند در سال‌های اخیر کاهش یافته است و در سال ۱۳۸۰ این تعداد به صفر رسیده است.

علاوه بر موارد فوق، المپیاد به‌طور غیر مستقیمی نیز از کنکور تأثیر یافته است. کنکور نه تنها فعالیت دانش‌آموزان توانمند را محدود می‌کند بلکه بر نحوهٔ کار عموم دانش‌آموزان نیز تأثیر می‌گذارد.

به دلیل خاص بودن نحوهٔ کنکور و موفقیت در آن ـــ که نه بر پایهٔ قابلیت‌های علمی بلکه مبتنی بر سرعت عمل و برخی مهارت‌های غیر علمی است. باعث شده است تا هم دانش‌آموزان و هم معلمان رغبتی به فراگیری عمیق اصول علمی نداشتة باشند و هدف آموزش در دورهٔ دبیرستان تنها موفقیت در کنکور تعیین شود که صرف‌نظر از نزول در المپیاد، به از دست رفتن روحیهٔ علمی و پژوهشی دانش‌آموزان منجر شده و به مشکلی اساسی در آموزش و پرورش کشور تبدیل شده است.

با توجه به این اثرات و پیامدها، به نظر می‌رسد که باید برای حل این معضل هر چه سریع‌تر چاره‌ای اندیشیده شود که مسلماً به تحقیقات و پژوهش‌های بسیار زیادی نیاز دارد و امیدواریم مسؤلان و دست‌اندرکاران با حمایتی همه جانبه به بررسی و حل این مشکل عظیم بپردازند. ماهنامه ریاضیات از دریافت نظر کارشناسان و علاقه‌مندان علوم ریاضی دربارهٔ المپیاد ریاضی استقبال می‌کند.

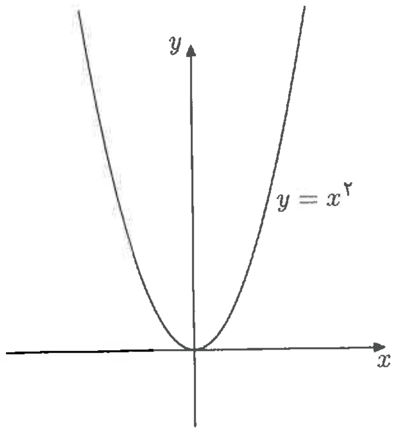
ضمیمه۱: نتایج و مشخصات تیم‌های شرکت کننده در المپیادهای بین‌المللی ریاضی

سال	محل	رتبهٔ تیمی	طلا	نقره	برنز	دیپلم افتخار	دوم	سوم	چهارم یا پیش	ریاضی	برق	سایر
۱۳۸۰	آمریکا	۱۷	-	۲	۴	-	-	۲	۷	-	۷	-
۱۳۷۹	کره جنوبی	۱۰	۲	۳	۱	-	-	-	۹	۱	۸	-
۱۳۷۸	رومانی	۸	۲	۳	۱	-	-	۱	۹	۱	۲	۶
۱۳۷۷	تایوان	۱	۵	۱	-	-	-	۱	۹	۲	۶	۱
۱۳۷۶	آرژانتین	۳	۴	۲	-	-	-	۱	۱۲	۶	۳	۳
۱۳۷۵	هندوستان	۹	۱	۴	۱	-	۲	۴	۵	۳	۱	۱
۱۳۷۴	کانادا	۸	۲	۳	۱	-	-	-	۱۱	۶	۴	۱
۱۳۷۳	هنگ کنگ	۸	۲	۲	۲	-	۱	۳	۶	۴	۱	۱
۱۳۷۲	ترکیه	۶	۲	۳	۱	-	-	-	۹	۸	۱	-
۱۳۷۱	روسیه	۱۴	-	۳	۲	۱	-	۲	۷	۵	۲	-
۱۳۷۰	سوئد	۸	۲	۱	۲	-	-	-	۶	۴	-	۲
۱۳۶۹	چین	۱۴	-	۴	-	-	-	۲	۴	۲	۲	-
۱۳۶۸	آلمان	۱۴	-	۲	۳	۱	-	-	۶	۲	۴	-
۱۳۶۷	استرالیا	۲۰	-	۱	۳	-	-	۱	۵	۱	۴	-
۱۳۶۶	آلمان	۱۴	-	-	۱	-	-	-	۶	۲	۴	-

همهٔ سهمی‌ها با هم متشابه هستند!

سپیده چمن‌آرا، مانی رضایی

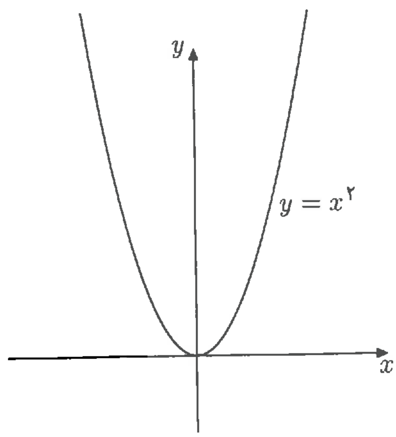
احتمالاً همهٔ خوانندگان با نمودار سهمی $y = x^۲$ در اولین سال دبیرستان آشنا شده‌اند. این نمودار به شکل زیر است.



شکل ۱

نقطهٔ $(۰, ۰)$ رأس سهمی نامیده می‌شود. این نقطه، نقطه‌ای است که در آن کمترین مقدار y به ازای مقدارِ $x = ۰$ رُخ می‌دهد. یعنی به ازای سایر xها، y بیشتر از ۰ خواهد بود (که این موضوع در فرمول $y = x^۲$ نیز قابل مشاهده است).

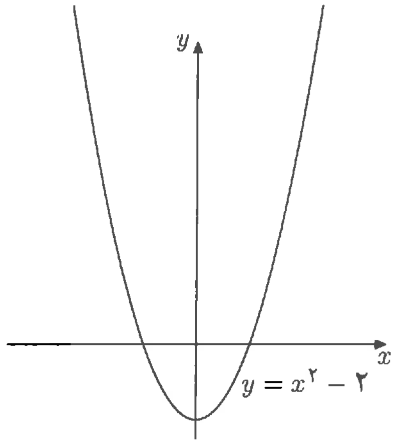
اینک سهمیِ $y = x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید که شکل آن به‌صورت مقابل است.



شکل ۲

این سهمی، دقیقاً همان سهمیِ شکل ۱ است که یک واحد به سمت بالا انتقال یافته است، زیرا به‌ازای یک مقدار ثابت برای x، در شکل ۱ عرض نقطه‌ای با این مختصهٔ اول، برابر $x^۲$ و در شکل (۲) عرض نقطه‌ای با این مختصهٔ اول برابر $x^۲ + ۱$، یعنی درست یک واحد بیشتر از $x^۲$، است. مشابهاً نمودار سهمی $y = x^۲ - ۲$، همان نمودار شکل ۱ است که ۲ واحد به سمت پایین منتقل شده است (شکل ۳).

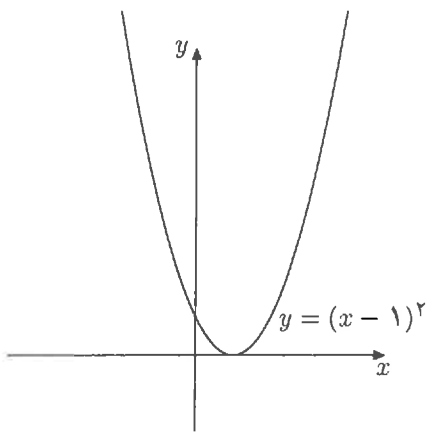
مکتب‌خانهٔ ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۱۰ــ۶



شکل ۳

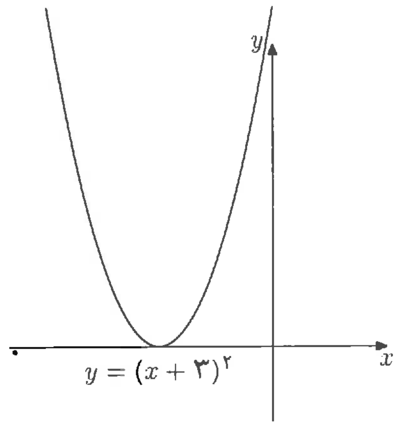
بنابراین اضافه شدن حد ثابتِ d به عبارت $y = x^۲$، $y = x^۲ + d$ را می‌دهد که برای رسم نمودار سهمی جدید، کافی است نمودار سهمی $y = x^۲$ را به اندازهٔ $|d|$ واحد به بالا (اگر $d > ۰$) یا پایین (اگر $d < ۰$) انتقال داد. پس می‌توان گفت سهمیِ $y = x^۲ + d$ با سهمیِ $y = x^۲$ متشابه است (البته با نسبت تشابه $k = ۱$!).

اینک نمودار سهمی $y = (x - ۱)^۲$ را رسم می‌کنیم.



شکل ۴

با کمی دقت، متوجه می‌شوید که این نمودار هم همان نمودار $y = x^۲$ است که یک واحد به **سمت** راست منتقل شده است، زیرا به‌ازای یک x مشخص، عرض نقطه‌ای با این مختصه اول روی نمودار شکل ۱، $x^۲$ است در حالی که روی این نمودار (شکل ۴)، $(x - ۱)^۲$ است، یعنی عرض نقطه‌ای از نمودار شکل ۱ که مختصهٔ اول آن به اندازهٔ یک واحد کمتر از مقدار فعلی x بوده است. این مطلب نشان می‌دهد که نمودار $y = x^۲$ یک واحد عقب‌تر از نمودار $y = (x - ۱)^۲$ است. مشابهاً نمودار سهمی $y = (x + ۳)^۲$، همان نمودار $y = x^۲$ است که ۳ واحد به سمت چپ انتقال یافته است.



شکل ۵

پس در حالت کلی، نمودار $y = (x+p)^۲$، همان نمودار سهمی $y = x^۲$ است که به اندازهٔ $|p|$ واحد به سمت راست (اگر $p < ۰$) یا به سمت چپ اگر (اگر $p > ۰$) انتقال یافته است. در این حالت نیز می‌توان گفت سهمیِ $y = (x+p)^۲$ با سهمی $y = x^۲$ متشابه است (باز هم با نسبت تشابه $|k = ۱|$)

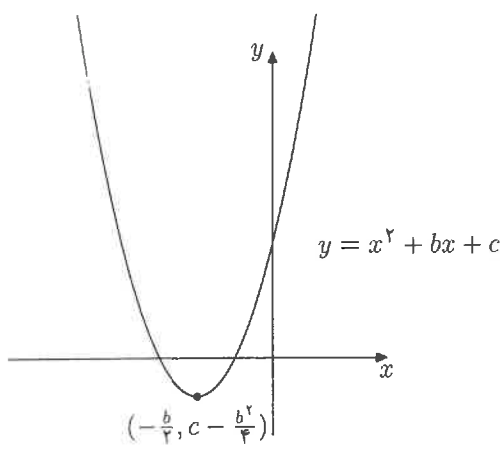
اما همیشه سهمی‌هایی که در اختیار داریم (در واقع معادلهٔ آنها) به این تر و تمیزی نیستند. فرض کنید در حالتی کلی‌تر، سهمی

$$y = x^۲ + bx + c$$

را در اختیار دارید، در این صورت با روش «ساخت مربع کامل» که احتمالاً در حل معادله‌های درجهٔ ۲ دیده‌اید، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y &= x^۲ + bx + c \\ &= x^۲ + bx + \frac{b^۲}{۴} + c - \frac{b^۲}{۴} \\ &= \left(x + \frac{b}{۲}\right)^۲ + c - \frac{b^۲}{۴} \end{aligned}$$

یعنی این سهمی، همان سهمی $y = x^۲$ است که نخست $\left|\frac{b}{۲}\right|$ به سمت چپ یا راست منتقل شده و سپس به اندازهٔ $\left|c - \frac{b^۲}{۴}\right|$ به بالا یا پایین انتقال یافته است، لذا با آن مساوی، یا بهتر بگوییم متشابه است!



شکل ۶

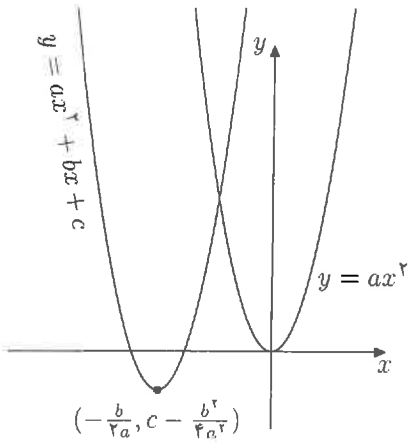
شاید تا این مرحله بررسی حالتهای گوناگون سهمی، محدود به انتقال نمودار $y = x^۲$ روی صفحه باشد و مثالهای مطرح شده بدیهی به‌نظر برسد. حکم کمی نابدیهی‌تر این است که آیا نمودار $y = x^۲$ با نمودار $y = ۳x^۲$ نیز متشابه است!؟پیش از این‌که به بررسی یک یا دو مثال بپردازیم و نمودار سهمی‌های متفاوت را با یکدیگر مقایسه کنیم به محاسبات زیر توجه کنید.

تا اینجا دیدیم تمام سهمی‌هایی که در آنها ضریب x^2، برابر با ۱ است، در اصل انتقال یافتهٔ سهمی $y = x^2$ هستند، حال کلی‌ترین حالتِ سهمی، $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم.

مشابه با آنچه که در مرحلهٔ قبل انجام دادیم، یعنی استفاده از روش «ساختن مربع کامل»، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

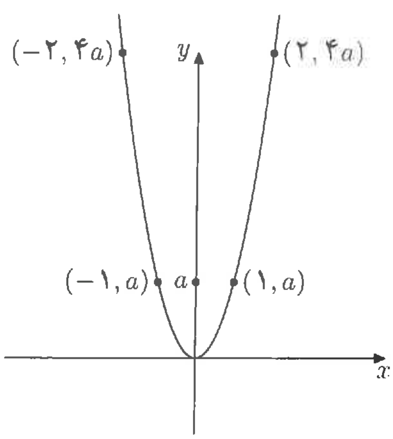
یعنی سهمی $y = ax^2 + bx + c$، انتقال یافتهٔ سهمی $y = ax^2$ است که رأس آن به نقطهٔ $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ منتقل شده است، لذا با این سهمی (یعنی سهمی $y = ax^2$) مساوی است. (شکل ۷)



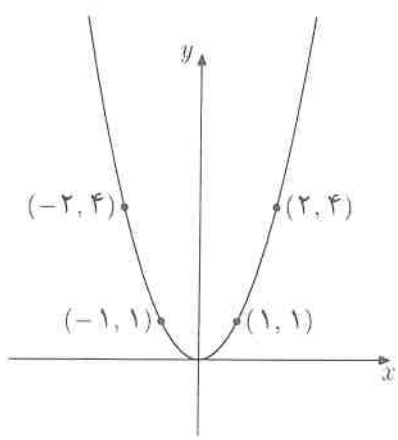
شکل ۷

حال برگردیم به عنوان مقاله؛ هر دو سهمی با یکدیگر متشابهند. تا اینجا همهٔ سهمی‌های به شکل $y = x^2 + bx + c$ با سهمی $y = x^2$ (و در نتیجه با یکدیگر) متشابه‌شدند. از طرفی سهمی‌های به شکل $y = ax^2 + bx + c$ با سهمی $y = ax^2$ متشابه شدند. لذا کافی است نشان دهیم $y = x^2$ با $y = ax^2$ متشابه است!

به نظر می‌رسد که باید بتوانید حدس بزنید که برای تبدیل $y = ax^2$ بر $y = x^2$ (یعنی انطباق نمودار $y = x^2$ بر نمودار $y = x^2$) باید چه تغییر مقیاسی بدهیم؟ اجازه بدهید نخست با دیگر شکل این دو سهمی را بکشیم: (شکل ۹ در حالت خاصی که $a > 1$، رسم شده است.)

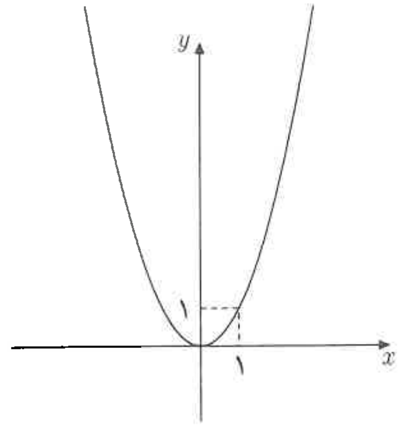


شکل ۹ ـ الف، $y = ax^2$ $(a > 1)$



شکل ۸ ـ الف، $y = x^2$

حال فکر می‌کنید کدام تصویر را باید بزرگ کنیم تا بر دیگری منطبق شود؟ اگر هنوز هم نتوانستید حدس بزنید، دست به امتحان بزنید، مثلاً بیایید شکل ۸ ـ الف را بزرگ کنیم تا شکل ۸ ـ ب به دست آید، برای بزرگ کردن شکل، مقیاس آن را a برابر می کنیم، یعنی هر a واحد روی هر محور، تبدیک به یک واحد می‌شود:

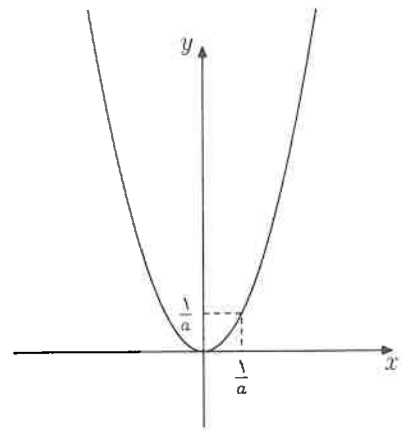


شکل ۸ ـ ب

نمودار شکل ۸ـ الف که بزرگ شده است (a برابر شده است)

به وضوح این شکل، نمودار $y = ax^۲$ نیست. زیرا نقطهٔ با مختصهٔ اول a، روی این نمودار دارای مختصهٔ دوم a است در حالی که روی سهمی $y = ax^۲$، باید دارای مختصهٔ دوم $a^۳$ باشد.

حال شکل ۹ ـ الف را به همین روش بزرگ می‌کنیم:



شکل ۹ ـ ب

آری؛ این دیگر نمودار $y = x^۲$ است! پس با بزرگ کردن شکل سهمی $y = ax^۲$، و a برابر کردن واحدهای آن، شکل سهمی $y = x^۲$ به دست می‌آید. این یعنی این دو سهمی متشابه هستند! البته توجه کنید که اگر شکل ۷ ـ الف را با مقیاس $\frac{1}{a}$ بزرگ (یا کوچک) می‌کردیم، آنوقت، شکل ۸ ـ الف به‌دست می‌آمد.

صحبت‌های فوق برای حالتی که $۱ > a > ۰$ یا حتی $۰ > a$ نیز درست هستند. بررسی آنها را که به نوعی تکرار عملیات بالا است، به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

مراجع

[۱] ریاضیات ۱، سال اول، نظام جدید آموزش متوسطه، نظری ـــ فنی حرفه‌ای، کار و دانش، سال ۱۳۷۹.

[۲] ریاضیات ۲، سال دوم نظام جدید آموزش متوسطه، نظری سال ۱۳۷۹.

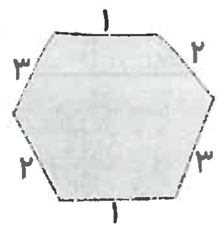
[۳] ریاضیات ۳، سال سوم نظام جدید آموزش متوسطه، علوم انسانی، سال ۱۳۸۰.

آرش در سیارهٔ تویاپ (قسمت پنجم)

ایمان افتخاری

آقای خی: و به این ترتیب ما به دنبال شکل‌های ساده هستیم و اگر یک شش ضلعی ساده باشد باید دو عدد ۱ روبه‌روی هم باشند. حالا ببینیم بقیه ضلع‌ها چه وضعیتی خواهند داشت ...

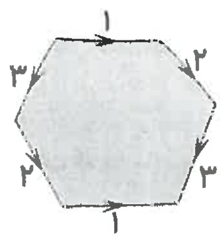
آقای سای: اما دیگر لازم نیست بقیهٔ ضلع‌ها را در نظر بگیرید. روش ما نشان داد که برای هر ضلع، ضلع دیگر با همان شماره باید روبه‌روی آن باشد، در غیر این‌صورت می‌توان به حالت ساده‌تری رسید. پس تنها حالت ممکن برای ۶ ضلعی چیزی شبیه به این است که طبق قاعدهٔ آخر ساده می‌شود.



آرش: نه، گمان می‌کنم اشتباه می‌کنید چون ترتیب ضلع‌ها عوض شده‌است پس از روش قبلی نمی‌توان استفاده کرد.

آقای سای: فرقی نمی‌کند؛ مثل این است که جهت فلش‌ها مثل هم باشد.

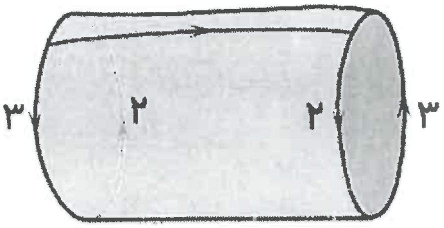
آرش: این‌طور نیست اگر فلش‌ها را حذف نکنیم چند ضلعی به این شکل خواهد بود و حالا واضح است که نمی‌توان به زنجیرهٔ این ضلع‌ها به چشم یک ضلع نگاه کرد.



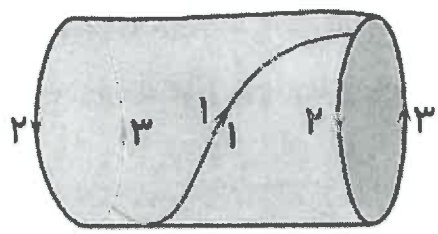
آقای خی: خوب به‌نظر می‌رسد که در حالت ۶ ضلعی هم فقط یک حالت ساده نشده داریم. خیلی خوب است، می‌شود امیدوار بود که همین اتفاق باز هم تکرار شود.

آقای سای: قبل از این‌که جلوتر برویم بگذارید ببینیم که این موجود در واقع چیست؟ خوب، یکی کردن دو ضلع با شمارهٔ ۱ که مثل حالت چهار ضلعی است. اما برای چسباندن ۲ ها به هم کمی مشکل داریم.

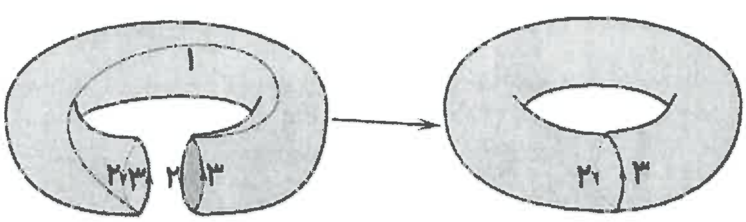
ماهنامه ریاضینیک شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۱۴ــ۱۱



آرش: خوب اگر یک طرف استوانه را نیم دور تاب بدهیم اوضاع کمی بهتر خواهد شد.



حالا می‌توان دو طرف استوانه را به راحتی به هم چسباند.

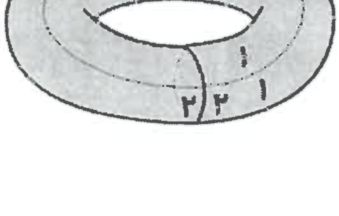


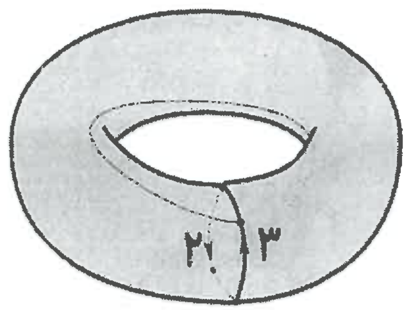
آقای خی: جالب است! باز هم همان تیوپ قبلی خودمان! پس این شکل هم زیاد عجیب نیست. اما واقعاً چرا این دو چند ضلعی در واقع یک جسم را نشان می‌دهند؟

آقای سای: خوب این‌که معلوم است چون ما در چسباندن مثلث‌ها به هم آزادانه عمل کردیم، ممکن است که این دو جسم حاصل راه حل‌های مختلف چسباندن مثلث‌ها به هم باشند.

آقای خی: نه! منظورم این نیست. منظورم این است که آیا ما بدون چسباندن و مستقیماً از روی شکل چند ضلعی‌ها می‌توانیم یکی بودن شش ضلعی و چهار ضلعی را ببینیم یا نه؟

برای مدتی همه به فکر فرو رفته بودند و بعد از مدتی آرش با هیجان گفت« خوب من ایده‌ای دارم. در مستطیل، بعد از چسباندن، ضلع‌ها به این شکل در تیوپ ظاهر می‌شوند.

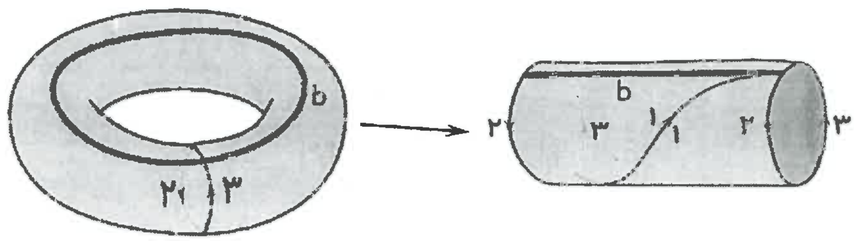




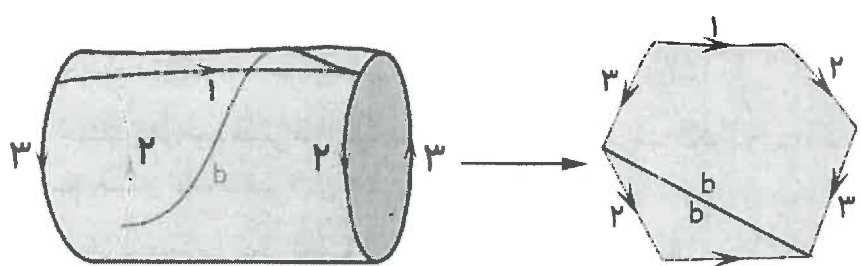
چه‌طور است که ببینم تصویر ضلع ۱ در مستطیل، روی شش ضلعی چه شکلی خواهد داشت.»

آقای سای که کمی سر درگم شده بود پرسید: منظور شما چیست؟

آرش: ببینید اگر ما دایره‌ای که دور سوراخ می‌گردد را در نظر بگیریم و روی این تیوپ آخری پُر رنگ‌تر بکشیم با بریدن تیوپ روی ضلع‌های مربوط به اعداد ۲ و ۳ به این شکل‌ها می‌رسیم.

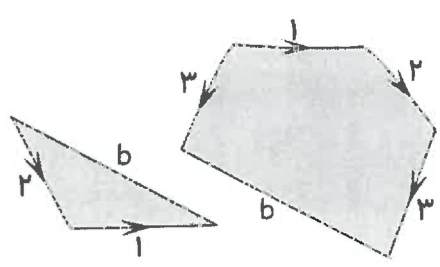


و بعد از بازکردن تاب و بریدن در امتداد ضلع ۱ به این شکل می‌رسیم.



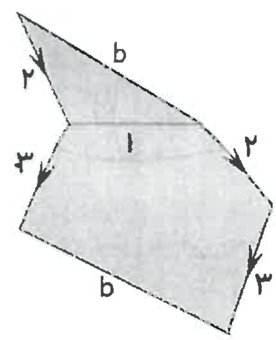
آقای خی: اما با این ضلع چه کاری می‌توان انجام داد؟

آقای سای: به نظر من شش‌ضلعی را در امتداد این ضلع که اسمش را b می‌گذاریم ببریم و باز یادمان باشد که قرار است در نهایت b سر جایش چسبانده شود. به این ترتیب به دو تکه مثل این‌ها می‌رسیم.

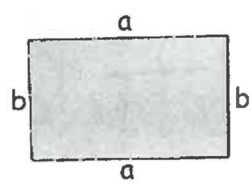


آقای خی: احسنت! نکته اصلی این است که در چهار ضلعی ۱ ها به هم چسبیده هستند ولی به‌جای آن دو تا علامت جدید داریم. پس بهتر است این دو تکه را هم در امتداد ضلع‌های با شماره ۱ به هم بچسبانیم.

حالا شکل جدید به این صورت است.



آرش: حالا دیگر می‌شود این شکل را ساده کرد چون ۲ و ۳ به‌هم متصل هستند، و دو بار با ترتیب متفاوت ظاهر شده‌اند. پس این شکل در واقع معادل یک مستطیل به این صورت است



که a در واقع همان ۲ و ۳ است که پشت سر هم آمده‌اند.

آقای خی: خوب این روش به نظر من خیلی عالی بود. همیشه می‌توانیم از آن استفاده کنیم. یعنی چند ضلعی را ببریم تا دو تکه شود و بعد تکه‌ها را روی یک ضلع مشترکشان به هم بچسبانیم و شکل جدیدی به‌دست بیاوریم.

آقای سای: بریدن و چسباندن این چندضلعی‌ها، اشتهای من را باز کرد! فکر می‌کنم کم‌کم بتوانیم به سمت رستوران حرکت کنیم. در حین غذا خوردن می‌توانیم بحث را ادامه بدهیم. من کاغذ و قلم هم برمی‌دارم ...

محیط نسبتاً خلوت رستوران با دفعه قبل کمی تفاوت داشت. این بار کمی زودتر رسیده بودند و هنوز «وقت ناهار» نبود. با این وجود بحث بین چند نفر سر یکی دیگر از میزها حسابی بالا گرفته بود.

آرش پیشنهاد کرد سر میزی که کنار پنجره بود بنشینند که در عین حال از هوای آزاد هم بهره ببرند.

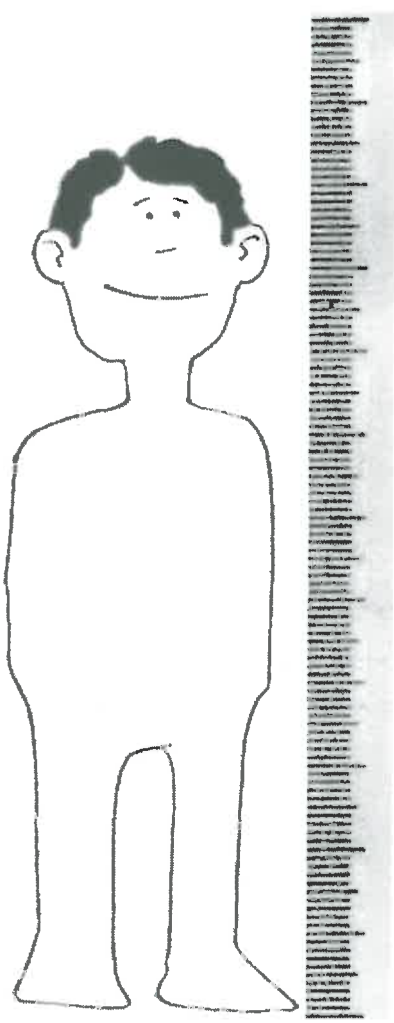
آقای خی گفت: فعلاً بگذارید کمی سالاد بخوریم. ظاهراً کمی زود اینجا رسیدیم.

آقای سای سری به نشانه رضایت تکان داد و فوراً موضوع را عوض کرد ...

مدل‌سازی و پدیده‌های خطی و غیر خطی

بهمن آریا

می‌گویند ریاضیات زبان درک طبیعت و پدیده‌های گوناگون دیگر اعم از فیزیکی، مکانیکی، مهندسی، و اجتماعی است. چگونه به کمک ریاضیات به دنبال شناخت پدیده‌های گوناگون هستیم؟ در هر پدیده کمیت‌های مختلف را شناسایی می‌کنیم و با برقراری رابطه‌هایی بین آنها، آن پدیده را به‌صورت مجموعه‌ای از روابط و معادلات بیان می‌کنیم. این معادلات را اصطلاحاً مدلِ پدیدهٔ مورد نظر می‌نامیم و در واقع برای بررسی پدیدهٔ مورد نظر این روابط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



در مسایل کاربردی مختلف می‌خواهیم رابطه‌ای بین کمیت‌هایی که تغییر می‌کنند برقرار کنیم. مثلاً درجهٔ حرارت شهر تبریز در روزهای مختلف زمستان، و یا طول قدّ یک شخص بر حسب سن او. در زبان ریاضی کمیت‌هایی که تغییر می‌کنند را متغیر و رابطهٔ بین آنها را تابع می‌نامیم. از توابع برای مدل‌سازی روابط بین کمیت‌های مختلف در دنیای واقعی استفاده می‌کنیم.

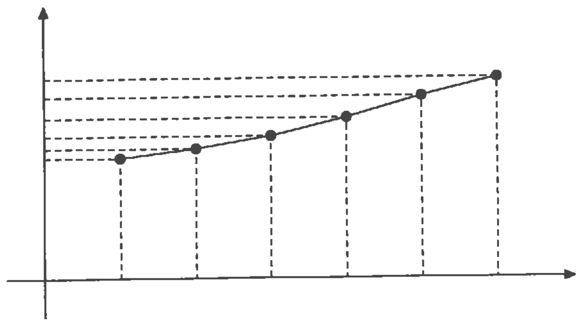
روزبه در اتاق خود در کنار یک خط مدرج، اندازهٔ قد خود را در سال‌های مختلف علامت زده است:

سن روزبه به سال	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
قد روزبه به سانتی‌متر	۱۴۰	۱۴۳	۱۴۷	۱۵۳	۱۶۰	۱۶۶

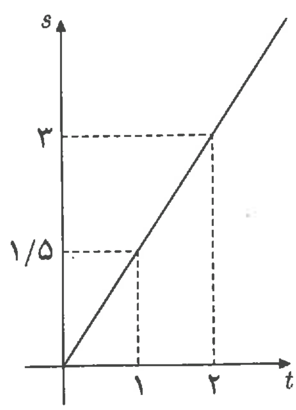
در این مدل دو کمیت قدّ و سن مطرح شده‌اند، در واقع هر چه زمان بگذرد و سن روزبه زیادتر شود، قدّ او نیز افزایش می‌یابد، پس طول قدّ را وابسته به زمان در نظر می‌گیریم و آن‌را متغییر وابسته می‌نامیم، در حالی‌که زمان در اینجا متغیر مستقل است.

به کمک نمودار نیز می‌توانیم تابع فوق را نشان دهیم. دو محور عمود بر هم را در نظر می‌گیریم و با انتخاب یک مقیاس روی محور افقی، نقطه‌هایی متناسب با متغیر مستقل ــ یعنی زمان ــ را در نظر می‌گیریم و آن‌گاه، روی هر خط عمودی‌ای که از هر کدام از این نقطه‌ها می‌گذرد، نقطه‌ای متناسب با قدّ روزبه در آن زمان مشخص می‌کنیم و سپس، نقاط متناظر را پی‌درپی به یک‌دیگر وصل می‌کنیم تانمودار رشد قد روزبه بر حسب افزایش سن او به‌دست آید.

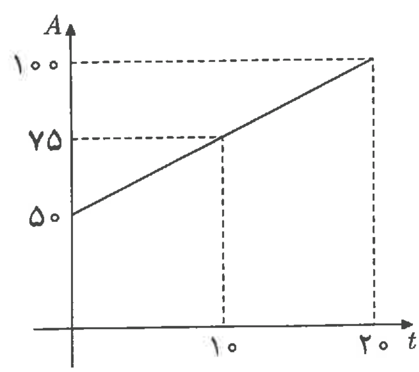
شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۹ـــ۱۵



برای پدیده‌های مختلف نیز می‌توانیم به‌همین ترتیب رابطه‌ای بین یک متغیر x (مثلاً زمان) و تابع $f(x)$ (مثلاً طول قد روزبه) برقرار کنیم و تابع f می‌تواند به عنوان یک مدل وضعیت پدیدهٔ مورد نظر را در گذشته، حال، و یا آینده مشخص کند. در مثال قبلی قد روزبه هر سال به یک نسبت اضافه نمی‌شد ولی ممکن است با پدیده‌هایی مواجه شویم که نرخ تغییرات آنها ثابت باشد مثلاً اگر احمد آقا با ماشین خود با سرعت ثابت ۹۰ کیلومتر در ساعت یا ۱/۵ کیلومتر در دقیقه در حال حرکت باشد، در واقع در هر t دقیقه مسافتی برابر t ۱/۵ طی می‌کند، پس می‌توانیم حرکت او را با $s(t) = ۱/۵t$ مشخص کنیم و نمودار آن در یک دستگاه مختصات به‌صورت زیر است:



در این پدیده نرخ تغییرات ثابت است یعنی در هر دقیقه مسافت ثابت ۱/۵ کیلومتر پیموده می‌شود، این قبیل پدیده‌ها را، پدیده‌های خطی می‌نامیم. احمد آقا در مسیر حرکت خود به بزرگراه امیرکبیر می‌رسد، برای استفاده از بزرگراه امیرکبیر رانندگان باید عوارض پرداخت کنند، ورودی ۵۰ تومان است و به‌ازای هر کیلومتر هم ۲۵ ریال دریافت می‌شود. به‌این ترتیب اگر احمد آقا پس از طی s کیلومتر بخواهد از بزرگراه خارج شود باید مبلغی برابر $۲/۵s + ۵۰$ بپردازد، یعنی عوارض به‌صورت $A(s) = ۵۰ + ۲/۵s$ محاسبه می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است:



در این پدیده نیز نرخ تغییرات ثابت است و لذا از جمله پدیده‌های خطی است.

پدیدهٔ خطی، پدیده‌ای است که دارای نرخ تغییرات ثابت است.

آیا می‌توانید چند پدیدهٔ خطی مثال بزنید؟

آیا فکر می‌کنید که همهٔ پدیده‌ها باید خطی باشند؟ احمد آقا از لحظه‌ای که ماشین او در حالت سکون است و حرکت را شروع می‌کند و تا زمانی‌که به سرعت ثابت ۹۰ کیلومتر در ساعت برسد و یا وقتی که با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت است و ترمز می‌کند تا متوقف شود، دیگر با سرعت ثابتی حرکت نمی‌کند و در واقع حرکت او در این مواقع یک پدیده خطی نیست.

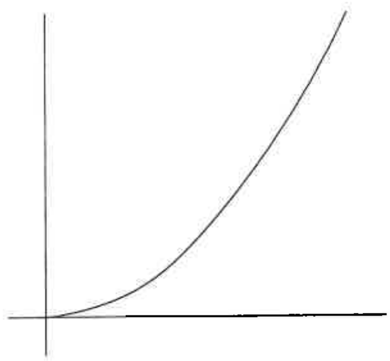
روزبه بعضی وقت‌ها برای مطالعه و سرگرمی به فرهنگ‌سرای خاوران می‌رود، چند مرتبه از تالار فیزیکِ فرهنگ‌سرا بازدید کرده بود و با بعضی از مفاهیم فیزیکی آشنا شده بود و سؤال‌هایی برایش مطرح شده بود. یک روز با دوستش بهداد که ساعت کرنومتر دارد به فکر آزمایشی افتادند. از پنجره‌های پلکان فرهنگ‌سرای خاوران در طبقات مختلف سنگ‌ریزه‌ای را به‌طرف زمین رها می‌کردند و زمانی که سنگ‌ریزه طی می‌کرد تا به زمین برسد را اندازه‌گیری می‌کردند، مشاهده کردند هر یک طبقه‌ای که بالا می‌روند زمان اضافه شده برای رسیدن سنگ‌ریزه به زمین به یک اندازهٔ ثابت اضافه نمی‌شود، چند بار آزمایش را تکرار کردند و دیگر به نتیجه‌های به‌دست آمده اطمینان داشتند ولی نمی‌توانستند مدل حرکت سنگ‌ریزه را پیدا کنند. روزبه می‌گفت حتماً سقوط سنگ‌ریزه یک پدیدهٔ غیرخطی است که نرخ تغییرات آن ثابت نیست ولی بهداد حرف او را خیلی قبول نمی‌کرد. بالاخره پیش آقای بهمن‌آبادی مسؤول تالار فیزیک رفتند و نتایج به‌دست آمده را با او در میان گذاشتند.

ریشه‌های تاریخی تعریف تابع

کلمهٔ «تابع» اول بار در سال ۱۶۹۴ توسط لایب‌نیتز برای بیان کمیتی متناظر با یک خم به کار گرفته شد، سپس در ۱۷۱۸، یوهان برنولی تابع را به‌عنوان عبارتی از ثابتها و متغیرها در نظر گرفت. در همین قرن اویلر، تابع را به‌عنوان معادله‌ای از ثابتها و متغیرها انگاشت و نماد $f(x)$ را که قبلاً توسط کلرو[1] ابداع شده بود، هر چه بیشتر متداول کرد. ولی تعریف تابع به آن‌گونه که تا اوایل قرن گذشته متداول بود را دیریشله عرضه کرد، دیریشله دو متغیر x و y را در نظر گرفت که اگر x تغییر می‌کرد، y نیز به‌عنوان تابعی از آن (تابعی تک‌مقداره) تغییر می‌کرد و هم او بود که مقادیری که x اتخاذ می‌کرد را قلمرو و مقادیر y را برد تابع نامید.
در قرن اخیر با رواج مفهوم مجموعه‌ها و تأثیرگذاری آن روی همهٔ ریاضیات، تابع نیز به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های (یا در حالت کلی n تایی‌های) مرتب در نظر گرفته شد و به‌عنوان یک ابزار مناسب برای مدل‌سازی در قلب ریاضیات جای گرفت.

1) Clairaut

آقای بهمن‌آبادی حرف روزبه را تأیید کرد و گفت در واقع سقوط سنگ‌ریزه یک پدیدهٔ غیرخطی است که فیزیک‌دان‌ها ثابت کرده‌اند مسافت پیموده شده توسط آن پس از t ثانیه از زمان رها شدن برای سقوط آزاد، از رابطهٔ $s(t) = ۴/۹t^۲$ (بر حسب متر) به‌دست می‌آید که نموداری به‌صورت زیر دارد:



که در واقع نیمی از یک سهمی است.

روزبه گفت پس در این پدیدهٔ غیرخطی، سرعت حرکت سنگ‌ریزه ثابت نیست. آقای بهمن‌آبادی پاسخ داد که درست می‌گویی. بهداد پرسید آیا می‌توانیم سرعت سنگ‌ریزه را در هر لحظه مشخص کنیم. آقای بهمن‌آبادی با خوشحالی گفت چه سؤال خوبی کردی! می‌دانید که سرعت متوسط چیست؟ سرعت متوسط، سرعتی است که اگر به‌طور یک‌نواخت با آن سرعت حرکت کنیم، مسافت مورد نظر پیموده می‌شود. مثلاً اگر فاصلهٔ تهران ــ قم که ۱۲۰ کیلومتر است در ۲ ساعت طی شود، سرعت متوسط برابر $\frac{۱۲۰}{۲}$ است.

برای این‌که بتوانیم سرعت لحظه‌ای سنگ‌ریزه در حال سقوط را در ثانیهٔ ۵ ام اندازه بگیریم اول می‌آییم سرعت متوسط آن‌را بین ثانیهٔ ۵ و در نزدیکی آن مثلاً ثانیهٔ ۵/۱ یا ثانیهٔ ۵/۰۱ اندازه می‌گیریم که تقریب خوبی از سرعت لحظه‌ای در ثانیهٔ ۵ ام به‌دست می‌آید و از روی آن‌ها سرعت لحظه‌ای را پیدا می‌کنیم، خوب دقت کنید: در حالت کلی، سرعت لحظه‌ای را بین ثانیهٔ ۵ ام و ثانیهٔ $h + ۵$ پیدا می‌کنیم. مسافت پیموده شده در این h ثانیه عبارت است از $s(۵ + h) - s(۵)$ که اگر آن‌را به h ثانیه تقسیم کنیم سرعت متوسط به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{s(۵+h)-s(۵)}{h} &= \frac{۴/۹(۵+h)^۲ - ۴/۹ \times ۵^۲}{h} \\ &= ۴۹ + ۴/۹h\end{aligned}$$

اگر h را کوچک و کوچک‌تر کنیم داریم:

h	$۴۹ + ۴/۹h$
۰/۱	۴۹/۴۹
۰/۰۱	۴۹/۰۴۹
۰/۰۰۱	۴۹/۰۰۴۹

در واقع سرعت لحظه‌ای وقتی حاصل می‌شود که h هر چقدر که ممکن است کوچک باشد، یعنی در واقع به سمت صفر میل کند.

پس مقدار سرعت لحظه‌ای در ثانیهٔ ۵ ام برابر ۴۹ متر بر ثانیه است. سپس آقای بهمن‌آبادی به آنها گفت که این روش کلی است و می‌توانیم سرعت لحظه‌ای را در هر لحظه‌ای به همین ترتیب اندازه‌گیری کنیم.

پدیده‌های غیرخطی، پدیده‌هایی هستند که نرخ تغییرات غیرثابت دارند.

روزبه و بهداد که در کلاس دوم دبیرستان رشتهٔ ریاضی فیزیک درس می‌خوانند روز بعد با خوشحالی دانسته‌های خود را دربارهٔ پدیده‌های غیرخطی که نرخ تغییرات آن‌ها غیرثابت است سر کلاس برای آقای فرّدانش دبیر ریاضی شرح دادند و از او پرسیدند آیا پدیده‌های غیرخطی فقط عبارت‌های درجه دوم است؟ آقای فرّدانش که از ذوق و علاقه آن‌ها به وجد آمده بود جواب داد که خیر، پدیده‌هایی وجود دارد که به‌صورت توابع کسری بیان می‌شود و یا مثل حرکت‌های دورانی با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند و یا نرخ تغییرات خیلی بالایی دارند که با تابع‌های نمایی بیان می‌شوند. آقای فرّدانش گفت در سال‌های بالاتر با این مطلب آشنا می‌شوند ولی قول داد در جلسات بعدی اگر فرصت باشد در این مورد توضیحات بیشتری برای آن‌ها خواهد داد.

کارگاه

۱) ارزش یک دستگاه کامپیوتر که اکنون ۱۲۰۰۰۰۰ تومان قیمت دارد پس از گذشت ۸ سال به ۲۰۰۰۰۰ تومان کاهش پیدا می‌کند، اگر نرخ تغییرات آن خطی باشد، آن‌گاه

۱ـ تابع خطی $V(t)$ که ارزش کامپیوتر را در هر سال t معین می‌کند به دست آورید.

۲ـ ارزش کامپیوتر پس از گذشت ۵ سال چقدر است؟

۲) از طبقات مختلف یک ساختمان بلند سنگ‌ریزه‌ای به‌طرف زمین رها کنید تا با سقوط آزاد به زمین برسد و مدل غیرخطی $s(t) = ۴/۹t^۲$ را بررسی کنید. آیا می‌توانید هر بار سرعت سنگ‌ریزه را در لحظه‌ای که به زمین می‌رسد پیدا کنید.

مسأله‌های درسی

رؤیا درودی

- ریاضی ۱

۱) هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۳۰}(۵+۲\sqrt{۶})^{۱۵}$$

$$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}+\sqrt{۱۲-۶\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{۲+\sqrt{۱۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۸}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۸}+۵}$$

۲) اگر $A(-۲,۲)$ و $B(۰,۴)$ دو رأس متوالی یک متوازی‌الاضلاع و $P(۴,۶)$ محل تلاقی قطرهای آن باشد مختصات دو رأس دیگر را بیابید.

۳) حاصل عبارت $\frac{a^۲-b^۲-c^۲-۲bc}{a^۲+b^۲-c^۲+۲ab}\div\frac{-a+b+c}{a+b-c}$ چیست؟

۴) اگر $p(x)$ کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت $x^۳-۲x^۲-b^۲x+۲b^۲$ و $x^۳-۲ax^۲-۴x+۸a$ باشد، ریشه‌های معادلهٔ $p(x)=۰$ را بیابید.

- ریاضی ۲

۱) ثابت کنید برای $n\in\mathbb{Z}$، $\lfloor\frac{n}{۲}\rfloor=\frac{n}{۲}+\frac{(-۱)^n-۱}{۴}$.

۲) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k و هر عدد حقیقی x رابطهٔ

$$k[x]\leq[kx]\leq k[x]+k-۱$$

برقرار است و سپس به کمک آن ثابت کنید معادلهٔ $[x]+[۲x]+[۴x]=۱۳$ جواب ندارد و معادلهٔ $[x]+[۲x]+[۴x]=۱۵$ را حل کنید.

۳) اگر $a^۲+b^۲=c^۲$ ثابت کنید.

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=۲(\log_{b+c}a)(\log_{c-b}a)$$

۴) معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۴-\log x=۳\sqrt{\log x}$$

$$۹^{\log_۲^{(x+۱)}}+۹^{\log_۲^{(x+۲)}}+۹^{\log_۲^{(x+۳)}}=۵۰$$

$$۹^x\times۶^{-۲x}=۲^{۳x+۱}$$

- هندسه

۱) در مثلث ABC، AB قطر دایرهٔ محیطی مثلث است. اگر $AB=۱۰cm$ و مساحت مثلث ABC، $۱۰cm^۲$ باشد، محیط این مثلث را بیابید.

۲) دایرهٔ A از مرکز دایرهٔ B می‌گذرد و دایرهٔ B، محیط دایرهٔ A را نصف می‌کند. اگر مساحت دایرهٔ A، π باشد، مساحت قسمت مشترک را محاسبه کنید.

۳) مخروطی با مساحت کل $۴\pi(\sqrt{۵}+۱)$ را درون یک مکعب محاط کرده‌ایم. حجم مکعب را به‌دست آورید.

۴) استوانه‌ای که شعاع قاعده و ارتفاع آن به‌ترتیب ۲ و ۳ می‌باشد درون مخروطی به شعاع قاعدهٔ ۴ محاط شده‌است. طول یال مخروط را بیابید.

- حسابان

۱) هر یک از حدهای زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to۰}(\tan^۲x-\frac{۱}{x^۲})\qquad\lim_{x\to a}\frac{x^{۱۰۰}-a^{۱۰۰}}{x^{۵۰۰}-x^{۱۰۰}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]+[۲x]+\cdots+[nx]}{n^۲}\qquad\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan^۲(x-\frac{\pi}{۴})}{۱-\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})}$$

۲) ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در مبدأ مختصات دارای مینیمم نسبی است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۳) برد تابع $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x+1}$ را به‌کمک مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع در یک دورهٔ متناوب بیابید.

۴) از نقطهٔ $M(x_0,y_0)$ روی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مماسی رسم می‌کنیم که با محورهای مختصات مثلثی با کمترین سطح را تشکیل دهد. این نقطه کدام است و کمترین سطح ممکن چقدر است؟

• جبر و احتمال

۱) از صفحهٔ دایره‌ای به شعاع r نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال آن‌که نقطهٔ انتخاب شده به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد تا به محیط آن، چقدر است؟

۲) یک نقطه به تصادف از درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که فاصلهٔ آن از هر رأس بیشتر از ۱ باشد چیست؟

۳) (الف) باقی‌ماندهٔ تقسیم $2\times 5^{22}-1$ را بر ۳۷ بیابید.

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم $8^{65}-5$ را بر ۱۷ بیابید.

ج) باقی‌ماندهٔ تقسیم $2^{67}-2$ را بر ۲۳ بیابید.

۴) در کیسه‌ای ۱۲ مهره از سه رنگ آبی و سبز و قرمز و به تعداد مساوی از هر رنگ وجود دارد. ۱ مهره از این کیسه خارج می‌کنیم و پس از مشاهدهٔ رنگ آن، مهره را کنار می‌گذاریم و سپس ۲ مهرهٔ دیگر را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که هر سه مهره هم‌رنگ باشند چیست؟

• هندسهٔ تحلیلی

۱) بدون بسط دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha \end{vmatrix} = 0$$

۲) فرض کنید p_1، p_2، …، p_n نقاطی در صفحه باشند و $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $n\times n$ که در آن a_{ij} فاصلهٔ نقطهٔ p_i از نقطهٔ p_j است. نشان دهید که A یک ماتریس متقارن است.

۳) ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx & ny+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴) اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد و $AA^t=0$، نشان دهید که $A=0$.

• حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) کلیهٔ مجانب‌های هر یک از منحنی‌های زیر را بیابید:

$$y=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-4x}{x^2+x-6}} \quad y=Arc\cos\frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$$

$$y=\sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}} \quad y=xArc\cos\frac{1}{x}$$

۲) مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4n} & x=\frac{1}{2n}(n=1,2,3,\ldots) \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2n+1} & x=\frac{1}{2n}(n=1,2,3,\ldots) \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که همیشه $|f(x)|\le x^2$. $f'(0)$ را محاسبه کنید.

۴) نشان دهید تابع زیر روی $\mathbb{R}$ مشتق پیوسته دارد.

$$f(x)=\begin{cases} x^3(2\sqrt{5}+\sin\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

• ریاضیات گسسته

۱) ثابت کنید که دو عدد $a-3$ و a^2-4a+1 یا نسبت به هم اول‌اند یا بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها ۲ است.

۲) ثابت کنید که الف) $(a,b)|(a,bc)$

ب) $(a+2,a)=1$ یا ۲

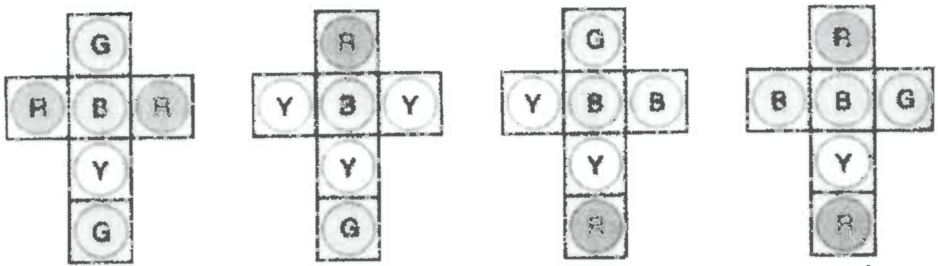
۳) ثابت کنید که عدد $A=10^{6n+2}10^{3n+1}+1$ در ازای هر مقدار n بر ۱۱۱ بخش‌پذیر است و اگر n فرد باشد A بر ۷ و ۱۳ نیز بخش‌پذیر است.

۴) ثابت‌کنید عدد $7^{37}-7$ بر عدد ۲۷۴۱۷۰ بخش‌پذیر است.

چگونه معمای مکعب‌های رنگی را حل کنیم؟

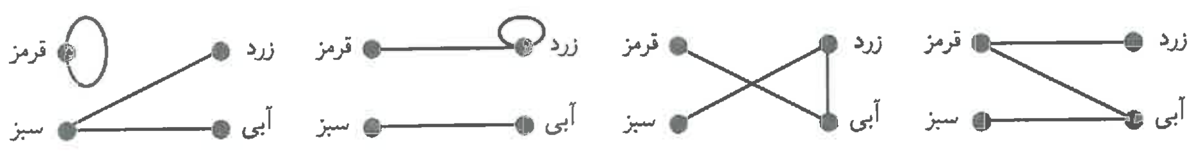
سپیده چمن‌آرا

در شمارهٔ قبل ماهنامه، معمای مکعب‌های رنگی را مطرح کردیم. چهار مکعب داشتیم که وجوه هر یک را با چهار رنگِ قرمز، آبی، سبز و زرد به طریقی که در شکل زیر روی گستردهٔ مکعب‌ها نشان داده شده است، رنگ کردیم.



مکعب ۴ مکعب ۳ مکعب ۲ مکعب ۱

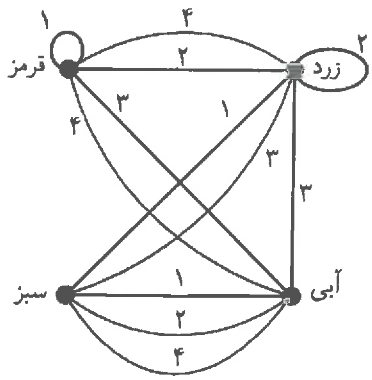
معمای مورد نظر این بود که این چهار مکعب را در یک ردیف پشت سر هم چنان بچینیم که در هر یک از چهار طرفِ مستطیل حاصل، هر چهار رنگ دیده شود. در ضمن دیدیم که با آزمون و خطا به نتیجه نمی‌رسیم! اینک می‌خواهیم با استفاده از گراف، این معما را حل کنیم! می‌دانید که یک گراف، مجموعه‌ای است از نقطه‌ها (به‌نام **رأس**) و پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل کرده‌اند (به نام **یال**). برای این‌که یک گراف به یک رنگی نسبت دهیم، چهار رأس به‌نامِ چهار رنگِ استفاده شده در رنگ‌آمیزی آن روی کاغذ رسم می‌کنیم. سپس دو نقطه را در صورتی با یک یال به هم وصل می‌کنیم که دو وجهِ مقابل در مکعب با آن دو رنگ رنگ‌آمیزی شده باشند. اگر دو وجه مقابل در مکعبی هم‌رنگ باشند، آن رأس را با یک طوقه [1] به خودش وصل می‌کنیم. در شکل زیر، گراف‌های مربوط به چهار مکعبِ معمای مکعب‌های رنگی ترسیم شده است:



از آنجا که هر مکعب دارای سه جفت وجه مقابل است، گراف مرتبط با هر مکعب، دارای سه یال است. برای حل معمای مکعب‌های رنگی، چهار گرافِ مربوط به چهار مکعب را در یک گراف ترکیب می‌کنیم:

۱) loop

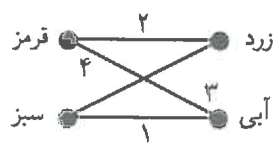
ماهنامه ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۲۴_۲۲

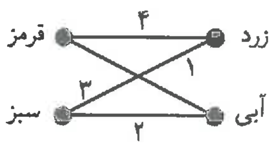


برای این منظور فقط چهار رأس به نام چهار رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی خواهیم داشت که توسط یال‌هایی به هم وصل شده‌اند، روی هر یال شمارهٔ مکعبِ مربوطه را نیز می‌نویسیم. بنابراین گرافِ ترکیبی برای هر چهار مکعب مورد نظر ما به صورت بالا است که از ۴ رأس و ۱۲ یال تشکیل شده است که نشان‌دهندهٔ رنگ‌های ۱۲ جفت وجه مقابل به هم در این چهار است. از آنجا که قرار است مکعب‌ها را در یک ردیف بچینیم، ۸ تا ۱۲ یالِ این گراف، اطلاعات لازم دربارهٔ رنگ‌های هر یک از چهار طرف مستطیلِ حاصل را به ما می‌دهند. اگر این معما جواب داشته باشد (که می‌دانیم دارد!) باید به دنبال یافتن این هشت یال باشیم، که چهار تای آن‌ها مربوط به رنگ‌های وجه‌های بالایی و چهار تای دیگر مربوط به وجه‌های جلویی و عقبی.

برای این منظور دو زیرگراف از این گراف ترکیبی انتخاب می‌کنیم به‌طوری که هر یک شامل چهار رأس و چهار یال بوده و در هر یک، شمارهٔ روی، یال‌ها تکراری نباشد. یعنی هر زیرگراف از هر مکعب، فقط یک یال دارد و در ضمن این دو زیرگراف نباید یال مشترک داشته باشند. هم‌چنین، در هر زیرگراف هر رأس یا باید با یک طوقه به خودش وصل شده باشد یا با یک یال به دو رأس دیگر متصل شده باشد (چرا؟) یافتن این دو زیرگراف کار خیلی مشکلی نیست، فقط نیاز به کمی تفکر دارد.

در شکل‌های زیر، این دو زیرگراف نشان داده شده‌اند.





حال ببینیم با استفاده از این دو زیرگراف، چگونه می‌توانیم معما را حل کنیم. نخست از زیرگرافِ بالایی استفاده کرده و رنگ وجه‌های بالا ــ پایینِ مکعب‌ها را در یک ردیف می‌یابیم، به این ترتیب که مکعب اول را طوری قرار می‌دهیم که زرد، بالا و سبز، پایین باشد. سپس با ادامهٔ دادن یال‌ها و با استفاده از یال شمارهٔ ۲، مکعب دوم را چنان درکنار مکعب اول می‌گذاریم که سبز آن بالا و آبی آن پایین باشد، به همین ترتیب با ادامه دادن یال ها مکعب سوم، با رنگِ آبی در بالا و قرمز در پایین و مکعب چهارم با رنگ قرمز دربالا و آبی در پایین در کنار مکعب‌های قبلی چیده می‌شوند. به این ترتیب، مطمئناً هر یک از چهار رنگ در ردیف بالا و ردیف پایین ظاهر شده‌اند. اما مطمئن نیستیم که آیا ردیف‌های جلو و عقب نیز چنین وضعیتی دارند یا نه؟ اینک با استفاده از یال‌های زیرگراف پایینی، رنگ وجه‌های جلویی و عقبی را با دوران دادنِ مکعب‌ها، مرتب می‌کنیم. با این ترتیب اگر در مکعب اول، رنگ سبز در جلو و آبی در عقب باشد، با ادامه دادن یال‌ها، در مکعب چهارم آبی جلو و قرمز در عقب قرار می‌گیرد و به همین ترتیب با ادامه دادن یال‌ها، در مکعب دوم، قرمز جلو و زرد عقب و در سومی، زرد جلو و سبز در عقب قرار می‌گیرد. به این ترتیب معمای مکعب‌های رنگی حل شد!

اینک برای این‌که درک بهتری از استفاده از گراف در حل این معما پیدا کنید، بد نیست که به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

۱) آیا نام رنگی که به یک رأس می‌دهیم، در گرافی که به یک نسبت می‌دهیم، تأثیری دارد؟ یعنی مثلاً اگر نام قرمز و آبی را در گرافِ مربوط به مکعب ۱، عوض کنیم و پس از آن رأس‌هایی را که رنگ دو وجه مقابل به هم هستند به هم وصل کنیم، آیا همان گراف قبلی را به‌دست می‌آوریم؟

۲) هنگام انتخاب زیرگراف از گرافِ ترکیبی، چگونه یال‌هایی را برای آن انتخاب کردید؟ توضیح دهید که چرا طوقهٔ موجود در گرافِ مکعبِ ۱ که حول رنگ قرمز قرار دارد، به دردِ زیرگرافِ مورد نظر ما نمی‌خورد؟

۳) از زیرگرافِ بالایی برای رنگ وجه‌های بالایی و پایینی جواب معما استفاده کردیم. اگر از این زیرگراف برای رنگ وجه‌های جلو و عقبی مکعب‌های چیده شده در یک ردیف استفاده می‌کردیم، آیا باز هم به جوابی از معما می‌رسیدیم؟ چرا؟

۴) چرا طی کردن یال‌ها به‌صورت پشت سر هم برای درست چیدن مکعب‌ها از روی زیرگراف، مهم است؟ آیا ما سبز — زرد را برای رنگِ بالا و پایین مکعب اول از زیرگرافِ بالایی انتخاب می‌کردیم، رنگ وجه‌های بالا و پایین بقیهٔ مکعب‌ها به چه ترتیبی باید چیده می‌شد؟

۵) آیا می‌توانید معمایی با چهار مکعب و چهار رنگ برای رنگ آمیزی آن طراحی کنید چنان که آن‌ها جواب نداشته باشد؟ کلید طرح چنین معمایی چیست؟

۶) از روی نمایش معمای مکعب‌های رنگی به‌وسیلهٔ گراف مشخص است که این معما فقط یک جواب دارد. توجه کنید که ترتیبِ مکعب‌ها و نیز دورانِ سطوحِ ردیف این مکعب‌ها، جواب جدیدی به ما نمی‌دهد. آیا می‌توانید این معما را جوری اصلاح کنید که دو جواب یا بیشتر داشته باشد؟ کلید یافتن معمایی چند پاسخه از این نوع در چیست؟

حال که روش حل معمای مکعب‌های رنگی به کمک گراف را یاد گرفتید، آیا می‌توانید معمای زیر را حل کنید؟

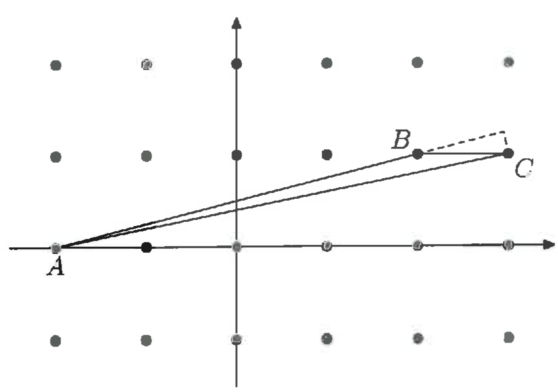
«فرض کنید شش مکعب داریم و شش رنگِ قرمز، سبز، زرد، آبی، نارنجی و صورتی برای رنگ‌آمیزی وجه‌های آن‌ها. اگر شش مکعب را به شش طریق مختلف رنگ‌آمیزی کرده باشیم، به‌طوری‌که هیچ مکعبی دارای وجهی با رنگ تکراری نباشد، چگونه می‌توان آن‌ها را در یک ردیف چید به‌طوری که هر سطح این ردیف، دارای هر شش رنگ باشد؟» پیش از آن بد نیست به این سؤال پاسخ دهید: «به چند طریق می‌توان یک مکعب را با شش رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هیچ دو وجهی دارای رنگ تکراری نباشد؟»

آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۱۳. در صفحهٔ مختصات دکارتی، نقطه‌هایی که مولفه‌های مختصات آن‌ها عددهای صحیح هستند را در نظر بگیرید. اجازه دهید از این به بعد این نقطه‌ها را «نقاط شبکه» بنامیم. این بار قصد دارم به طرح چند مسأله بپردازم که هر یک به نوعی به «نقاط شبکه» ارتباط پیدا می‌کنند.

به‌عنوان یک سؤال ساده بیایید مثلاً بررسی کنیم که مساحت یک مثلث [۱] که رئوسش بین نقاط شبکه باشد[۲]، چقدر می‌تواند کوچک شود؟ روشن است که طول هر ضلع از چنین مثلثی، لااقل برابر با یک واحد است. البته از سوی دیگر، امکان این‌که طول ارتفاع وارد بر یک ضلع، خیلی کوچک شود، وجود دارد. مثلاً مثلث ABC در شکل زیر را در نظر بگیرید.



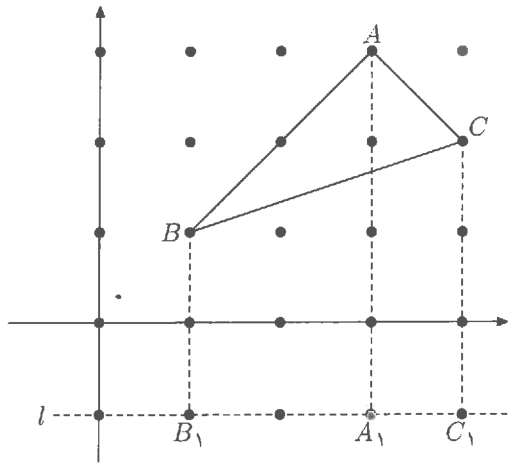
به سادگی دیده می‌شود که اگر طول یکی از ضلع‌های مثلثی، مساوی با یک واحد باشد، مساحت آن، حداقل $\frac{1}{2}$ واحد است. در حقیقت می‌توان ثابت کرد که مساحت هر مثلث با رؤوس بین نقاط شبکه، حداقل $\frac{1}{2}$ است.

تمرین ۱. *ادعای بالا را ثابت کنید!*

(راهنمایی: دو حالت در نظر بگیرید. یکی این‌که حداقل یکی از اضلاع مثلث موازی یکی از محورهای مختصات باشد. در این حالت، ارتفاع وارد بر این ضلع هم، موازی با محور دیگر می‌شود و بنابراین طولش حداقل یک واحد است. حالا از دستور مساحت مثلث که در کودکی آموختید استفاده کنید! حالت دیگر این است که هیچ‌کدام از اضلاع، موازی با هیچ‌کدام از محورهای مختصات نباشند. در این حالت با توجه به شکل زیر (که در آن l خطی موازی محور x است که مثلث را قطع نمی‌کند و از نقطه‌های شبکه هم می‌گذرد):

۱) روشن است که قرار نیست سه رأس یک مثلث روی یک خط واقع شوند! بنابراین مساحت هر مثلث عددی مثبت است.
۲) یعنی رأس‌های آن از بین نقاط شبکه انتخاب شده باشد.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۳۱ـ۲۵



مساحت مثلث ABC را بر حسب مساحت ذوزنقه‌هایی که در شکل دیده می‌شوند بیان کنید (باید به مجموع مساحت‌های دو تا از آن‌ها منهای سومی برسید اما دقت کنید که مساحت ذوزنقهٔ ABB_1A_1، طبق رابطه‌هایی که در کودکی یاد گرفته‌اید، برابر است با $(\frac{AA_1+BB+1}{2}) \times A_1B_1$. طول‌هایی که در این رابطه ظاهر می‌شوند همگی عددهای صحیح‌اند. پس مساحت این ذوزنقه، عددی است به شکل $\frac{m}{2}$، که m یک عدد صحیح و مثبت است با استدلال مشابه در مورد بقیه ذوزنقه‌ها، نهایتاً نتیجه بگیرید که مساحت مثلث ABC هم، به‌صورت $\frac{k}{2}$، که k یک عدد صحیح است، قابل بیان است. ولی چون مساحت ABC مثبت است، $k \neq 1$. یعنی این مساحت حداقل $\frac{1}{2}$ است.)

اگر راه حل شما برای تمرین بالا شبیه به راه حلی که در قالب راهنمایی طرح شده باشد، احتمالاً شما هم خودتان به این نتیجهٔ جالب که از شیوهٔ حل ناشی می‌شود پی برده‌اید: مساحت هر مثلث که رئوسش بین نقاط شبکه باشد، عددی است به شکل $\frac{k}{2}$ که k یک عدد صحیح مثبت است. بنابراین این مقدار می‌تواند $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{2}$،۴ یا $\frac{7}{2}$ باشد ولی هرگز نمی‌تواند $\frac{2}{3}$، یا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد. آدمهای کنجکاو بلافاصله دو سؤال به ذهنشان خطور می‌کند: چه موقع مساحت چنین مثلثی $\frac{1}{2}$ است و چه موقع $\frac{3}{2}$ و ...؛ و آیا در باب چند ضلعی‌های دلخواه که رئوسشان بین نقاط شبکه باشد هم می‌توان از این حرف‌های جالب زد؟!

اجازه دهید قبل از پاسخ دادن به این سؤال‌ها، برایتان یک مسأله طرح کنیم. این مسأله در مسابقهٔ پاتنام [1] سال ۱۹۹۸ مطرح شده است.

تمرین ۲. *فرض کنید ABC مثلثی باشد که رئوسش بین نقاط شبکه است و مساحت آن S. باشد فرض کنید*

$$(AB + BC)^2 < 8S + 1$$

در این‌صورت A، B و C رئوس یک مربع هستند.

(راهنمایی: ابتدا ثابت کنید AB و BC عمودند. برای این کار، از صحیح بودن مقدار $8S$، و نامساوی‌های $8S \leq AB^2 + BC^2 + 4S < 8S + 1$، که خودتان بگویید چرا درست هستند، استفاده کنید. مربع بودن را هم، به‌کمک رابطهٔ $AB^2 + BC^2 = 4S$ بدست بیاورید.)

۱) مسابقات پاتنام (Putnam) هر سال بین دانشجویان ریاضی دورهٔ کارشناسی در آمریکا برگزار می‌شود.

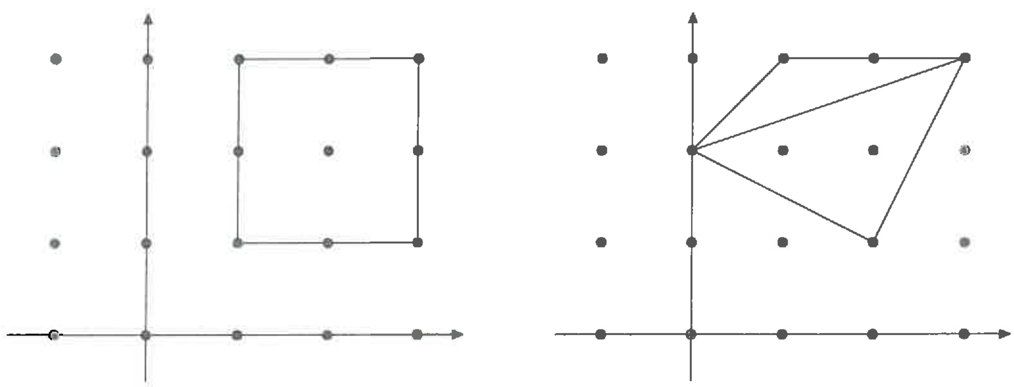
هر دوی این سؤالات، در قالب قضیه‌ای، که پیک [۱]، ریاضیدان اواخر قرن ۱۹، ثابت کرده است، می‌گنجد. بگذارید بدون حاشیه رفتن، قضیهٔ پیک را بیان کنم:

قضیهٔ پیک. فرض کنید رؤوس یک چند ضلعی دلخواه، بین نقاط شبکه باشند و روی ضلع‌های آن p فقط از بین نقاط شبکه یافت شود (که البته رؤوس را هم بین این نقطه‌ها به حساب می‌آوریم). به علاوه، فرض کنید درون سطح چند ضلعی، q نقطه از بین نقاط شبکه وجود داشته باشد. در این صورت مساحت چند ضلعی برابر است با

$$\frac{p}{۲} + q - ۱$$

توجه کنید که چند ضلعی، لزوماً محدب نیست، ولی اضلاعش نباید هم‌دیگر را قطع کنند (مگر در ضلع مجاور، آن هم در رأس مشترکشان!)

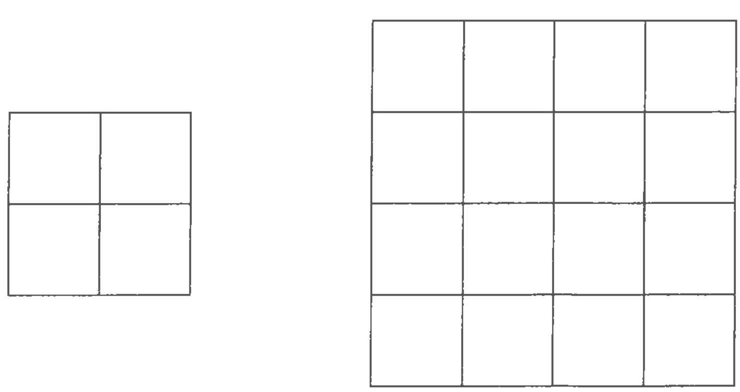
بد نیست به شکل‌های زیر نگاهی بیندازید تا قضیه را بهتر درک کنید



در هر شکل، p و q چه‌قدر هستند؟ مساحت چه‌طور؟

بگذارید قبل از اینکه برایتان شرح دهم که چرا قضیهٔ پیک درست است، شما را مدتی سرگرم یک تمرین کنم!

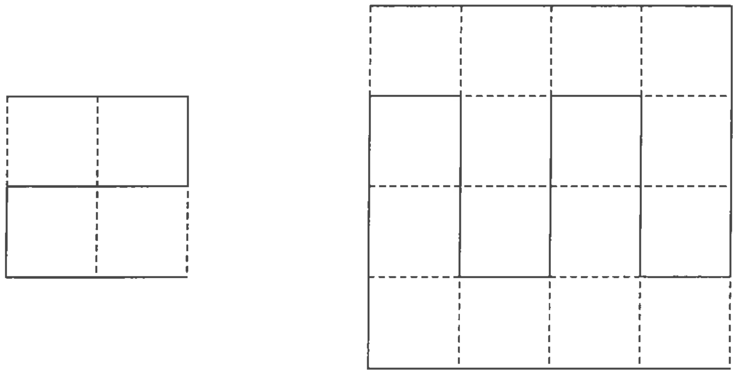
تمرین ۳. *یک مربع به ضلع $۲m$ واحد، شبکه‌بندی شده است (در شکل زیر، این شبکه بندی برای مربع به ضلع ۲ و ۴ نمایش داده شده است.*



و بنابراین سطح آن‌را به $۴m^۲$ مربع کوچک تقسیم می‌کند. حشره‌ای از رأس شمال غربی مربع، آغاز به حرکت می‌کند و روی خطوط

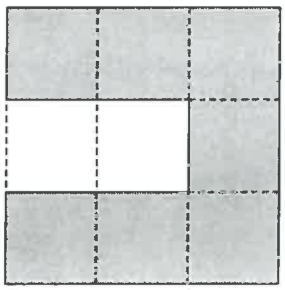
---
۱) Pick

شبکه در مربع راه می‌رود و نهایتاً به رأس جنوب شرقی مربع می‌رسد. فرض کنید بدانیم این حشره، در بین راه، از هر یک از رأس‌های مربع‌های کوچک، دقیقاً یک بار عبور کرده است (نمونه‌هایی از این مسیرهای حرکت، در شکل زیر نمایش داده شده است)



مسیر حرکت حشره، سطح مربع را به دو دسته ناحیه تقسیم می‌کند: ناحیه‌هایی که به یکی از دو ضلع شمالی و شرقی راه دارند، و ناحیه‌هایی که به یکی از دو ضلع جنوبی و غربی راه دارند. ثابت کنید مجموع مساحت‌های هر یک از دوگروه نواحی، با دیگری مساوی است.

(راهنمایی: با افزودن یک «نوار» از مربع‌ها در امتداد ضلع‌های شمالی و شرقی، می‌توان یک قطعه به مسیر حرکت حشره «سرهم بندی کرد» و از ناحیه‌هایی که به آن دو ضلع راه دارند، یک چند ضلعی با رؤوس بین نقاط شبکه ساخت؛ به شکل زیر دقت کنید: چند ضلعی مذکور، با هاشور نشان داده شده است.



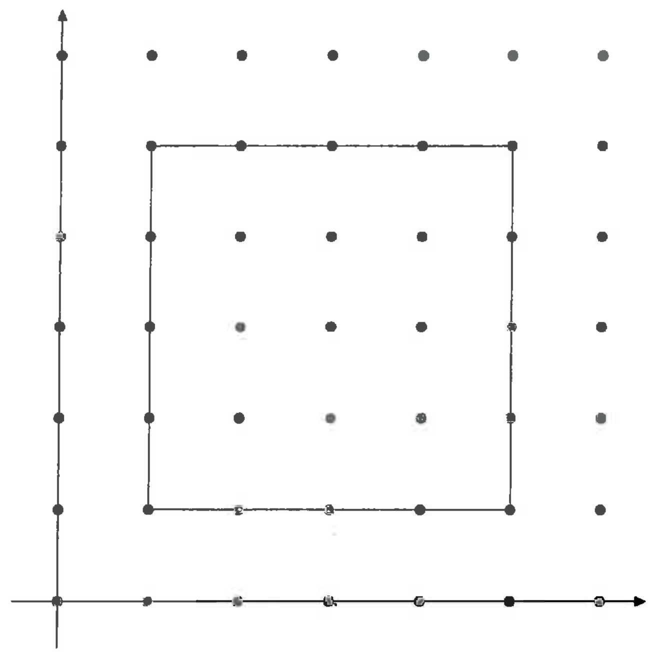
همین کار را برای گروه دوم ناحیه‌ها انجام دهید و نهایتاً از قضیهٔ پیک استفاده کنید.)

اجازه دهید گام به گام به اثبات نزدیک شویم[1].

بیایید قضیهٔ پیک را ابتدا در حالتی خاص، برای مثلثی که تنها نقاط شبکه روی اضلاعش، سه رأسش هستند و درونش هم هیچ نقطه‌ای از شبکه وجود ندارد بررسی کنیم. در این حالت، طبق قضیه، مقدار مساحت این مثلث، باید $\frac{۱}{۲}$ باشد: $\frac{۱}{۲} = ۱ - ۰ + \frac{۳}{۲}$!

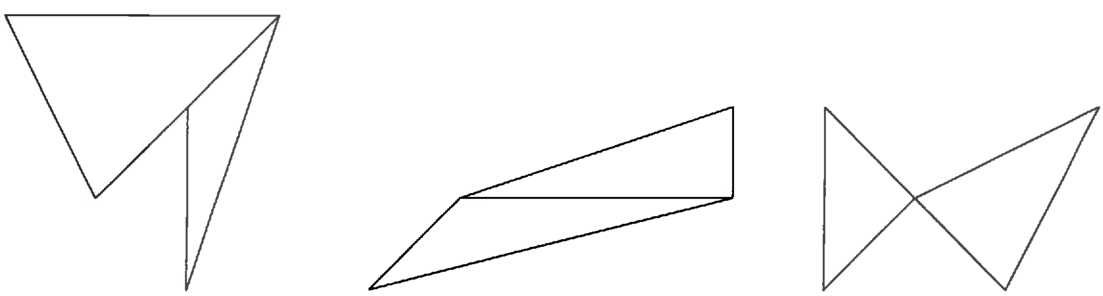
اما اکنون یک مربع دلخواه، با رؤوس بین نقاط شبکه و اضلاع موازی محورهای مختصات، در نظر بگیرید. مثلاً شکل زیر

۱) اندیشه اثبات زیر را از کتاب «ابتکارهایی در ریاضیات»، نوشتهٔ هانسبرگر گرفته‌ام. این کتاب ترجمه شده و توسط مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است. کتابی است به حق خواندنی، که خواندنش را به شما توصیه می‌کنم.



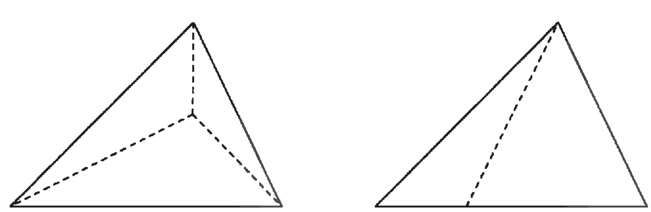
تقریباً روشن است که با رسم پاره خط‌هایی بین نقاط شبکه که داخل و روی اضلاع مربع هستند، می‌شود سطح آن را به مثلث‌ها تجزیه کرد. باز هم تقریباً روشن است که می‌توان طوری عمل کرد که این تجزیه دارای خاصیت‌های زیر باشد:

۱) هر دو مثلث از مثلث‌های این تجزیه، یا با هم اشتراک ندارند، یا تنها در یک رأس مشترک‌اند،و یا این‌که در یک ضلع کاملاً مشترک‌اند (یعنی حالت‌های الف و ب از شکل زیر ممکن هستند ولی پ قابل قبول نیست.



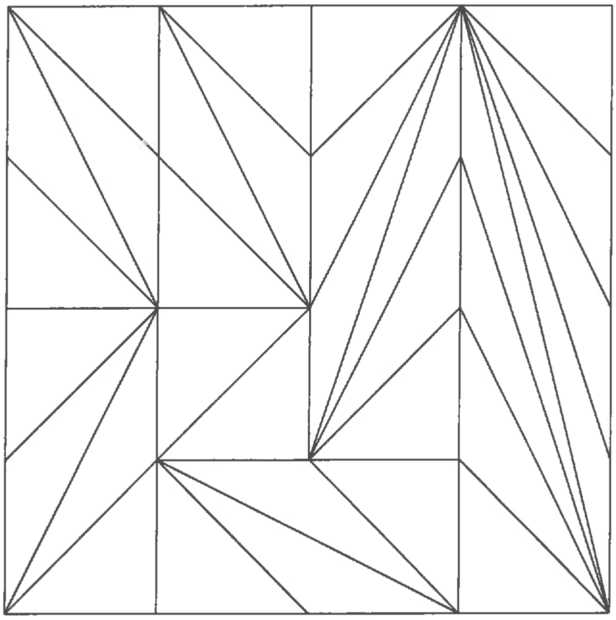
الف ب پ

۲) درون هیچ یک از مثلث‌های این تجزیه، هیچ نقطه‌ای از شبکه وجود ندار؛ تنها نقاط شبکه روی اضلاع این مثلث‌ها هم، رئوسشان هستند. در حقیقت اگر درون یا روی ضلع‌های یکی از این مثلث‌ها در یک «تجزیهٔ ناقص»، نقطه‌ای از شبکه یافت شود، می‌توان با رسم پاره‌خط‌های بیشتری، به تجزیه‌ای رسید که مقدار بیشتری مثلث دارد و در عوض نقطهٔ ذکر شده جزو نقاط «بدی» که خاصیت ii را نقض می‌کنند نیست (شکل را ببینید).



تمرین ۳/۵. چرا این فرایند «تجزیه کردن» و باز هم بیشتر تجزیه کردن» نهایتاً ما را به تجزیه‌ای با خاصیت‌های i و ii می‌رساند؟

یک تجزیه برای مربع ۴ × ۴ ای که انتخاب کرده‌ایم، می‌تواند چنین باشد:



(من خودم این شکل پیچیده را با همان فرایند «تجزیه کردن، و باز هم بیشتر تجزیه کردن» بدست آورده‌ام!)

در شکل بالا ۳۲ مثلث وجود دارد (بشمارید!)، و طبق تمرین ۱، می‌دانیم که مساحت هر کدام از آن‌ها حداقل $\frac{1}{2}$ است. پس مساحت مربع، حداقل $16 = \frac{1}{2} \times 32$ می‌شود، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر مساحت مثلث‌های این تجزیه، همگی برابر با $\frac{1}{2}$ باشد. ولی مساحت هر مربع ۴ × ۴، ۱۶ است؛ پس مثلث‌های شکل بالا، همگی مساحتی برابر با $\frac{1}{2}$ دارند.

اجازه دهید گام بعدی اثبات را در قالب یک تمرین بیان کنم.

تمرین ۴. *ثابت کنید اگر سطح یک چند ضلعی که رئوسش بین نقاط شبکه است را بتوان به طریقی به مثلثهای تجزیه کرد که خاصیت‌های i و ii از تجزیهٔ بالا برای این تجزیه هم درست باشد، در این صورت تعداد این مثلث‌ها دقیقاً $p + 2q - 2$ است که p عده نقطه‌های روی ضلع‌های چند ضلعی است و q عده نقطه‌های درون آن است.*

(راهنمایی. مجموع زاویه‌های هر مثلث، ۱۸۰ درجه است. پس اگر m مثلث در تجزیه پیدا شوند، جمع زاویه‌های آن‌ها، $180m$ است. از طرفی، می‌توان زاویه‌های این مثلث‌ها را به طریق دیگری هم جمع زد: زاویه‌های این مثلث‌ها، حول نقطه‌های شبکه که داخل یا روی ضلع‌های چند ضلعی باشند قرار دارند. جمع زاویه‌هایی که گرداگرد یک نقطهٔ درونی باشند ۳۶۰ درجه است. جمع زاویه‌هایی که گرداگرد نقطه‌ای روی یک ضلع (که رأس چند ضلعی نیست) هستند، ۱۸۰ درجه است. جمع زاویه‌هایی هم که گرداگرد رؤوس چند ضلعی قرار دارند، روی هم رفته، برابر است با جمع زاویه‌های چند ضلعی. از این حقیقت که مجموع زاویه‌های هر n ضلعی، $(n-2) \times 180$ درجه است استفاده کنید و به تساوی که از دو طریق جمع زدن زاویه‌ها ناشی می‌شود برسید، و از اینجا m را بر حسب

q/p محاسبه کنید! اگر نمی‌دانید چرا مجموع زاویه‌های یک n ضلعی، $(n-۲)۱۸۰$ است، تمرین ۴/۵ را هم نگاه کنید!)

تمرین ۴٫۵. نشان دهید مجموع زاویه‌های یک n ضلعی، $۱۸۰(n-۲)$ است.

(راهنمایی. سعی کنید با رسم قطرها، چند ضلعی را به چند ضلعی‌های کوچک‌تر تقسیم کنید و از استقرا استفاده کنید).

در اینجا بد نیست یادآور شوم که اگر بتوانیم حالت‌های خاص قضیهٔ پیک را ثابت کنیم، به کمک تمرین ۴، قضیهٔ پیک در حالت کلی هم به‌راحتی اثبات می‌شود (چرا؟)

اما واقعاً چند قدم کوچک به اثبات این‌که مساحت مثلث‌های خاص ذکر شده (که درونشان نقاط شبکه وجود ندارد و تنها نقاط شبکه روی ضلع‌هایشان هم، رؤوس آن‌ها هستند) $\frac{۱}{۲}$ است، بیشتر باقی نمانده است: کافی است برای هر یک چنین مثلثی، مربع بزرگی روی شبکه در نظر گرفت که این مثلث را در بر بگیرد سپس تجزیه‌ای با خاصیت‌های i و ii برای این مربع یافت، که مثلث ذکر شده هم بین این مثلث‌های تجزیه شده باشد. حالا طبق تمرین ۴، به‌راحتی می‌شود محاسبه کرد که اگر طول ضلع مربع، m واحد باشد، عدهٔ این مثلث‌ها $۲m^۲$ است. پس از یک سو طبق تمرین ۱، مجموع مساحت‌های این $۲m^۲$ مثلث: لااقل $\frac{۱}{۲} \times ۲m^۲$ است و از سوی دیگر مساحت مربع نیز، $m^۲$ است. پس همهٔ مثلث‌های این تجزیه، به‌ویژه آن مثلث خاص، مساحتی برابر با $\frac{۱}{۲}$ دارند.

برخلاف روال گذشته، تعمیم دارم این بار به‌جای نوشتن دو بخش، همین یک بخش را با ذکر یک تمرین دیگر تمام کنم (راستش، گاهی اوقات به نحس بودن عدد ۱۳ اعتقاد پیدا می‌کنم!). مسألهٔ زیر، از بین سؤال‌های مسابقه پانتام سال ۱۹۹۰ انتخاب شده است.

تمرین ۵. *فرض کنید رؤوس یک پنج ضلعی محدب [۱] بین نقطه‌های شبکه باشند. در این‌صورت مساحت این ۵ ضلعی حداقل $\frac{۵}{۲}$ است*

(راهنمایی. دقت کنید که استفادهٔ مستقیم از قضیهٔ پیک، به نتیجه نمی‌رسد زیرا کران بدست آمده،$\frac{۳}{۲} = ۱ - \frac{۵}{۲}$ می‌شود. اما طبق قضیهٔ پیک کافی است ثابت شود درون چند ضلعی، حداقل یک نقطه از شبکه قرار دارد. فرض کنید این گزاره درست نباشد و پنج ضلعی‌های محدبی یافت شوند که درونشان هیچ نقطه‌ای از شبکه یافت می‌شود. چون مقدار مساحت‌های این پنج ضلعی‌ها، به طور کلی، عددهای به صورت $\frac{n}{۲}$ هستند، که n عددی صحیح و مثبت می‌شود یکی از آن‌ها که مساحت‌اش حداقل دو رأس از پنج رأس این پنج ضلعی، دارای این خاصیت هستند که باقیماندهٔ تقسیم مؤلفهٔ اول (و همین طور مؤلفهٔ دوم مختصات آن‌ها) با هم برابر است (چرا؟). این خاصیت، تضمین می‌کند که نقطهٔ وسط پاره خطی که آن دو رأس را به هم مختصات آن‌ها وصل می‌کند، باید خودش بین نقاط شبکه باشد، و بنابراین این نقطه درون پنج ضلعی ذکر شده قرار می‌گیرد، که فرض اولیه را در مورد این پنج ضلعی نقض می‌کند.)

---

۱) یک چند ضلعی، محدب گفته می‌شود هرگاه نقاط هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه روی هر دو ضلع مختلف از چند ضلعی را به هم وصل می‌کند، درون یا روی خود چند ضلعی باشد.

داستان طرح یک مسأله (قسمت اول)

امید نقشینه‌ارجمند

کسانی که با مسایل المپیادی سروکار دارند شاید گاهی با خود فکر کنند که ایده طرح فلان مسأله از کجا آمده است. یا این‌که اصلاً چگونه می‌توان یک مسأله جذاب طرح کرد. هدف از این مقاله بیان چگونگی طرح یکی از منسایل المپیاد ریاضی ایران است.
ترجیح می دهم فعلاً صورت مسأله مذکور را نگویم و داستان را، تا آن‌جا که ذهن یاری می کند، همان‌طور که رُخ داده بیان کنم.

قدم اول

ماجرا از قضیه زیبایی به‌نام قضیه زکندرف (Zeckendorf) شروع شد و من فکر کردم که شاید بتوانم از دل این قضیه، مسأله‌ای بیرون بیاورم. صورت قضیه، که من آن را تحت عنوان مسأله مطرح می‌کنم چنین است.

مسأله ۱. *فرض کنید $F_1 = ۱$، $F_2 = ۲$ و برای هر $n \geq ۱$، $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (به این دنباله، دنباله فیبوناچی می‌گویند). ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت یکتا به‌صورت حاصل جمع تعدادی از اعضای این دنباله نوشت به‌طوری که اولاً هیچ عددی دوبار در این جمع شرکت نکند و ثانیاً هیچ دو عضو با اندیس‌های متوالی هم در این جمع نیامده باشد.*

با توجه به این‌که قرار نیست به اثبات این مسأله بپردازم، اجازه دهید با چند مثال صورت مسأله را روشن‌تر کنم. چند جمله آغازی دنباله فیبوناچی این‌ها هستند.

$$۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, \ldots$$

چند عدد طبیعی را آن‌طور که در مسأله ۱ گفته شده می‌نویسیم.

$$۱ = ۱ = F_1 \ , \ ۲ = ۲ = F_2 \ , \ ۳ = ۳ = F_3 \ , \ ۴ = ۱ + ۳ = F_1 + F_3$$

$$۵ = ۵ = F_4 \ , \ ۶ = ۱ + ۵ = F_1 + F_4 \ , \ ۷ = ۲ + ۵ = F_2 + F_4$$

این روشِ نوشتن را «نمایش در مبنای فیبوناچی» می‌نامیم. برای این‌که ثابت کنید هر عدد طبیعی دست‌کم یک نمایش در مبنای فیبوناچی دارد، می‌توانید از استقرای قوی استفاده کنید. حل این مسأله را به خودتان واگذار می‌کنم.

تکاپو

یک سؤال: چگونه می‌توان در عمل یک عدد را در مبنای فیبوناچی نوشت؟
اثبات مسأله ۱، به احتمال زیاد به حل این سؤال هم کمک می‌کند. فرض کنید فردی یک عدد طبیعی را در مبنای فیبوناچی نوشته ولی قوانین را رعایت نکرده است. یعنی این‌که از بعضی از اعضا بیش از یک بار یا از دو عضو با اندیس‌های متوالی استفاده کرده است.

مکانیک ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۳۶_۳۲

به‌عنوان مثال ۴۵ را به‌صورت زیر نوشته است.

$$۴۵ = ۲ + ۳ + ۳ + ۳ + ۱۳ + ۲۱ = F_۲ + ۳F_۳ + F_۶ + F_۷$$

همان‌طور که می‌بینید در این نمایش از $F_۳$، سه بار استفاده شده و $F_۶$ و $F_۷$، که در نمایش شرکت کرده‌اند اندیس‌های متوالی دارند. می‌خواهیم این نمایش را به نمایشی تبدیل کنیم که قوانین در آن رعایت شده باشد. احتمالاً هر کسی در قدم اول سراغ $F_۷$ و $F_۶$ می‌رود و به‌جای آن می‌نویسد $F_۸$. یعنی

$$۴۵ = F_۲ + ۳F_۳ + F_۸$$

ولی چگونه از شر $۳F_۳$ خلاص شویم؟ چه‌طور است که به‌جای یکی از $F_۳$ ها بنویسیم $F_۱ + F_۲$ و به این‌صورت ادامه دهیم.

$$۲F_۳ = F_۳ + F_۳ = F_۱ + F_۲ + F_۳ = F_۱ + F_۴$$

و لذا داریم

$$۴۵ = F_۲ + F_۳ + ۲F_۳ + F_۸ = F_۲ + F_۳ + F_۱ + F_۴ + F_۸$$

$$= F_۱ + F_۲ + F_۳ + F_۴ + F_۸$$

وای! خواستیم چشمش را درست کنیم ابرویش را ... ببخشید، برعکس! چهار اندیس متوالی درست شد. ولی خوب بیایید ادامه دهیم. به چند طریق می‌توان کار را ادامه داد. من یکی از این روش‌ها را پی می‌گیرم.

$$۴۵ = F_۱ + F_۲ + (F_۳ + F_۴) + F_۸ = (F_۱ + F_۲) + F_۵ + F_۸ = F_۳ + F_۵ + F_۸$$

عالی شد! به نمایش ۴۵ در مبنای فیبوناچی رسیدیم. ولی آیا شانس یار ما بود و یا این‌که این دست و پا زدن‌ها همیشه منجر به نتیجه می‌شود؟

نگاهی دقیق‌تر

بهتر است قبل از این‌که به بررسی سؤال بپردازیم، «دست و پازدن» ها را به‌طور دقیق مشخص کنیم. در دو حال ما باید نمایش را اصلاح کنیم. یکی وقتی‌که عبارتی به‌صورت $F_n + F_{n+۱}$ وجود داشته باشد و دیگر هنگامی که عبارت به‌صورت $۲F_n$ داشته باشیم (و البته حالت‌هایی نظیر $۳F_n + ۲F_{n+۱}$ و یا $۵F_n$ نیز حالت‌های خاص این دو وضعیت محسوب می‌شوند). تقریباً روشن که در هر کدام از این دو وضعیت چه‌کاری باید انجام داد. به‌جای $F_n + F_{n+۱}$، بنویسیم $F_{n+۲}$ و به‌جای $۲F_n$ بنویسیم $F_{n-۲} + F_{n+۱}$، زیرا $۲F_n = F_n + F_n = F_{n-۲} + F_{n-۱} + F_n = F_{n-۲} + F_{n+۱}$. البته تبدیل دوم در صورتی با معنی است که $n \geq ۳$. پس باید برای حالت‌های $۲F_۱$ و $۲F_۲$ تبدیل‌های دیگری پیدا کنیم:

$$۲F_۲ = ۲ \times ۲ = ۴ = ۱ + ۳ = F_۱ + F_۳$$
$$۲F_۱ = ۲ \times ۱ = ۲ = F_۲$$

اکنون «دست و پا زدن» ها مشخص شده است. فرض می‌کنیم عدد a به‌صورت حاصل جمع تعدادی از اعضای دنباله فیبوناچی نوشته شده باشد. تبدیل‌های زیر را، مادامی که دو قانون ذکر شده رعایت نشده‌اند روی مجموع اعمال می‌کنیم.

تبدیل ۱) برای $n \geq ۱$ $\quad F_n + F_{n+۱} \longrightarrow F_{n+۲}$

تبدیل ۲) برای $n \geq ۳$ $\quad ۲F_n \longrightarrow F_{n-۲} + F_{n+۱}$

تبدیل ۳) $۲F_۱ \longrightarrow F_۲$

تبدیل ۴) $۲F_۲ \longrightarrow F_۱ + F_۳$

توجه کنید که در هر مرحله ممکن است بیش از یک تبدیل قابل انجام باشد و اگر هیچ تبدیلی قابل انجام نباشد نمایش فیبوناچی عدد a را به دست آورده‌ایم.

سؤالی که پرسیدیم این بود که آیا با انجام دادن این تبدیل‌ها لزوماً به مرحله‌ای می‌رسیم که دیگر تبدیلی ممکن نباشد و لذا نمایش فیبوناچی به‌دست آید و یا این‌که امکان دارد تا ابد مشغول باشیم؟!

قبل از این‌که به جواب این سؤال بپردازیم می‌خواهم حقیقتی را به شما بگویم.

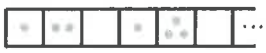
گزاره ۱ . *فرض کنید با یک مجموع از اعداد دنباله فیبوناچی آغاز کنیم و از دو راه مختلف با انجام تبدیل‌ها پیش برویم و از هر دو مسیر به حالتی برسیم که دیگر تبدیلی قابل انجام نباشد. در انتهای هر دو مسیر به یک چیز رسیده‌ایم. چرا؟ زیرا چیزی که به آن رسیده‌ایم نمایش یک عدد در مبنای فیبوناچی است و طبق آن‌چه در مسأله ۱ گفته شده، این نمایش یکتاست.*

اکنون اسکلت‌بندی مسأله ساخته شده است.

ظاهر سازی!

فکر می‌کنم اگر از ایده‌های گفته شده مسأله‌ای بسازیم که اسمی از دنبالهٔ فیبوناچی در آن آمده باشد همه چیز به‌راحتی لو خواهد رفت و لذا باید ظاهر کار را عوض کنیم!

یک جدول نامتناهی در نظر بگیرید به‌طوری که از سمت چپ ابتدا داشته باشد. می‌توانید برای سادگی خانه‌های آن‌را ۱، ۲، ۳ و ... شماره‌گذاری کنید. فرض کنید تعدادی مهره در خانه‌های آن قرار داده‌ایم. تعداد کل مهره‌ها متناهی است و احتمال دارد در بعضی از خانه‌ها بیش از یک مهره وجود داشته باشد.



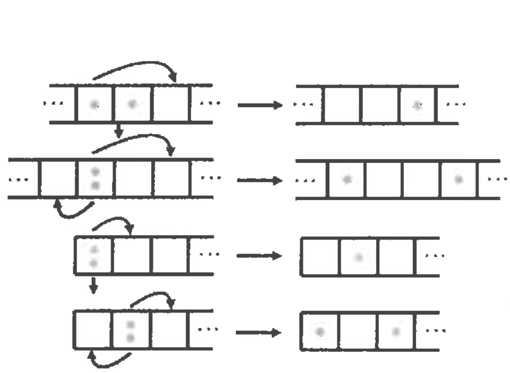
در هر مرحله می‌توانیم در صورت امکان یکی از حرکات زیر را انجام دهیم.

حرکت ۱) دو مهره در دو خانه متوالی را انتخاب کرده، سمت چپی را دو خانه به جلو ببریم و سمت راستی را حذف کنیم.

حرکت ۲) دو مهره هم‌خانه را که در یکی از خانه‌ها غیر از دو خانه اول قرار دارند را یکی، یک قدم به راست و یکی را دو قدم به چپ حرکت دهیم.

حرکت ۳) دو مهره از خانه اول را برداریم و به‌جای آن یک مهره در خانه دوم بگذاریم.

حرکت ۴) دو مهره از خانه دوم را برداریم و در خانه‌های اول و سوم بگذاریم.



اگر از ابتدا مقاله را خوانده باشید به‌راحتی فهمیده‌اید که این ۴ نوع حرکت از کجا آمده‌اند.

طرح مسأله

اولین مسأله‌ای که به ذهن رسید، مسأله زیر بود.

مسأله ۲. *با شروع از هر وضعیتی با انجام حرکاتی که ذکر شد عاقبت به وضعیتی می‌رسیم که دیگر هیچ حرکتی قابل انجام نیست. وضعیت نهایی به‌طور یکتا از روی وضعیت اولیه مشخص می‌شود و ارتباطی با ترتیب انجام حرکات ندارد.*

حل. قسمت اول را با استقرا روی تعداد مهره‌ها حل می‌کنیم. واضح است که اگر تعداد مهره‌ها یک باشد در همان ابتدا هیچ حرکتی نمی‌توان انجام داد. اکنون فرض کنید حکم برای n مهره درست باشد. $n+۱$ مهره در خانه گذاشته‌ایم و مشغول بازی هستیم. اگر در یکی از مراحل، حرکتی از نوع اول یا سوم را انجام دهیم، تعداد مهره‌ها یکی کم می‌شود و طبق فرض استقرا بازی بالاخره پایان خواهد یافت.

پس اگر یک بازی بی‌پایان ممکن باشد، نباید هیچ‌گاه از حرکات نوع اول و سوم استفاده شود. در این‌صورت توجه کنید که با انجام حرکات نوع دوم و چهارم همیشه یک مهره به سمت چپ می‌رود و لذا کوچک‌ترین عددی که دست کم یک مهره در خانه به آن شماره وجود دارد در هر مرحله یا کم می‌شود و یا تغییر نمی‌کند. این عدد، که عددی طبیعی است در یکی از مراحل کم‌ترین مقدار را در بین کل مراحل دارد. پس از این مرحله مهره‌های درون چپ‌ترین خانه شامل مهره، دیگر حرکت نخواهند کرد. پس می‌توان فرض کرد که یکی از این مهره‌ها اصلاً جزء بازی نیست و به نوعی، بازی با n مهره انجام می‌شود و باز هم طبق فرض استقرا بازی نمی‌تواند تا ابد ادامه داشته باشد. ∎

اما **قسمت دوم** مسأله، همان است که در گزاره دوم گفته شد.

برای این‌که ایده طرح مسأله بعدی روشن شود باید نوعی «تابع انرژی» تعریف کنیم. فرض کنید در خانه n ام a_n مهره وجود داشته باشد. در این صورت هر وضعیت، با دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی یعنی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مشخص می‌شود که تنها متناهی تا از اعضای آن ناصفرند. این دنباله را برای سادگی با A نمایش می‌دهیم.

تابع V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$V(A)=V(a_۱,a_۲,a_۳,\dots)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_nF_n$$

که F_n، عضو n ام دنباله فیبوناچی است که در ابتدای مقاله تعریف شد. توجه کنید که سیگمای سمت راست در واقع یک مجموع متناهی است زیرا تنها تعداد متناهی از جمله‌های آن ناصفر هستند.

گزاره ۲. *اگر با انجام یکی از حرکات از حالت A به حالت A' برسیم آن‌گاه $V(A)=V(A')$.*

گمان کنم درستی گزاره ۲ برای شما روشن باشد. کافی است به این توجه کنید که روی چه حسابی ۴ حرکت مذکور را تعریف کردیم.

به تابع V، اصطلاحاً تابع انرژی می‌گوییم که به هر حالت یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. در این حالت قانون بقای انرژی برقرار است!

خوب! این تابع به چه درد می‌خورد؟ فرض کنید انرژی دو حالت مساوی نباشد. در این صورت نمی‌توان با انجام حرکات مجاز در بازی، از یکی به دیگری رسید. همین مطلب ساده، ایده طرح مسأله بعدی است.

مسأله ۳. *فرض کنید در هر یک از خانه‌های ۱ تا n، یک مهره قرار داده‌ایم. نشان دهید با انجام حرکات مجاز در بازی هیچ‌گاه مهره‌ای به خانه‌های بعد از خانه $n+1$ام نمی‌رود.*

حل. با توجه به این‌که دنباله فیبوناچی نامنفی و صعودی است کافی است که ثابت کنیم برای هر n،

$$V(\underbrace{1,\dots,1}_{\text{تا } n},0,\dots) \overset{?}{<} (\underbrace{0,\dots,0}_{\text{تا } n+1},1,0,\dots)$$

و این یعنی این‌که

$$F_1+F_2+\cdots+F_n \overset{?}{<} F_{n+2}$$

این را هم با استقراء به‌راحتی می‌توان ثابت کرد (خودتان اثبات را کامل کنید). بد نیست به‌عنوان تفنن این را هم نشان دهید که

$$F_1+F_2+\cdots+F_n = F_{n+2}-2$$

مرحله نهایی

چهار نوع حرکتی که تعریف کرده‌ایم کمی صورت مسأله را شلوغ کرده‌اند. آیا بهتر نیست از دو حرکت آخر صرف‌نظر کنیم؟ در این‌صورت چه چیزهایی را از دست خواهیم داد؟ واضح است که باز هم هر دنباله‌ای از حرکات پایان خواهد یافت ولی دیگر لزومی ندارد وضعیت نهایی، وضعیتی یکتا و مستقل از ترتیب انجام حرکات باشد. خودتان سعی کنید با یک مثال این مطلب را نشان دهید. پس قسمت دوم مسأله ۲ دیگر درست نیست ولی خوش‌بختانه مسأله ۳ هم‌چنان به قوت خود باقی است.

مسأله‌ای که طی این ماجرا ساخته شد، مسألهٔ ششم نوزدهمین المپیاد ریاضی داخلی ایران (بهار ۱۳۸۰) است.

یک نکته مهم

بیش‌تر مطالبی که در بالا گفتم حاصل یک کار دونفره بود که در گفتگوهایی که بین من و دوست عزیزم کسری علیشاهی انجام شده بود به ثمر نشست.

قسمت دوم این مقاله مربوط است به پس از تصحیح برگه‌های بچه‌های شرکت کننده در المپیاد.

پس ادامه دارد ...

مسأله‌های المپیادی

علی شوریده

۷-۱) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $۲^{\frac{۱}{۲}} \cdots (۲^n)^{\frac{۱}{۲^n}} < ۴$.

۷-۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AC = CB)$ نقطه O مرکز دایره محاطی و I مرکز دایره محیطی است و D روی BC طوری قرار دارد که خط‌های OD و BI بر هم عمود هستند. ثابت کنید ID و AC موازی‌اند.

۷-۳) دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ با $a_۱ = ۱$ و

$$a_{n+۱} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n} \qquad (n \geq ۱)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید برای $n \geq ۴$ داریم $\lfloor a_n^۲ \rfloor = n$.

۷-۴) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، عددهای طبیعی فرد x و y وجود دارند که

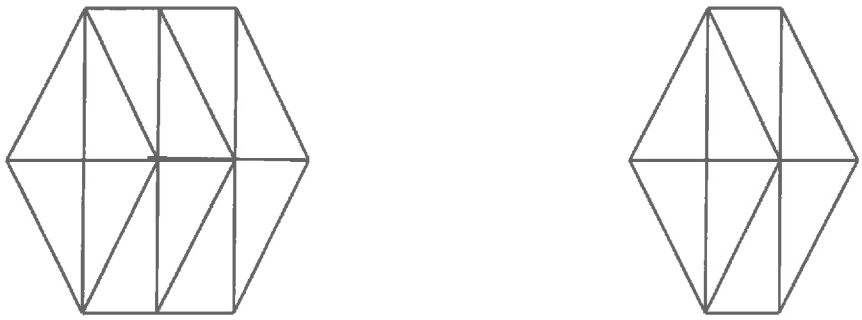
$$۷x^۲ + y^۲ = ۲^n.$$

فیبوناچی شمردن یاد می‌گیرد!

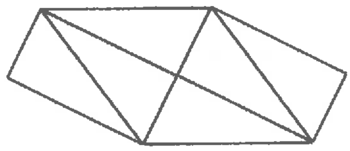
حل مسأله‌های المپیادی (۵)

علی شوریده

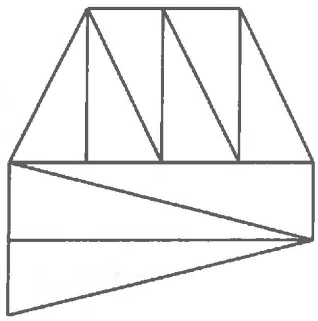
۵-۱) اگر $n = ۴k$ به شکل زیر شش ضلعی‌ها را می‌سازیم. مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند.



اگر $n = ۴k + ۲$ به این‌صورت



و اگر $n = ۲k + ۱$ که $k \geq ۳$، مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که یک ساق آن k برابر ساق دیگر باشد.



۵-۲) تعداد ارقام ۱۰^n در بسط مبنای m برابر است با $\lceil n \log_m ۱۰ \rceil$. (چرا؟)

مکتوبه دیفرانسیل شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۳۹ـ۳۸

حال فرض کنید

$$\lceil m\log_{۵} ۱۰\rceil = \lceil n\log_{۲} ۱۰\rceil$$

چون $\log_{۲} ۱۰$ و $\log_{۵} ۱۰$ هر دو گنگ هستند در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که وجود دارد k به‌طوری که

$$\frac{k}{m} < \log_{۵} ۱۰ < \frac{k+۱}{m}, \frac{k}{n} < \log_{۲} ۱۰ < \frac{k+۱}{n}$$

در نتیجه $\frac{n}{k+۱} < \log ۲ < \frac{n}{k}, \frac{m}{k+۱} < \log ۵ < \frac{m}{k}$ و لذا $\frac{m+n}{k+۱} < ۱ < \frac{m+n}{k}$

پس برای هر دو مقدار طبیعی m و n

$$\lceil m\log_{۵} ۱۰\rceil \neq \lceil n\log_{۲} ۱۰\rceil$$

حال برای هر مقدار $n > ۱$ فرض کنید در دو بازهٔ $[(n-۱)\log ۲ \ , \ n\log ۲]$ و $[(n-۱)\log ۵ \ , \ n\log ۵]$ هیچ عدد صحیحی وجود نداشته باشد. در این‌صورت t و m ای وجود دارد که

$$\frac{m}{n-۱} < \log ۲ < \frac{m+۱}{n} \quad و \quad \frac{t}{n-۱} < \log ۵ < \frac{m+۱}{n}$$

که تناقض است. (چرا؟) پس مثلاً در بازهٔ $[(n-۱)\log ۲ \ , \ n\log ۲]$ عددی صحیحی مثل k یافت می‌شود در نتیجه $(n-۱)\log ۲ < k < n\log ۲$، یعنی $n-۱ < k\log_{۲} ۱۰ < n$، در نتیجه $n = \lceil k\log_{۲} ۱۰\rceil$ و حکم ثابت می‌شود.

۵-۳) ابتدا می‌گوییم $-۱ \notin M$. چرا که اگر ۱- عضوی از M باشد $۱ = (-۱) \times (-۱)$ نیز عضوی از M خواهد بود (طبق شرط ۱) و این در تناقض با شرط ۲ است. حال اگر $a \in M$ و $n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه یکی از دو عدد $\frac{a}{n}$ و $\frac{-a}{n}$ باید در M باشد. طبق شرط ۱، $\frac{a}{n}$ باید عضو M باشد (چرا؟). حال اگر $a = \frac{-p}{q} \in M$ که در آن $p \ , \ q > ۰$، آن‌گاه طبق آن‌چه گفته شد $\frac{qa}{p} \in M$ فلذا $-۱ \in M$ که تناقض است. پس هر عدد گویای مثبت در M است و هیچ عدد گویای منفی نیز در M نیست.

۵-۴) داریم $\widehat{E'NF} = \widehat{ENF'}$ (چرا؟). لذا $\widehat{MNF} = \widehat{MNE}$ در نتیجه $\widehat{EO_{۲}F} = \widehat{EO_{۱}F}$ و لذا $EFO_{۲}O_{۱}$ محاطی است و در نتیجه

$$\widehat{MFE} = \widehat{MO_{۲}O_{۱}} = \widehat{MFN} \Longrightarrow \widehat{MFB} = \widehat{FMN} \Longrightarrow MB = FN$$

به همین ترتیب $MA = NE$. در نتیجه

$$AB = NF + NE$$

استاد ابوالقاسم قربانی

شکل مغنی

استاد ابوالقاسم قربانی

مقصود از «شکل مغنی» در مثلثات مسطحه قضیهٔ زیر است:

قضیه ۱. *در هر مثلث ABC اگر اضلاع روبه‌رو به زوایای A و B و C را به‌ترتیب a و b و c بنامیم رابطهٔ زیر برقرار است:*

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

این قضیه را ریاضیدانان دورهٔ اسلامی بعد از اثبات «شکل مغنی» در مثلثات کروی، ثابت کرده‌اند. مدارک موجود نشان می‌دهد که **بیرونی** از استاد خود **ابو نصر عراق** پرسیده بود که آیا «شکل مغنی» که در مثلثات کروی ثابت شده است دربارهٔ مثلثات مسطحه هم صحت دارد یا نه؟ و **ابو نصر عراق** در رسالهٔ «المسائل الهندسیه» [1] جواب او را داده و نوشته است که جواب این سؤال مثبت است. و آن‌را ثابت کرده و برای اثبات آن دو حالت تمیز داده است. اول آن‌که یکی از زوایای مثلث قائمه باشد و دوم حالت کلی. سپس بیرونی خود درکتاب «قانون مسعودی» قضیه را به‌وجه بسیار جالب توجهی به ثبوت رسانیده است.

در اینجا ابتدا عین جواب **ابونصر عراق** را به بیرونی و ترجمهٔ فارسی آن، و همچنین استدلال ابونصر را بر قضیهٔ فوق از رسالهٔ «المسائل الهندسیه» و سپس استدلال بیرونی را از کتاب «قانون مسعودی» نقل می‌کنم تا هم برهان آن و هم تاریخچهٔ آن در اختیار خوانندگان کتاب حاضر باشد.

ابونصر عراق مسألهٔ دوازدهم از رسالهٔ «المسائل الهندسیه» (ص ۱۵) را چنین شروع کرده است:

«لما تحققت فی‌المثلثات الکائنه علی سطح الکره من دوائرها العظام ان نسبه جیب احد اضلاعه الی جیب الضلع الثانی کنسبه جیب الزاویه التی تقابل الضلع الاول الی جیب الزاویه التی تقابل الضلع الثانی، سألت هل هذا الحکم عام لجمیع المثلثات اعنی الکائنه من القسی و الکائنه من الخطوط المستقیمه، و جوابنا فی ذلک نعم».

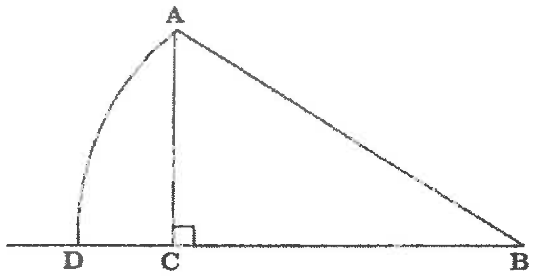
یعنی: «پس از آن‌که ثابت کردم که، در مثلث‌هایی که بر سطح کره از تقاطع دایره‌های عظیمه پدید می‌آیند، نسبت جیب هر یک از اضلاع به جیب ضلع دوم مساوی است با نسبت جیب زاویهٔ روبه‌روی ضلع اول به جیب زاویهٔ رو به روی ضلع دوم، سؤال کردی که آیا این حکم برای همهٔ مثلث‌ها اعم از مثلث‌های کروی و مثلث‌های که اضلاع آنها خطوط راست هستند درست است یا نه. جواب ما به این سؤال مثبت است.»

برهان ابونصر عراق بر شکل مغنی در مثلثات مسطحه ــ سپس ابونصر عراق قضیهٔ مذکور را در رسالهٔ «المسائل الهندسیه» (ص ۱۶) چنین ثابت کرده است:

---

۱) «رسالهٔ المسائل الهندسیه» رسالهٔ دهم از مجموعهٔ «رسائل ابی نصر ... الی البیرونی» است که در سال ۱۳۶۶ هجری قمری در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و دارای ۲۱ صفحه و مشتمل بر ۱۵ قضیهٔ هندسی است.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۴۵ــ۴۱



شکل۱

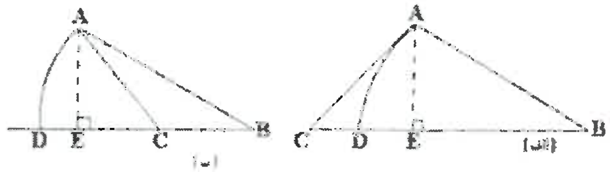
اولاً فرض می‌کنیم که زاویهٔ C از مثلث ABC قائمه باشد و به مرکز B و به شعاع AB کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. در این صورت واضح است که AC جیب [۱] کمان AD از دایرهٔ مرسوم است و از طرف دیگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی B مساوی است با اندازهٔ کمان AD. پس در دایرهٔ مذکور:

$$\text{جیب}\ \widehat{B} = AC$$

از طرف دیگر در همان دایرهٔ مرسوم جیب زاویهٔ قائمه C مساوی است با شعاع AB. بنابراین داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ قائمه}\ C}{\text{جیب زاویه}\ B}$$

و قضیه ثابت است.



شکل۲

ثانیاً فرض می‌کنیم که زاویهٔ C قائمه نباشد. باز به مرکز B و به شعاع BA کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در نقطهٔ D قطع کند (شکل ۲ الف و ب) و از نقطهٔ A عمود AE را بر خط BC فرود می‌آوریم. در این‌صورت بنابه حالت اول در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEB داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\text{جیب زاویهٔ قائمه}\ E}{\text{جیب زاویهٔ}\ B}$$

و نیز در مثلث قائم‌الزاویه ACE بنابه حالت اول داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ}\ ACE = \text{جیب زاویهٔ}\ ACB}{\text{جیب زاویهٔ قائمه}\ E}$$

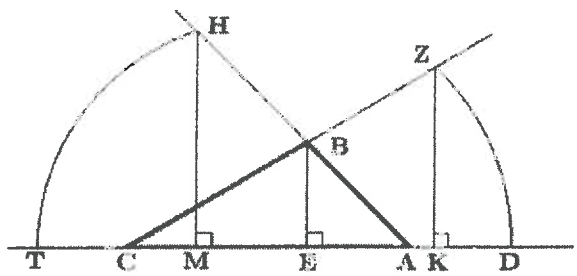
و چون این دو تساوی را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ}\ C}{\text{جیب زاویهٔ}\ B}$$

و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

۱) جیب یک کمان مانند AD برابر است با نیمهٔ وتر رسم شده از دو سر دو برابر آن کمان.

برهان بیرونی بر شکل مغنی در مثلثات مسطحه ــ بیرونی این قضیه را در باب هشتم از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» به ثبوت رسانیده و روش وی چنان‌که دیده می‌شود بسیار بدیع و ساده است. همین روش را **خواجه‌نصیرالدین طوسی** در کتاب «کشف‌القناع» آورده ولی از مخترع آن سخن نگفته است.



شکل۳

مثلث ABC را در نظرگرفته اضلاع BC و CA و AB را به‌ترتیب a و b و c می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم که مثلاً:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$$

مطابق با شکل ۳ به مرکز A و به شعاع واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خطوط راست AB و AC را به ترتیب در نقاط H و T قطع کند. همچنین به مرکز C و به شعاع واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خطوط راست CB و CA را به‌ترتیب در نقاط Z و D قطع کند. و از Z و H عمودهای ZK و HM را بر خط راست AC فرود می‌آوریم. واضح است که:

اندازهٔ کمان HT = اندازهٔ زاویهٔ A از مثلث ABC

و جیب زاویهٔ BAC = HM

و اندازهٔ کمان DZ = اندازهٔ زاویهٔ C از مثلث ABC

و جیب زاویهٔ ACB = ZK.

اکنون عمود BE را از نقطهٔ B بر AC فرود می‌آوریم. دو مثلث ABE و AHM متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AH}{HM} \qquad (1)$$

همچنین دو مثلث CBE و CZK متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BE}{BC}=\frac{ZK}{ZC} \qquad (2)$$

اکنون تساوی‌های (۱) و (۲) را عضو به عضو درهم ضرب می‌کنیم، چون AH و CZ مساوی با واحد هستند، حاصل می‌شود:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{ZK}{HM}=\frac{\text{جیب زاویهٔ } C}{\text{جیب زاویهٔ } A}$$

و قضیه ثابت است.

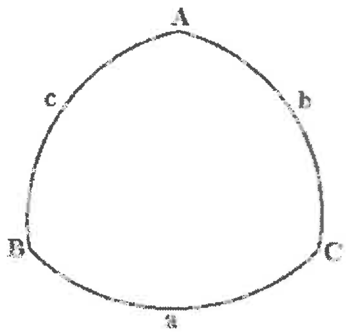
حکم شکل مغنی در مثلثات کروی ــ مقصود از «شکل مغنی» در مثلثات کروی قضیهٔ زیر است:

قضیه ۲. *در هر مثلث کروی جیب‌های اضلاع با جیبهای زوایای روبه‌روی آن‌ها متناسب‌اند.*[1] *یعنی اگر مثلث کروی ABC را در نظرگرفته (شکل ۴) و اضلاع روبه‌رو به زوایای A و B و C را به ترتیب a و b و c بنامیم داریم:*

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

۱) ابونصر عراق در رسالهٔ «القسی الفلکیه» (ص ۳) عنوان این قضیه را چنین بیان کرده است:

«اذ کان علی سطح کره مثلث اضلاعه من اعظم الدوائر الدوائرالواقعه علیها فان جیوب تلک الاضلاع مع جیوب القسی التی بمقدار الزوایا التی توتّر فی‌المثلث متناسبه»



شکل ۴

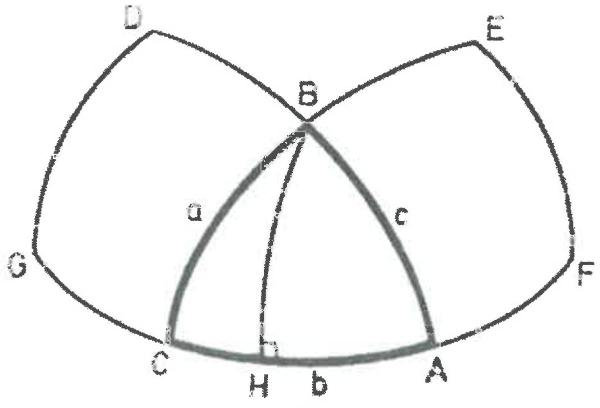
برهان بیرونی بر شکل مغنی ــ بیرونی قضیهٔ فوق را در کتاب «قانون مسعودی» (ص ۳۵۵) با روشی شبیه آنچه در مورد مثلث مسطح گفتم ثابت کرده و حکم قضیه را چنین بیان کرده است:

«ثم نقول ان الامر فی المثلثات الکائنه من قسی دوایر عظام مشاکل لما قدمناه فی المثلثات المستقیمه‌الاضلاع، و ذلک ان جیوب اضلاع هذه القسی تتناسب کتناسب جیوب الزوایا التی تقابلها کل واحد لنظیره».

و اینک برهان او: مثلث کروی ABC را در نظر گرفته (شکل ۵)، اضلاع آن را که کمان‌های دایرهٔ عظیمه هستند a و b و c می‌نامیم می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

کمان AB را از طرف B تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم تا کمان AD ربع دایره شود به همین قسم کمان CB را از طرف B تا نقطهٔ E ادامه می‌دهیم تا کمان CE ربع دایره شود.



شکل ۵

همچنین کمان AC را از دو طرف ادامه می‌دهیم تا کمان‌های CAF و ACG ربع دایره شوند و از نقاط E و F یک کمان از دایرهٔ عظیمه و همچنین از نقاط D و G یک کمان از دایرهٔ عظیمه می‌گذرانیم. واضح است که:

$$\text{اندازهٔ کمان } GD = \text{اندازهٔ } A$$

$$\text{اندازهٔ کمان } EF = \text{اندازهٔ } C$$

از نقطهٔ B کمان دایرهٔ عظیمهٔ BH را بر $\widehat{AC}$ عمود می‌کنیم. نظر به قضیهٔ مقدماتی (رجوع کنید به همین کتاب، صفحهٔ ۲۱۸ قسمت ۷.۸۵) داریم:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BH}}=\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}}$$

و همچنین داریم:

$$\frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

چون دو تساوی فوق را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}} \times \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

اما چون کمان‌های AD و EC ربع دایره هستند سینوس آن‌ها مساوی با واحد است. از طرف دیگر واضح است که $\sin \widehat{EF} = \sin C$ و $\sin \widehat{DG} = \sin A$ پس تساوی فوق چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

یعنی

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

و یا

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

و تساوی $\frac{\sin b}{\sin B}$ با هر یک از نسبت‌های فوق به همین طریق ثابت می‌شود.

● این مطلب برگرفته از کتاب تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی اثر استاد ابوالقاسم قربانی است که آن را مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۷۴ منتشر کرده است.

با عرض معذرت

در دومین مسألهٔ جایزه‌دار شمارهٔ قبل، A_{k+2} را به A_{k+1} تبدیل کنید.

نامه‌ها ...

جواب‌های رسیده به مسأله‌های جایزه‌دار

برای دو مسألهٔ جایزه‌دار شمارهٔ پنجم تعدادی راه‌حل صحیح از طرف علاقه‌مندان حل مسأله به دفتر ماهنامه رسیده است، برگزیدگانی که راه حل‌های صحیح ارایه داده‌اند به قرار زیر هستند.

مسألهٔ ۵ ــ ۱.

- احسان نقشینه ارجمند از دبیرستان شهید اژه‌ای اصفهان

مسألهٔ ۵ ــ ۲.

- الهام امیری مقدم از دبیرستان فرزانگان مشهد
- یلدا محسن‌زاده از دبیرستان فرزانگان مشهد
- عباس محرابیان از دبیرستان علامه حلی تهران

ضمن آرزوی موفقیت برای این دانش‌آموزان، هدایایی از طرف ماهنامه برای آنان ارسال می‌گردد.

ضمناً، نامه‌های دوستان زیر نیز به‌دست ما رسیده است. از آن‌ها متشکریم و از نظرات و انتقادات و مطالبشان استفاده خواهیم کرد.

- اکبر عنبرجعفری (کرج)
- احسان نقشینه‌ارجمند (اصفهان)
- زینب رضوانی (کاشان)
- محسن انواری (شیراز)

آقای معین احمدی (از تهران).

نامه‌های شما را دریافت کردیم. یکی از اهداف مهم ماهنامهٔ ریاضیات، فعال کردن دانش‌آموزان و چاپ مقاله‌های آنان است. مطالبی که شما فرستاده‌اید، صرفاً جنبهٔ صورت مسأله، یا حتی یک حدس را دارند و هیچ اثبات یا توضیحی به همراه ندارند که قابل ارایه در ماهنامه باشد. مطالبی که در این ماهنامه برای چاپ انتخاب می‌شوند باید حتماً دارای عنوان مناسب، ذکر نام مراجع و منابع استفاده شده، متن و رسم‌الخط صحیح و ... باشند. منتظر مطالب شما هستیم.

خانم مریم سیری (از کاشان).

از نامهٔ شما متشکریم. لازم به توضیح است که اثبات ارایه شده در نامهٔ شما برای قضیهٔ فیثاغورس، پیش از این در کتاب‌ها و مجلات دیگر (از جمله کتابِ اثبات بدون کلام، نوشتهٔ راجر ب. نِلسَن، انتشارات فاطمی، صفحهٔ ۲) به چاپ رسیده است و اثبات جدیدی نمی‌باشد. منتظر مطالب و نامه‌های دیگر شما هستیم.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۷
(دی ۱۳۸۰) صص ۴۶ـ۴۶

ماهنامهٔ ریاضیات

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

ماهنامهٔ ریاضیات

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۱۸۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

مسأله‌های جایزه‌دار!

در این شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. منتظر دریافت راه‌حل‌های شما هستیم تا به راه‌حل‌های برگزیده، جوایز ارزنده‌ای اهدا شود.

۱) ده نقطه در فضا داریم. بعضی از پاره‌خط‌های واصل این نقاط را قرمز می‌کنیم، بعضی را آبی و می‌توانیم بعضی را هم رنگ نکنیم. حداقل چندتا از پاره‌خط‌ها رنگ نشوند تا یک مثلث با سه ضلع هم‌رنگ پدید آید؟

۲) یک چندضلعی محدب در مربعی قرار دارد. اگر ضلع مربع را واحد فرض کنیم، ثابت کنید مجموع مربعات اضلاع چندضلعی از ۴ تجاوز نمی‌کند.

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

محل فروش :
روزنامه فروشی ها و کتاب فروشی های معتبر سراسر کشور

نشانی : تهران ، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵

تلفن : ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)

دورنگار : ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)

پست الکترونیک : math@schoolnet.sharif.ac.ir