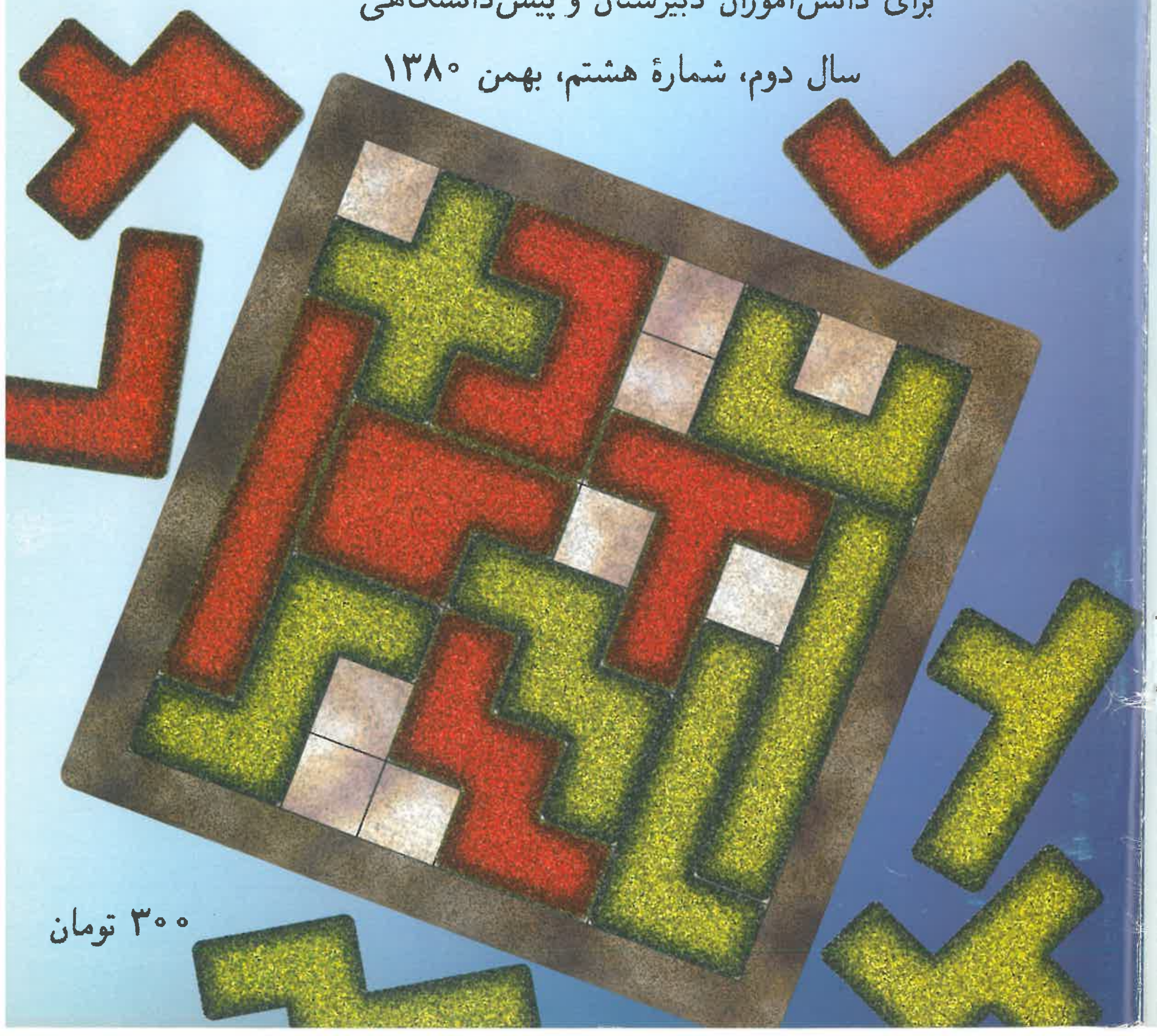
ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ هشتم، بهمن ۱۳۸۰



۳۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات مهندسی

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ هشتم، بهمن ۱۳۸۰

نشانی پستی ماهنامه

تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵

تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)

نمابر: ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: نگاه کنید به

بازی «صفحه‌رو پرکن!»

طرح: امید نقشینه‌ارجمند

یادداشت

به جای «یادداشت» این شماره، قسمتی از کتاب دفاعیهٔ یک ریاضیدان اثر پرآوازهٔ گ.ه. هاردی[1] ریاضیدان شهیر انگلیسی اوایل قرن بیستم نقل می شود. هاردی در زمینهٔ نظریهٔ اعداد کار می‌کرد و رامانوجان[2] ریاضیدان هندی که تحصیلات کلاسیک نداشت را او کشف کرد. هاردی به شدت طرفدار ریاضیات محض بود و در واقع به این‌که دستاوردهای او در نظریهٔ اعداد، هیچ کاربردی ندارد و کاملاً نظری بوده به شدت می‌بالید، غافل از آن‌که همان دستاوردهای محض اکنون-برای رمز نگاری در شبکه‌های مخابراتی کاربرد یافته است! خواندن بخش کوچکی از کتاب هاردی خالی از لطف نیست. این بخش، از ترجمهٔ سیامک کاظمی از کتاب دفاعیهٔ یک ریاضیدان در سال ۱۳۷۲ توسط انتشارات علمی فرهنگی منتشر گردید نقل می‌شود.

ریاضیدان، مانند نقاش یا شاعر، نقشه‌پرداز است؛ ولی نقش‌های او ماندگارترند، چون از ایده ساخته می‌شوند. نقاش نقش‌های خود را با شکل و رنگ می‌سازد و شاعر با کلام. تابلو نقاشی ممکن است «ایده»ای را مجسم کند، ولی این ایده معمولاً پیش پا افتاده وکم اهمیت است. در شعر ایده‌ها بیش‌تر به حساب می‌آیند، ولی همچنان‌که هاوسمن با تأکید می‌گفت، در اهمیت ایده در شعر مبالغه می‌شود: «نمی‌توانم قبول کنم که چیزی به نام ایدهٔ شعری وجود دارد. شعر آن چیزی نیست که گفته می‌شود، بلکه شیوه‌ای است برای گفتن آن چیز».

گلیم بخت کسی را که بافتند سیاه

به آب زمزم و کوثر سفید نتوان کرد[3]

آیا این شعر زیبا نیست؟ و در عین حال، آیا ایده‌هایش نازل و دروغین نیستند؟ ظاهراً فقر ایده تأثیر چندانی بر زیبایی نقش لفظی ندارد. ولی ریاضیدان ابزارکاری در دست ندارد مگر ایده، و بنابر این، نقش‌های او احتمالاً بیش‌تر می‌پایند، زیرا ایده دیرتر از کلمه کهنه می‌شود.

نقش‌های ریاضیدان، همچون نقش‌های نقاش و شاعر، باید زیبا باشند. ایده‌های ریاضی باید هم‌چون رنگ‌های نقاشی یا واژه‌های شعر به‌گونه‌ای هماهنگ به هم بپیوندند. نخستین محک، زیبایی است. ریاضیات زشت در این جهان ماندگار نیست. در این‌جا باید دربارهٔ سوءتفاهمی صحبت کنم که هنوز هم رایج است (گرچه، احتمالاً کم‌تر از بیست سال پیش)، و وایتهد آن را «خرافهٔ فاضلانه» نامیده است؛ این سوءتفاهم که عشق به ریاضیات و درک زیبایی آن «نوعی جنون است، منحصر به معدودی افراد غیرعادی در هر نسل.»

امروزه مشکل می‌توان فرد تحصیل‌کرده‌ای یافت که جاذبهٔ زیبایی‌شناختی ریاضیات را إصلاً حس نکند. ممکن است تعریف زیبایی ریاضی بسیار دشوار باشد، ولی تعریف هر نوع زیبایی همین‌طور است. ممکن است دقیقاً ندانیم که منظورمان از شعر زیبا چیست، ولی این دلیل نمی‌شود که شعر زیبا را هنگام خواندن تشخیص ندهیم. حتی پرفسور هاگبن[4] که می‌خواهد به هر قیمتی اهمیت جنبهٔ زیبایی شناختن ریاضی را به حداقل برساند، جرأت ندارد واقعیت وجود آن‌را انکار کند: «مسلماً افرادی هستند که ریاضیات برای آنها جاذبهٔ بی‌روح و سردی دارد . . . جاذبهٔ زیبایی شناختی ریاضیات ممکن است برای عدهٔ معدودی بسیار واقعی باشد.» ولی، به‌نظر او، عده «معدود»ند و احساس

1) Godfrey H. Hardy 2) Ramanujan 4)Hogben

۳) برای این‌که نظر نویسنده بهتر القا شود، شعر فارسی آورده شد ـ م.

نشر ریاضی شمارهٔ ۸ (بهمن ۱۳۷۵) صفحهٔ ۲ـ۴

«سردی» دارند (و آدم‌های واقعاً مضحکی هستند که از هوای تازهٔ فضاهای باز و وسیع صرف‌نظر کرده، به شهرک‌های مزخرف دانشگاهی پناه برده‌اند.) او در این‌جا همان «خرافهٔ فاضلانه»ای را که وایتهد می‌گوید تکرار می‌کند.

واقعیت این است که تنها معدودی از رشته‌ها «عامه‌پسند»تر از ریاضی هستند. بیش‌تر مردم همان‌طور که از یک آهنگ دل‌پذیرتر لذت می‌برند، زیبایی ریاضی را نیز درک می‌کنند؛ و احتمالاً تعداد دلبستگان ریاضی بیش‌تر از دوستداران موسیقی است. اگر ظواهر امر برخلاف این حکم می‌کند، دلایل ساده‌ای دارد. با موسیقی می‌توان احساسات جمع را برانگیخت، ولی با ریاضی نمی‌توان، و ناتوانی در درک موسیقی در نظر عامه (به‌حق) یک امتیاز منفی محسوب می‌شود، در حالی‌که بیشتر مردم طوری از نام ریاضیات می‌ترسند که حاضرند خیلی ساده در کُندذهنی خود در ریاضیات مبالغه کنند.

با اندکی تأمل روشن می‌شود که «خرافهٔ فاضلانه» نامعقول است. در هر کشور متمدن، انبوهی شطرنج باز وجود دارد ـ در روسیه تقریباً تمامی مردم تحصیل‌کرده شطرنج بازی می‌کنند ـ و هر بازی‌کن شطرنج می‌تواند یک بازی یا مسألهٔ «زیبا» را تشخیص دهد و درک کند. ولی مسألهٔ شطرنج چیزی **نیست** به‌جز تمرینی در ریاضیات محض (البته بازی شطرنج، که در آن دو شطرنج‌باز با یکدیگر مقابله می‌کنند، به علت این‌که عوامل روانی هم در آن دخالت دارند، کاملاً ریاضی نیست)، و هر کسی که یک مسئلهٔ شطرنج را «زیبا» می‌نامد، در واقع از زیبایی ریاضی تمجید می‌کند، گیرم این زیبایی از نوع نسبتاً نازلی باشد.

همین امر را می‌توان در سطحی پایین‌تر، اما در مورد جمعیتی بیش‌تر از بازی‌های دیگر دریافت، و اگر از آن‌هم پایین‌تر بیاییم، از بخش معما در روزنامه‌های پرفروش. محبوبیت زیاد این‌گونه بازی‌ها در حکم ستایشی است از قدرت جاذبهٔ ریاضیات مقدماتی، و بهترین طراحان معما، به‌ندرت از چیزی دیگر استفاده می‌کنند. آن‌ها حرفهٔ خود را می‌شناسند؛ چیزی که مردم می‌خواهند، «تلنگر»ی است که به ذهن زده شود و هیچ چیزی نمی‌تواند به‌خوبی ریاضیات این‌کار را انجام دهد.

اضافه می‌کنم که هیچ چیزی در دنیا، حتی برای افراد مشهور (و افرادی که به زبان تحقیرآمیزی دربارهٔ ریاضیات سخن گفته‌اند)، دل‌پذیرتر از کشف یا کشف دوبارهٔ یک قضیه ناب ریاضی نیست.

گزارش

جایگاه ریاضیات و همایش بزرگداشت استاد ابوالقاسم قربانی

همایش جایگاه ریاضیات (بزرگداشت استاد ابوالقاسم قربانی) در روزهای چهارم و پنجم دی‌ماه در تالار علامه امینی دانشگاه تهران برگزار شد.

این همایش با حضور ریاضی‌دانان و محققین و از سوی مؤسسهٔ توسعهٔ دانش و پژوهش ایران، انجمن ریاضی ایران، وزارت آموزش و پرورش، دانشگاه تهران و دانشگاه الزهرا برگزار شد.

دکتر مهدی بهزاد، استاد دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و رئیس انجمن ریاضی ایران، هدف از این همایش را بحث و تبادل‌نظر ریاضی‌دانان، محققان و علاقه‌مندان به علوم ریاضی پیرامون زندگی و آثار علمی استاد ابوالقاسم قربانی و خدمات ارزشمند این استاد گرانقدر به جامعهٔ ریاضی کشور و هم‌چنین جایگاه ریاضی در ایران دانست.

در این همایش ۱۵ نفر از ریاضی‌دانان و محققان با ارایهٔ مقاله پیرامون زندگی استاد قربانی سخنرانی کردند. مقالات ارایه شده در این همایش، پیرامون آثار استاد در کتاب‌های درسی، آثار استاد در زمینهٔ تاریخ ریاضی کشور و جایگاه ریاضی در ایران با برشمردن اهمیت علم ریاضی در ایران و اسلام بود.

در این مراسم، دکتر حبیبی رئیس بنیاد ایران‌شناسی و مرتضی حاجی، وزیر آموزش و پرورش نیز حضور داشتند. دکتر حبیبی در این مراسم گفتند: شایسته است شخصیت آقای قربانی از وجوه و جهات گوناگون علمی، اخلاقی و رفتاری شناسانده شود تا مطالبی از این دست خود به‌صورت منبعی برای تاریخ علم و ادب کشور درآید و هرچه بیشتر و بهتر آثار مفاخر علمی، فرهنگی و اجتماعی ما را به جامعه و تاریخ بشناساند. وی کارها و فعالیت‌های علمی استاد قربانی را شامل کتاب‌های درسی، زندگی‌نامه‌ها و تحقیق در

آثار و احوال برخی از ریاضی‌دانان بزرگ ذکر کرد.

استاد ابوالقاسم قربانی از سال ۱۳۳۱ تا سال ۱۳۴۵ به‌همراه استاد حسن صفاری، تألیف کتب درسی ریاضی دورهٔ دبیرستان را برعهده داشتند. از جمله تألیفات و پژوهش‌های علمی استاد عبارتند از:

ریاضی‌دانان ایرانی از خوارزمی تا ابن‌سینا، کاشانی‌نامه، نسوی‌نامه، بیرونی‌نامه، تحریر استخراج‌الاوتاد، فارسی‌نامه، بوزجانی‌نامه، تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی و زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ یازده هجری.

کتاب «زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان» حاوی زندگی‌نامهٔ ۱۶۷ ریاضی‌دان است که پس از چاپ، زندگی‌نامهٔ سه ریاضی‌دان دیگر هم بر آن افزوده شد.

در حاشیهٔ این همایش نمایشگاهی از آثار و تألیفات استاد در زمینه‌های ریاضیات نیز برپا شد. علاوه بر این در همایش جایزه‌ای به نام استاد ابوالقاسم قربانی از سوی شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران برای ارج نهادن به خدمات گرانبهای ایشان و جاودانه ساختن یاد این استاد بزرگ پیشنهاد شد. این جایزه برابر ضوابطی که انجمن تصویب خواهد کرد در همایش‌های دوسالانهٔ تاریخ و فلسفه ریاضیات به بهترین مقالهٔ تاریخ ریاضیات اهدا خواهد شد.

عنوان سخنرانی‌های این همایش به شرح زیر بودند:

مهندس منوچهر قربانی (قرائت اشعاری از استاد)،
مهندس مرتضی حاجی (ضرورت توجه به معلمان ریاضی کشور)،
دکتر غلامعلی حدادعادل (استاد قربانی و جایگاه ریاضیات)،
پرویز شهریاری (استاد قربانی و تدوین کتب درسی ریاضی و پژوهش‌های ایشان در تاریخ ریاضیات)،
دکتر مهدی بهزاد (جایگاه ریاضیات)،
عبدالحسین مصحفی (طبع همت‌یار و دقت‌مدار آقای قربانی)،
دکتر احمد شرف‌الدین (قربانی ـ صفاری = عشق عمیق به معلمی)،
دکتر آقایان چاوشی (آیینه‌های سوزان از نظر ابوالوفای جوزجانی)،
دکتر جواد بهبودیان (نقش تاریخ علوم ریاضی از نظر آموزشی)،
غلامرضا عسجدی (یادی از یادها)،
دکتر بهمن مهری (قضیهٔ دوجمله‌ای در ریاضیات اسلامی)،
دکتر علیرضا ذکایی (وضعیت آموزش ریاضی در مقطع متوسطه)،
دکتر ابراهیم اسرافیلیان (چرا دانشمندی مانند قدیم نداریم)،
دکتر رجبعلی‌پور (ریاضیات محض و کاربردی در عصر طلایی اسلامی)،
هادی ضیایی (بررسی آثار قربانی در تاریخ ریاضیات و نقش بنیادی آن در تاریخ علم ریاضی)،
ابراهیم ریحانی (تاریخ ریاضیات و آموزش ریاضی).

غلط‌نامهٔ شمارهٔ ۷

لطفاً غلط‌های زیر را اصلاح کنید.

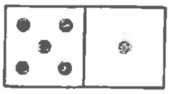
صفحهٔ ۵، سطر آخر جدول، به‌جای آلمان، قرار دهید کوبا، و به‌جای عدد ۱۴، عدد ۲۶ را بنویسید.

صفحهٔ ۶، شکل ۲، نمودار سهمی را به‌اندازهٔ یک واحد بالاتر رسم کنید.

صفحهٔ ۹، انتهای سطر ۱۱، به‌جای $y = x^2$ قرار دهید $y = ax^2$.

دومینو، سه‌مینو، چهارمینو، پنج‌مینو!!

سپیده چمن‌آرا ، مانی رضائی


شکل ۱. یک دومینو

شاید با **دومینوها**[1] آشنا باشید، مهره‌هایی مستطیلی به شکل روبه‌رو که از دو مربع هم اندازه تشکیل شده‌اند و روی هر مربع، از صفر تا ۶ نقطه رسم شده است. از تمام ترکیب‌های مختلف دوتایی این حالت‌ها، ۲۸ مهره به‌دست می‌آید که با این ۲۸ مهره می‌توان بازی‌های متنوعی را انجام داد. اما آنچه اینک مد نظر ماست، تعمیم شکل دومینو به شکل‌های دیگری با سه یا چهار یا پنج مربع یکسان (بدون نقطه‌گذاری روی آن) است.

جالب است بدانید **دومینو** کلمه‌ای فرانسوی است و به معنی نوعی کلاه زمستانی است که کشیشان بر سر می‌گذاشتند. همچنین این نام به افراد مهم اطلاق می‌شد و معنی دیگر دومینو برای کسانی بود که چهرهٔ خود را می‌پوشاندند. این کلمه در سال ۱۷۱۹ میلادی وارد زبان انگلیسی شد اما از سال ۱۸۰۱ به معنی امروز آن، یعنی بازی یا اسبابِ بازیِ دومینو به کار رفته است. ریشهٔ این بازی ایتالیایی است و از آنجا به دیگر کشورها راه یافته است.[2]

در سال ۱۹۶۵، گولوم[2] در کتابی با عنوان پلیومینوها[3]، به بررسی اشیایی پرداخت که از مربع‌های هم‌اندازه‌ای تشکیل شده‌اند که هر مربع در لااقل یک ضلع به سایر مربع‌ها متصل است. این نوع اتصال را برخی شطرنج‌بازان **اتصال رخ‌گرد**[4] می‌نامند، به این معنی که رُخِ شطرنج می‌تواند روی آن با تعداد متناهی حرکت از یک مربع به هر مربع دیگری برود. گولوم با تقسیم کلمهٔ دومینو به کلمه‌های «دو» و «مینو» و اضافه کردن پیشوندهای یونانی دیگر (به جای پیشوند یونانی «دو») به کلمه «مینو»، کلمه‌های مونومینو[5]، ترومینو[6]، تترومینو[7]، پنتومینو[8]، هگزومینو[9] و ... را برای شکل‌هایی به ترتیب با یک، سه، چهار، پنج، شش و ... مربع ابداع کرد. ظاهراً «مینو» هیچ ریشهٔ لغوی ندارد و ساخت این کلمه‌ها از دومینو، ابتکار و ذوق شخصی گولوم بوده است. به ادعای گولوم «طرح‌های پلیومینو، در واقع مثال‌هایی از **هندسهٔ ترکیبیاتی**[10] است و کسانی که با این مبحث آشنا نیستند، از یکی از دل‌انگیزترین زمینه‌های ریاضیات بی‌نصیب مانده‌اند.»

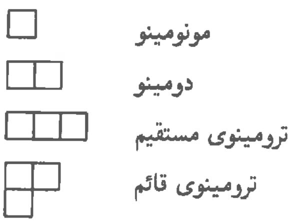
برای آشنایی بیشتر با پلیومینوها، با هم نمونه‌های ساده‌ای از آن‌ها را می‌سازیم.

با یک مربع، تنها می‌توان یک مونومینو ساخت (شکل روبه‌رو)

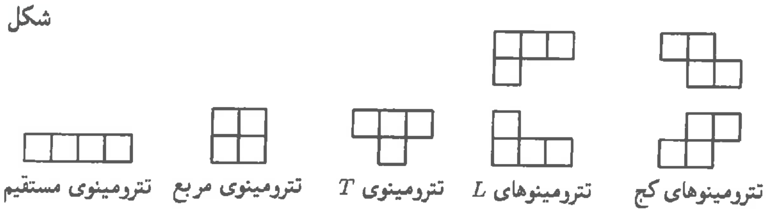
همچنین با دو مربع یکسان، تنها یک دومینو به دست می‌آید (شکل روبه‌رو)

اما با سه مربع یکسان، دو نوع ترومینوی متفاوت ساخته می‌شود (شکل روبه‌رو)

از کنار هم قرار دادن چهار مربع می‌توان هفت نوع تترومینوی متفاوت به‌دست آورد (شکل ۳).



شکل ۲. چند پلیومینوی ساده



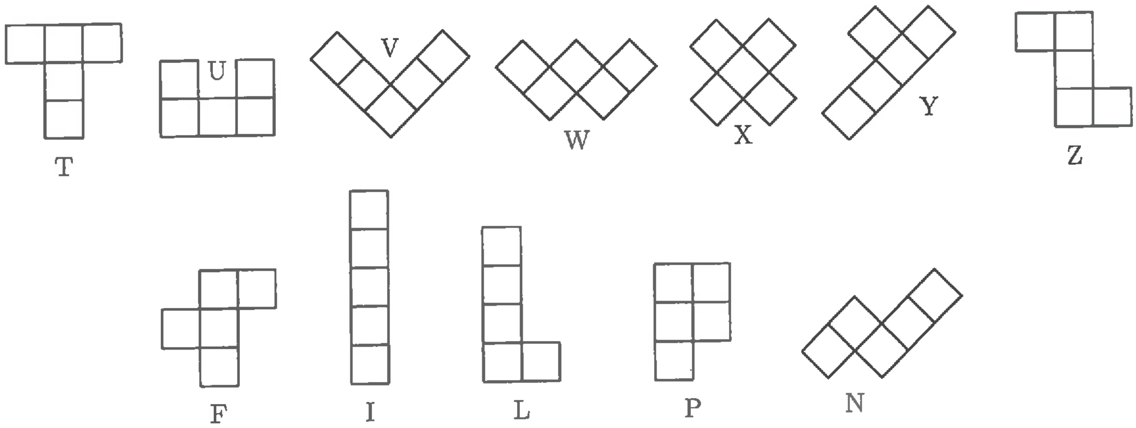
شکل ۳. تترومینوها

---

1) Domino 2) Solomon W.Golomb 3) Polyominoes 4) Rookwise connection 5) Monomino 6) Tromino 7) Tetromino 8) Pentomino 9) Hexomino 10) Combinatorial geometry

شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۰) صص. ۹ـ۵

با تترومینوها، بازی مشهور تتریس[1] توسط پاینتوف[2] طراحی شد که برنامه‌نویسی این بازی مهیج رایانه‌ای توسط گراسیموف[3] انجام شده است. این بازی چند سال متوالی به عنوان یکی از بهترین بازی‌های رایانه‌ای معرفی شد. توجه کنید که دو نوع تترومینوی L، تقارن آینه‌ای یکدیگر هستند همچنین دو نوع ترومینوی کج نیز متقارن آینه‌ای هستند. در شمارش پلیومینوها، دوران‌ها شکل جدیدی به‌وجود نمی‌آورند و معمولاً پلیومینوها را بدون پشت و رو فرض می‌کنند. لذا ۵ تترومینوی متفاوت داریم. با این قرارداد، برای پنتومینوها دوازده حالت وجود دارد که در شکل ۴ آمده است.

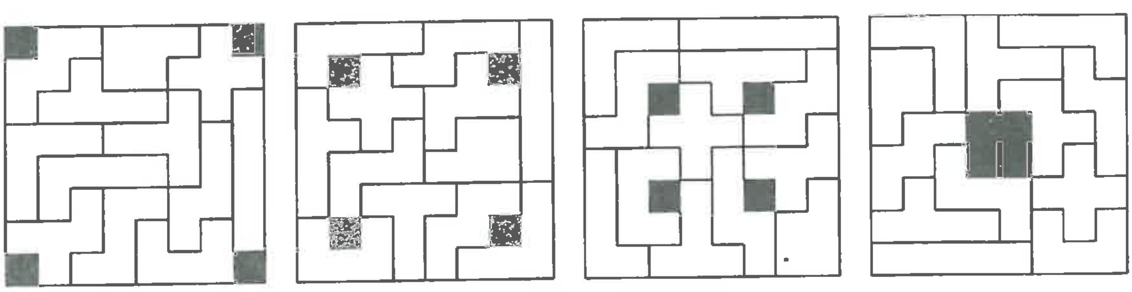


شکل ۴. دوازده پنتومینو و نامگذاری مشهور گولوم با حروف لاتین

نکات متنوعی دربارهٔ پنتومینوها قابل بررسی هستند. هر پنتومینو را می‌توان در یک مستطیل قرار داد. کم‌ترین ابعاد مستطیل برای پنتومینوهای F و T و V و W و X و Z مربع ۳ × ۳ است و P و U در مستطیل ۳ × ۲ و L و N و Y در مستطیل ۴ × ۲ و I در مستطیل ۵ × ۱ جا می‌گیرند. مستطیل ۵ × ۳ کوچکترین مستطیلی است که هر یک از پنتومینوها را می‌توانیم در آن جا دهیم. در شکل ۵، دو نمونه از شبکه‌ای از مربع‌ها با کم‌ترین تعداد که هر یک از پنتومینوها در آن جای می‌گیرد، نمایش داده شده است.

شکل ۵. دو شبکهٔ می‌نیمال که هر یک از دوازده پنتومینو در آن جای می‌گیرند.

رده‌ای از مسایل مطرح شده با پنتومینوها، مسایل جورچین[4] است. می‌دانید که دوازده پنتومینو، در مجموع شصت مربع را می‌پوشانند. اگر همهٔ آن‌ها را روی یک صفحهٔ شطرنج ۸ × ۸ قرار دهیم، چهار مربع خالی می‌ماند. شکل ۶، چهار روش متفاوت برای چیدن پنتومینوها روی این صفحهٔ شطرنج را نشان می‌دهد، به طوری که چهار مربع خالی، به‌صورت متقارن در صفحهٔ ۸ × ۸ حذف شده‌اند.



شکل ۶. چهار روش متفاوت برای پر کردن صفحهٔ شطرنج با پنتومینوها و با چهار مربع خالی متقارن.

1) Tetris 2) A. Pajitnov 3) V. Gerasimov 4) Puzzle

اکنون چند مسألهٔ مشابه مطرح می‌کنیم.

۱) مستطیل 10×6 را با دوازده پنتومینو بپوشانید.

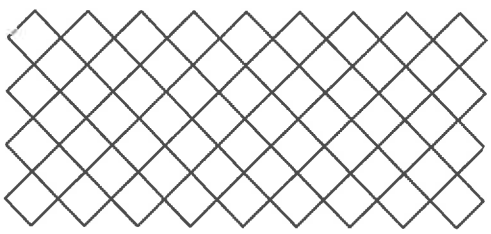
۲) مستطیل 12×5 را با دوازده پنتومینو بپوشانید.

۳) مستطیل 15×4 را با دوازده پنتومینو بپوشانید.

۴) مستطیل 20×3 را با دوازده پنتومینو بپوشانید.

شاید در کل از خود بپرسیم که آیا هر ساختاری از شبکه‌های مربعی که دارای شصت مربع باشند را می‌توان با دوازده پنتومینو پوشاند؟ واضح است که جواب این سؤال برای مستطیل 30×2 منفی است زیرا تعدادی از پنتومینوها (مثلاً T) در شبکه‌های $n \times 2$ جای نمی‌گیرند.

اما شبکه‌های متفاوت دیگری نیز هستند که قابل پوشاندن با ۱۲ پنتومینو نیستند. به‌عنوان مثال، شبکهٔ شصت مربعیِ شکل ۷ چنین است. فکر می‌کنید برای این‌که این موضوع را ثابت کنیم، باید چه کار کنیم؟

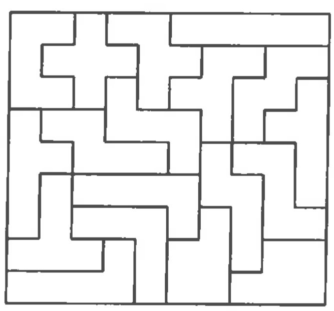


شکل ۷.

به‌عنوان راهنمایی به بیست و دو مربعِ دور تا دور این شبکه توجه کنید.

دقت کنید که با هر یک از پنتومینوهای T و U و V و Z و I و L، می‌توان حداکثر یکی از این مربع‌ها (مرز شبکه) را پوشاند و با هر یک از پنتومینوهای Y و P و N حداکثر دو تا و با هر کدام از F و X و W، حداکثر سه مربع پوشانده می‌شود، که در مجموع بیست و یک مربع پوشانده می‌شود. تنها یک اشاره برای اثبات حکم مورد نظر کافی است.

اگر فرض دورو بودنِ پنتومینوها را برداریم و آن‌ها را یک‌رو فرض کنیم، پنتومینوهایی که تقارنِ آینه‌ایِ Y و Z و F و L و P و N هستند نیز به این مجموعه اضافه می‌شوند و جمعاً هجده پنتومینوی یک‌رو خواهیم داشت که روی هم نود مربع را می‌پوشانند.



شکل ۸. نمونه‌ای از مستطیل 10×9 که با هجده پنتومینوی یک‌رو پوشانده شده است.

برای این مجموعه می‌توان مسائل زیر را مطرح کرد:

۵) آیا می‌توان مستطیل 30×3 را با هجده پنتومینو پوشاند؟

۶) آیا می‌توان مستطیل 18×5 را با این هجده پنتومینو پوشاند؟

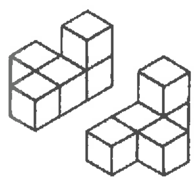
۷) در مورد پوشاندن مستطیل‌های 15×6 و 10×9 توسط این هجده پنتومینو چطور؟

توجه کنید که مسأله‌های ۱ تا ۷ که در این مقاله مطرح شده‌اند، در صورت داشتن پاسخ، ممکن است چندین پاسخ متفاوت داشته باشند. مثلاً برای پوشاندن مستطیلی 10×6 توسط دوازده پنتومینوی دورو، بیش از ۲۰۰۰ راه حل مختلف وجود دارد!

یک راه دیگر برای تعمیم مسایل مربوط به پلیومینوها، فرض فضایی بودن آن‌هاست؛ به این معنی که فرض کنیم به جای مربع‌های هم‌اندازه، مکعب‌های هم‌اندازه‌ای داریم که هر مکعب در حداقل یک وجه به سایر مکعب‌ها متصل است. در این صورت احجام به دست آمده، **پلیومکعب**[1] نامیده می‌شوند و در صورتی که مکعب‌های پلیومکعب همگی در یک سطح باشند، آن را **پلیومکعب مسطح**[2] می‌نامیم که در این حالت نمای بالای آن همان شکل پلیومینو است. در غیر این صورت اگر مکعب‌ها در یک سطح نباشند، پلیومکعب را **پلیومکعب فضایی**[3] می‌نامیم. (شکل ۹)

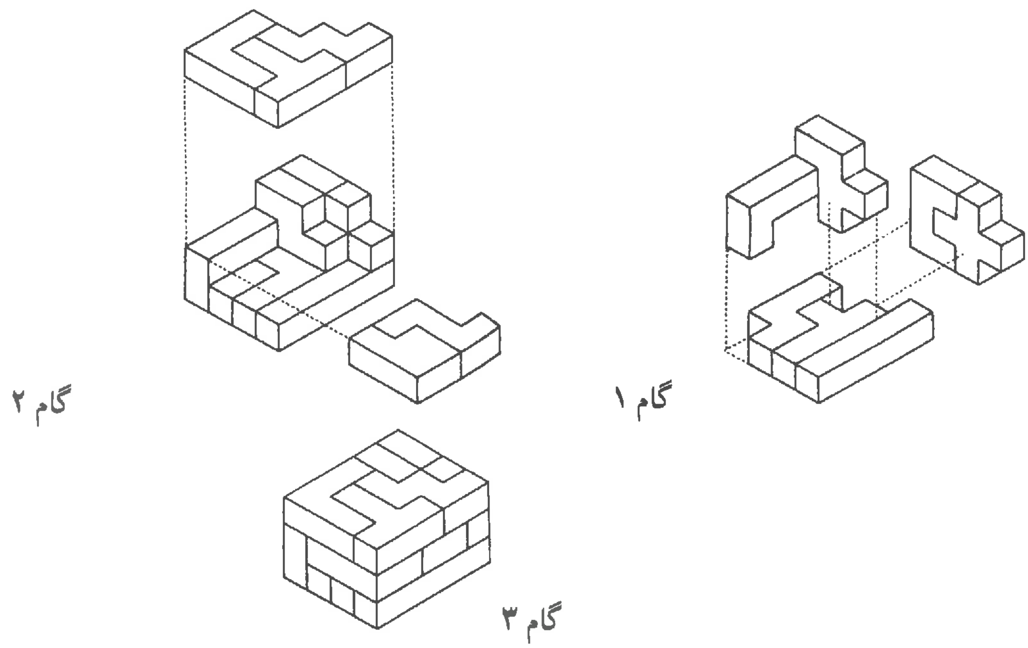
شکل ۹. نمونه‌ای از پلیومکعب‌های مسطح و فضایی.

با تعمیم فوق، دوازده پنتومکعب مسطح داریم. به این مجموعه، هفده پنتومکعب فضایی نیز اضافه می‌شود، بنابر این بیست و نُه پنتومکعب در حالت کلی وجود دارد. به عنوان تمرین خودتان این هفده پنتومکعب فضایی را شناسایی کنید. توجه کنید که برخی از آن‌ها در فضای سه بعدی، متقارن آینه‌ای هستند. با این حال نمی‌توان با چرخاندن، یکی را بر دیگری منطبق کرد لذا هر دو حالت را باید در نظر گرفت (شکل ۱۰).



شکل ۱۰. یک جفت پنتومکعب فضایی که در فضای سه بعدی متقارن آینه‌ای هستند.

مشابه معماهای پنتومینوها، معماهای جورچین فضایی برای پنتومکعب‌ها قابل طرح است. مثلاً با دوازده پنتومکعب مسطح می‌توان مکعب مستطیلی به ابعاد $5 \times 4 \times 3$ را پُر کرد. (شکل ۱۱) توجه کنید که برای این مسأله چند راه حل وجود دارد!



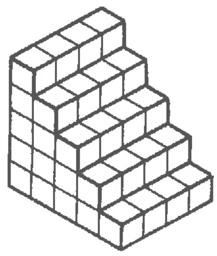
شکل ۱۱. نمونه‌ای از پر کردن مکعب‌مستطیل $5 \times 4 \times 3$ با دوازده پنتومکعب مسطح.

1) Polyocube 2) Flat Polyocube 3) Solid Polyocube

۸) با بیست‌وهشت پنتومکعب (یعنی همهٔ پنتومکعب‌ها به جز پنتومکعب $۵ \times ۱ \times ۱$) مکعب‌مستطیل $۱۴ \times ۵ \times ۲$ را پر کنید.

۹) با بیست‌وهشت پنتومکعب، مکعب‌مستطیل $۱۰ \times ۷ \times ۲$ را پُر کنید. این کار را برای مکعب‌مستطیل $۷ \times ۵ \times ۴$ نیز انجام دهید.

۱۰) پلکان شکل ۱۲ را با پنتومکعب‌ها بسازید.



شکل ۱۲.

اینک به‌نظر می‌رسد شما خودتان می‌توانید تمام انواع هگزومینوها (یعنی شکل‌هایی با شش مربع) را شناسایی کنید و معماهایی برای آن‌ها طرح و حل نمایید.

علاوه بر مسایل و معماهای جورچین، می‌توان بازیهایی نیز با پلیومینوها طرح کرد. پیش از این به بازی **تتریس** اشاره شد. بازی دو نفری زیرکه با پنتومینوها انجام می‌شود با تمام سادگی قاعدهٔ بازی آن جذابیت زیادی دارد:

یک صفحهٔ شبکه‌ای ۸×۸ در نظر بگیرید (مانند صفحه شطرنج). هر یک از دو بازیکن، دوازده قطعه پنتومینوی دورو در اختیار دارند، بدین ترتیب بازی با بیست و چهار پنتومینو انجام می‌شود (هر یک از این دو دسته می‌تواند به یک رنگ انتخاب شود. بازی به نوبت انجام می‌شود و هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند روی خانه‌های خالی صفحه، یکی از قطعات باقی‌ماندهٔ خود را قرار دهد. بازنده کسی است که در نوبت خود نتواند هیچ‌یک از قطعات موجود در دست خود را روی خانه‌های خالی صفحه بچیند. با توجه به این‌که در هر نوبتِ بازی پنج خانه پوشانده می‌شود، هر بازیکن حداکثر می‌تواند شش حرکت انجام دهد. به‌نظر می‌رسد تعداد حالت‌های بازی زیاد نباشد لیکن بر خلاف این نظر، تعداد حرکت‌های ممکن از تعداد گشایش‌ها[1]ی بازی شطرنج (برای دو حرکت اول) بسیار بیشتر است. بنابر این تعیین استراتژی بُرد در این بازی با شمارش حالت‌های ممکن، مشکل به‌نظر می‌رسد.

بحث پیرامون پلیومینوها و پلیومکعب‌ها بسیار گسترده و متنوع است و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند با تأمل روی مسایل مطرح شده و تعمیم آن‌ها یا ساختن مسایلی مشابه، وارد این حیطه شود!

مراجع.

[1] Solomon W. Golomb. *Polyominoes.* (2nd Ed.) Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1994. 1975.

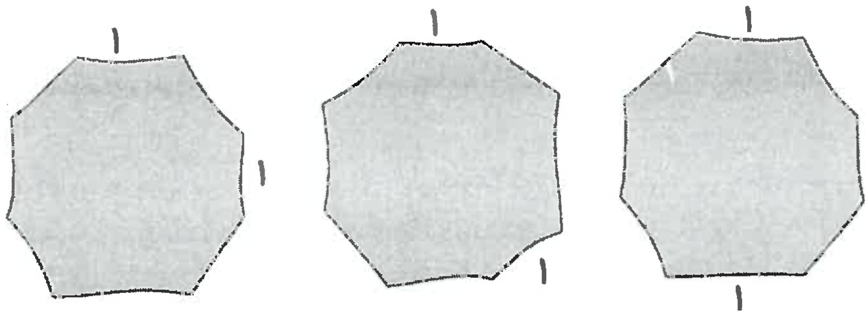
[2] Fredric V. Grunfeld. *Games of the world.* UNICEF, Zurich,

1) Opening

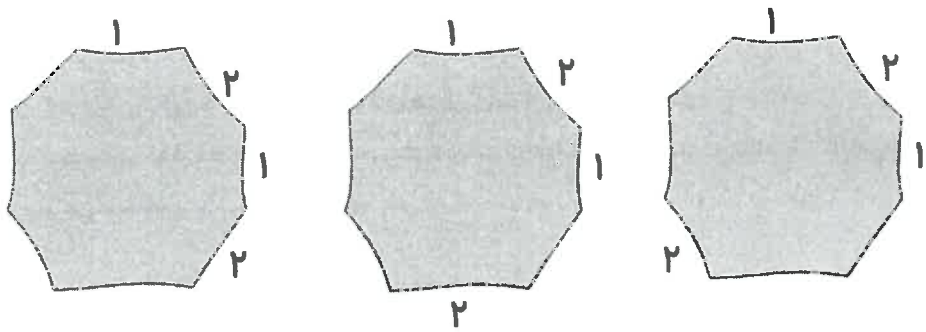
آرش در سیارهٔ تویاپ (قسمت ششم)

ایمان افتخاری

آقای سای سری به نشانهٔ رضایت تکان داد و فوراً موضوع را عوض کرد «برویم سراغ ۸ ضلعی. خیلی پیچیده‌تر به‌نظر می‌رسد. مثل همیشه اسم یکی از ضلع‌ها را ۱ می‌گذارم و حالا ۳ حالت ممکن است. دو تا ۱ فاصلهٔ ۱، ۲ یا ۳ دارند.

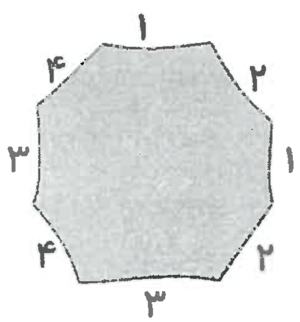


وقتی فاصله ۱ است، اگر ضلع بین ۱ ها را ۲ بگذاریم، ضلع دیگر با شمارهٔ ۲ متصل به ۱ها یا با فاصلهٔ ۱ یا با فاصلهٔ ۲ از آن‌ها است. پس در این حالت، ۳ حالت به این شکل خواهیم داشت که شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ برای آن‌ها می‌گذارم.»



(۱) (۲) (۳)

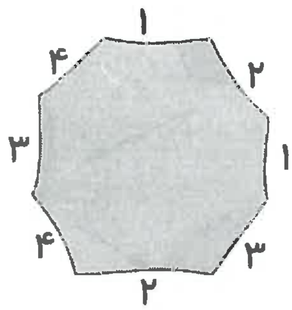
قبل از این‌که آقای سای ادامه دهد، پیش‌خدمت سه تا ظرف سالاد جلوی آن‌ها گذاشت که منظره وسوسه‌انگیزی داشتند آقای سای با خوشحالی گفت: چه به موقع!
آقای خی وانمود کرد که حرف آقای سای را نشنیده: خوب در حالت ۱ اگر ضلع بعدی شمارهٔ ۳ باشد بعد از آن ناچاریم شماره ۴ داشته باشیم و باز ۳ و باز ۴. چرا که نباید چیزی ساده بشود پس شکل نهایی این‌جوری است.



(۱)

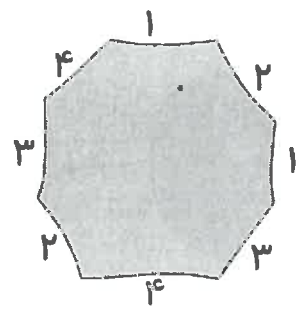
شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۰) صص ۱۴ـ۱۰

آرش: خوب خدا را شکر حداقل تکلیف یکی از این حالت‌ها معلوم شد. حالت ۲ هم نباید سخت باشد. اگر برای ضلعی که بین شماره‌های ۱ و ۲ است شماره ۳ بگذاریم، ضلع دیگر با شماره ۳ باید دو ضلع باقی‌مانده را از هم جدا کند پس شکل نهایی حالت ۲ هم معلوم می‌شود.



(۲)

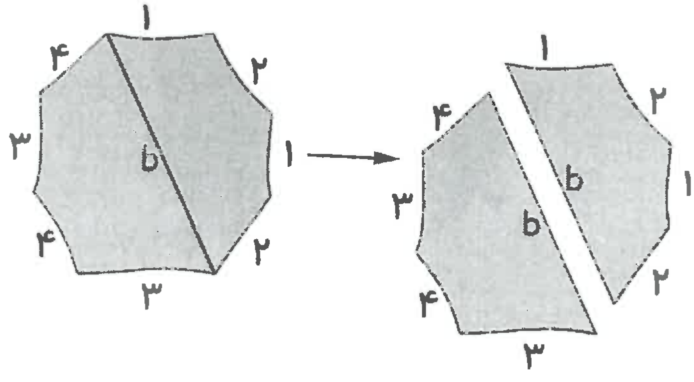
آقای سای در حالی‌که با استفاده از این فرصت مقداری از سالادش را خورده بود گفت: خوب بگذارید حالت ۳ را هم خودم بررسی کنم.روی ضلع بعد از ۱، شماره ۳ می‌گذاریم و بعدی باید شماره ۴ داشته باشد. دو ضلع بعد از ۲ هم یا شمارهٔ ۳ و ۴ دارند یا ۴ و ۳. اگر ترتیب شماره‌ها ۴ و ۳ باشد که دو جفت ضلع متصل با شماره‌های یکی داریم که ترتیب شماره‌ها فرق می‌کند و یکی از حالت‌هایی خواهد بود که ساده می‌شود. لاجرم باید شکل نهایی حالت ۳ این‌طور باشد.



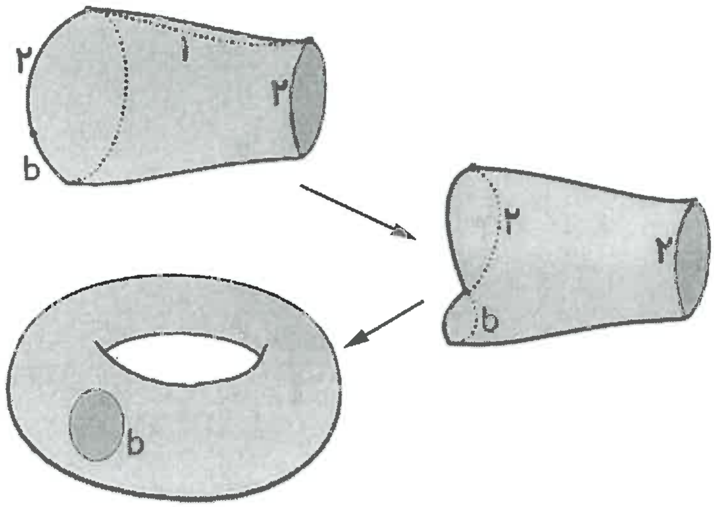
(۳)

آرش: من پیشنهاد می‌کنم قبل از این‌که به سراغ بقیه حالت‌ها برویم ببینیم که در همین سه حالت چه شکلی حاصل می‌شود مثلاً شکل حاصل از حالت ۲ به‌نظر شما چیست؟

آقای خی: به نظر من چون الگوی ۲۱۲۱ و ۴۳۴۳ مشابه هستند. این دو قسمت را جدا کنیم و بعداً بچسبانیم یعنی

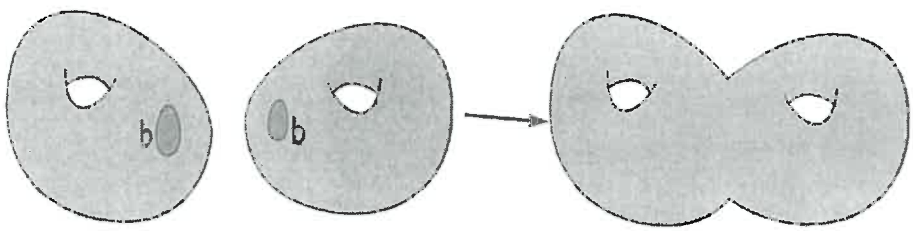


حالا در تکه اول ۱ ها را به هم می‌چسبانم و بعد هم دو تا ۲ را به هم می‌چسبانم.



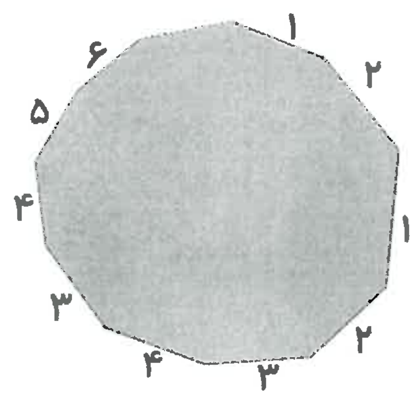
آرش: پس هرکدام از تکه‌ها مثل تیوپی است که یک تکه‌اش کنده شده است و لبهٔ آن تکه هم ضلع b است که دو سرش از روی اجبار به هم می‌چسبند. خوب حالا برای به‌دست آوردن شکل نهایی تکلیف ما روشن است.

آقای سای در حالی که چنگال دیگری به سالادش می‌زد گفت: کاملاً! دو تا سوراخ تیوپ را به هم بچسبانید.



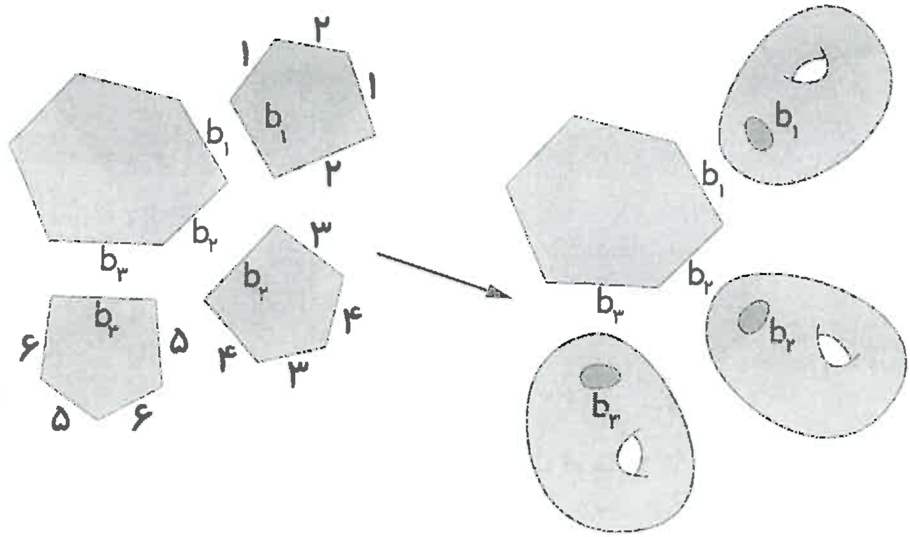
آقای خی: عجب چیزی! یه تیوپ با دو تا سوراخ! خوب این کار را احتمالاً بشود ادامه داد، یعنی تیوپ‌هایی با ۳، ۴ و . . . سوراخ. باید اعداد ۶۵۶۵۴۳۴۳۲۱۲۱. . . را دور یک $4n$ ضلعی بگذاریم تا یک تیوپ با n تا سوراخ درست بشود. نظر شما چیست؟

آرش: قابل تصور است! ولی خیلی واضح نیست. بگذارید ببینم که در این مدل شما شکل نهایی چه می‌شود.

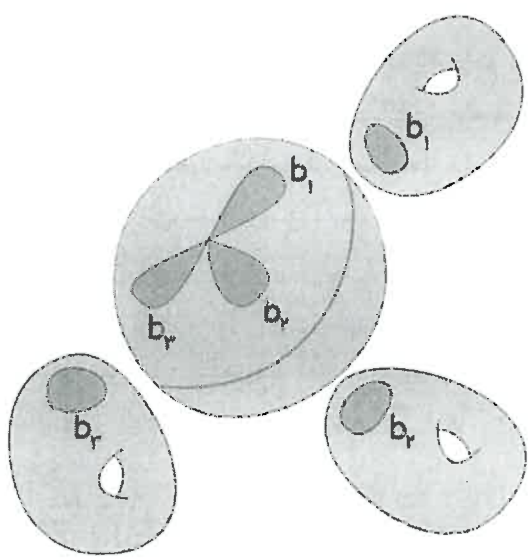


خوب اگر هرکدام از تکه‌ها ۲۱۲۱ و ۴۳۴۳ و . . . را جدا کنیم یک n ضلعی، $b_1b_2\dots b_n$، باقی می‌ماند و n تا تکه که هرکدام

یک تیوپ سوراخ است. سوراخ‌ها دایره‌های b_1، b_2، و ... هستند.

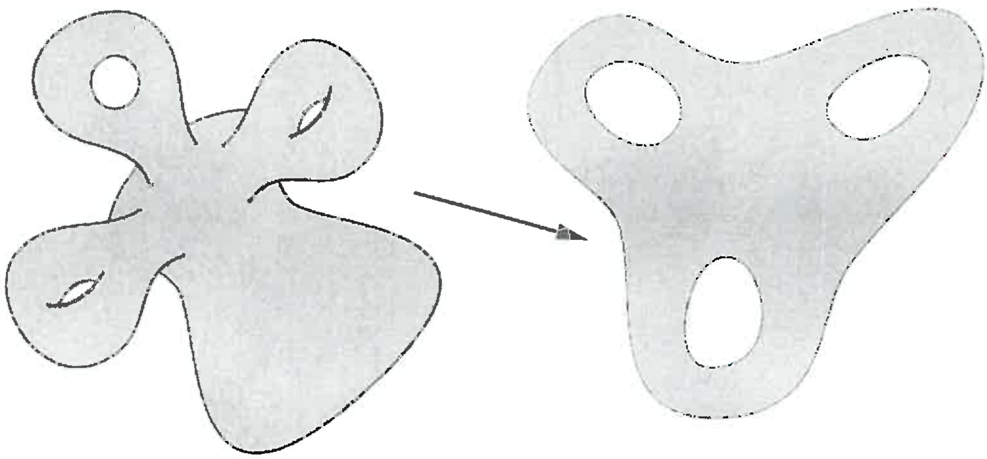


آقای سای: در تیوپ‌ها طبق قانون چسباندن، دو سر b_1 به هم چسبیده می‌شود، دو سر b_2 به هم، دو سر b_3 به هم و ... پس دو انتهای b_1 و b_2 و ... در واقع یک نقطه هستند و روی n ضلعی هم می‌توان آن‌ها را یکی کرد و به این شکل رسید.

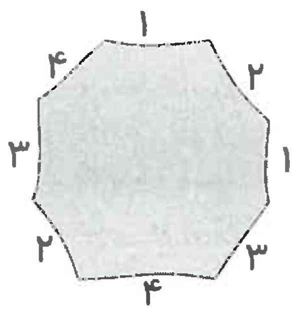


آقای خی: خوب پس می‌توانیم از این n ضلعی به‌عنوان وصلهٔ مشترک همهٔ تیوپ‌ها استفاده کنیم و پنچری همهٔ آن‌ها را بگیریم!
آرش در حالی‌که می‌خندید با چنگال به سالاد حمله کرد!

آقای سای: پس می‌توانیم تیوپ‌ها را به این کرهٔ سوراخ‌دار بچسبانیم و یک تیوپ با n تا سوراخ به‌دست آوریم.



آرش: بحث خوبی بود ولی کمی از موضوع اصلی دور شدیم. فهمیدیم که حالت ۱، یک تیوپ با ۲ سوراخ است. بیایید به سراغ حالت دوم برویم.



آقای سای: خوب، چسباندن ضلع‌های این یکی که خیلی سخت است تازه راهی هم برای ساده کردن چسباندن به‌نظر نمی‌رسد.

آقای خی که تازه مشغول خوردن سالاد شده بود: چطور است سعی کنیم کاری را که در مورد ۶ ضلعی انجام دادیم، اینجا هم تکرار کنیم. فقط مسأله این است که روی کدام خط چند ضلعی را ببریم چون حالت‌ها خیلی زیاد است. من پیشنهاد می‌کنم که هر کدام روی یک تکه کاغذ حالت‌هایی را که به‌نظرمان معقول می‌رسد را بررسی کنیم و اگر به نتیجه مثبتی رسیدیم بحث را ادامه بدهیم. اگر هم راهی پیدا نکردیم می‌توانیم به دنبال راه‌کار دیگری بگردیم.

به این ترتیب هر سه مشغول کشیدن شکل روی کاغذ شدند. آقای سای که هم خیالش از بابت سالاد راحت شده بود(!) و هم در این کار سریع‌تر بود بعد از مدتی خط مناسب را پیدا کرد و فریاد زد: آهان! پیدایش کردم!

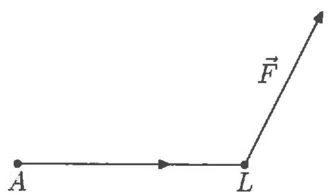
ادامه دارد...

حل چند مسأله به‌وسیلهٔ مفاهیم فیزیکی

سلمان ابوالفتح‌بیگی ، امین امین‌زاده

در این مقاله سعی می‌شود با استفاده از چند مفهوم فیزیکی، چند مسأله را در هندسهٔ مسطحه حل کنیم. در اینجا از مفاهیم فیزیکی چون مرکز ثقل و تعادل ... استفاده می‌شود.

مرکز ثقل یک جسم نقطه‌ای است که گشتاور نیروهای گرانشی وارد بر جسم نسبت به آن نقطه صفر شود. گشتاور یک نیروی $\vec{F}$ نسبت به نقطهٔ A برابر ضرب خارجی بُردار نیرو در بُرداری است که انتهای آن نقطهٔ اثر نیرو و ابتدای آن A می‌باشد.



$$=\vec{F}\times\vec{AL} \quad \text{بردار گشتاور } F \text{ نسبت } A$$

ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$، $(\vec{A}\times\vec{B})$، برداری است عمود بر صفحهٔ گذرنده از آن دو بردار که طول آن برابر با

$$|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin\theta$$

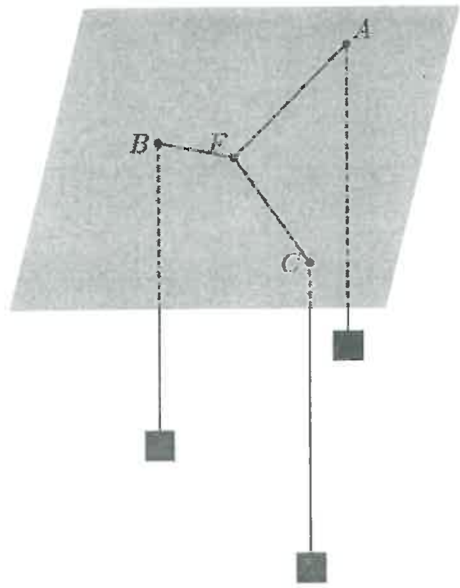
است که $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$، طول بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ و زاویهٔ بین دو بردار است. جهت $\vec{A}\times\vec{B}$ طوری انتخاب می‌شود که سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{A}\times\vec{B}$ تشکیل یک دستگاه راستگرد بدهند.

قضیه ۱. *(نقطهٔ فرما). فرض‌کنید ABC مثلثی با زاویه‌های حاده باشد. اگر F نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث باشد که $FA+FB+FC$ مینیمم باشد. آنگاه*

$$\widehat{AFB}=\widehat{BFC}=\widehat{CFA}=۱۲۰^\circ$$

به این نقطه، نقطهٔ فرما می‌گویند.

برهان. حال ما اثباتی فیزیکی برای این مسأله ارائه می‌دهیم. فرض کنید مثلث ABC را روی یک میز رسم کرده‌ایم و نقطه‌های A و B و C را روی میز سوراخ کرده‌ایم. اینک سه طناب را در نقطه‌ای گره می‌زنیم، سر دیگر آنها را از سه سوراخ A و B و C رد می‌کنیم و سه وزنه به جرم یک کیلوگرم به آنها متصل می‌کنیم.



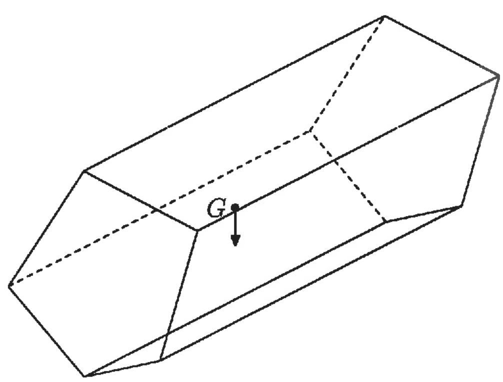
مسلم است زمانی این دستگاه به تعادل می‌رسد. در این زمان با توجه به قوانین فیزیکی مجموع انرژی پتانسیل (گرانشی) دستگاه مینیمم است. یعنی مجموع فاصله‌های وزنه‌ها از زمین مینیمم است. (با توجه به این‌که جرم وزنه‌ها یکسان است) یا به عبارتی مجموع طول طنابها از نقاط A و B و C تا وزنه‌ها ماکزیمم است. و در نتیجه $FA + FB + FC$ مینیمم است (F محل گره) بنابراین وقتی دستگاه به تعادل می‌رسد نقطهٔ F (محل گره) نقطهٔ مورد نظر مسأله است. در این زمان مجموع نیروهای وارد بر F باید صفر باشد (چرا؟). بر F سه نیرو در امتداد سه طناب وارد می‌شود که مقدار هر کدام $10N$ است. در واقع مجموع سه نیروی برابر که بر یک جسم وارد می‌شوند صفر شده است. در این‌صورت بردارهای این سه نیرو باید با هم زاویهٔ $120°$ بسازند، یعنی

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120°$$

∎

قضیه ۲. *فرض کنید P یک n ضلعی محدب روی صفحه و G مرکز ثقل آن باشد. ثابت کنید پای عمودِ وارد از G بر یکی از اضلاع P درون آن ضلع قرار می‌گیرد.*

برهان. فرض می‌کنیم چنین نباشد یعنی پای عمودِ وارد از G بر همهٔ اضلاع، خارج از اضلاع باشد. حال فرض کنید منشوری ساخته‌ایم که مقطع آن، چندضلعی مذکور است.



در این‌صورت باز هم پای عمودِ وارد از مرکز ثقل این منشور بر وجه‌های منشور خارج از این وجه‌ها قرار می‌گیرد. پس اگر این منشور را روی زمین قرار دهیم همواره در حال چرخش خواهد بود (چرا؟) که بنابر قوانین فیزیکی تناقض است. ∎

قضیه ۳. *(قضیهٔ سوا) اگر X و Y و Z سه نقطه به‌ترتیب روی اضلاع BC و AC و AB از مثلث ABC قرارگرفته باشند و رابطهٔ*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = ۱$$

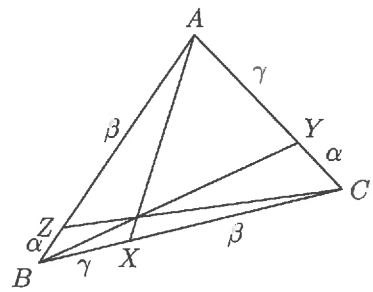
برقرار باشد، آنگاه CZ و BY و AX همرسند. (منظور از $\overline{AB}$ مقدار جبری پاره خط AB است و لذا $\overline{AB} = -\overline{BA}$)

برهان. با توجه به این‌که

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = ۱$$

می توان اعداد مثبت α و β و γ را طوری انتخاب کرد که

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ و } \frac{CY}{YA} = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ و } \frac{AZ}{ZB} = \frac{\beta}{\alpha}$$

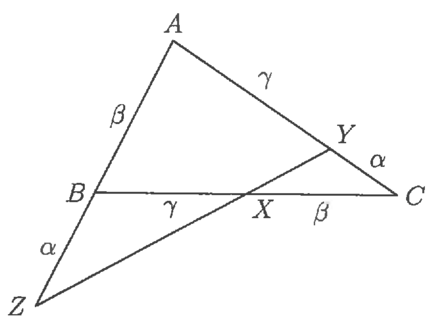


حال فرض کنید روی رئوس A و B و C به‌ترتیب سه وزنه به جرم‌های α و β و γ گذاشته‌ایم. در این صورت چون $\frac{BX}{XC} = \frac{\alpha}{\gamma}$، مرکز ثقل دو وزنه به جرم α و γ نقطهٔ X است. پس اگر مثلث ABC با این وزنه‌ها را روی خط AX قرار دهیم به تعادل می‌رسد پس مرکز ثقل کل این دستگاه روی خط AX است و به همین ترتیب روی خطوط BY و CZ نیز هست پس AX و BY و CZ یک نقطهٔ مشترک دارند و در نتیجه همرسند. ∎

قضیه ۴. *(قضیهٔ منلائوس) فرض کنید X و Y و Z سه نقطه به‌ترتیب روی اضلاع BC و AC و AB از مثلث ABC باشند. اگر رابطهٔ*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -۱$$

برقرار باشد آنگاه X و Y و Z روی یک خط قرار دارند.



برهان. در این برهان فرض شده است که X و Y روی اضلاع و Z خارج ضلع AB قرارگرفته است. حالات دیگر نیز به همین روش قابل اثبات است. با توجه به رابطه‌ای که در فرض مسأله داده شده است اعداد مثبت α و β و γ وجود دارند که

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\beta}{\alpha} \ , \ \frac{CY}{YA} = \frac{\alpha}{\gamma} \ , \ \frac{BX}{XC} = \frac{\gamma}{\beta}$$

حال فرض کنید روی رئوس C و A به‌ترتیب وزنه‌های γ و α وروی رأس B وزنه‌های β و $-\beta$ قرار دهیم (در واقع وزنهٔ β نیروی β به سمت پایین است و وزنهٔ $-\beta$ نیروی β به سمت بالا تعریف می‌شود). از طرفی مرکز ثقل وزنه‌های γ و β نقطهٔ X و مرکز ثقل وزنه‌های α و $-\beta$ نقطهٔ Z می‌شود پس دستگاه روی خط XZ می‌ایستد. در نتیجه مرکز ثقل کل دستگاه باید روی XZ باشد. از طرفی دو نیروی B و $-B$ با هم خنثی می‌شوند و مرکز ثقل دستگاه، مرکز ثقل دو نیروی α و γ خواهد بود (یعنی y) لذا Y روی XZ است و Z و Y و X همخط هستند.

∎

قضیه ۵. *نقطهٔ P را در درون مثلث ABC در نظر بگیرید. فرض کنید AP و BP و CP و اضلاع BC و AC و AB را به‌ترتیب در نقاط X و Y و Z قطع کنند به‌طوری که $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{AZ}{ZB}$ و $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{CY}{YA}$ و $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{BX}{XC}$ (طبق قضیهٔ سوا چنین اعداد مثبتی وجود دارند). آنگاه*

$$\alpha.\ \overrightarrow{PA}+\beta.\ \overrightarrow{PB}+\gamma\ \overrightarrow{PC}=0$$

برهان. طبق آن‌چه که از قضیهٔ سوا گفتیم اگر روی رئوس A و B و C به‌ترتیب وزنه‌های α و β و γ را قرار دهیم، P مرکز ثقل دستگاه خواهد بود. حال طبق تعریف مرکز ثقل، مجموع بردارهای گشتاور نیروهای وارد بر دستگاه نسبت به مرکز ثقل برابر صفر است، یعنی

$$\vec{\alpha}\times\overrightarrow{PA}+\vec{\beta}\times\overrightarrow{PB}+\vec{\gamma}\times\overrightarrow{PC}=0$$

که بردارهای $\vec{\alpha}$ و $\vec{\beta}$ و $\vec{\gamma}$ بردارهایی عمود بر صفحهٔ مثلث ABC و به‌ترتیب به طولهای α و β و γ هستند. در این‌صورت بردارهای $\vec{\alpha}$ و $\vec{\beta}$ و $\vec{\gamma}$ بر $\overrightarrow{PC}$ و $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PA}$ عمود هستند ($\sin 90^\circ = 1$). پس $\vec{\alpha}\times\overrightarrow{PA}$ برابر برداری عمود بر AP در صفحهٔ مثلث ABC (چرا؟) و به طول $\alpha\cdot PA$ خواهد بود. (و به همین ترتیب برای $\vec{\beta}\times\overrightarrow{PB}$ و $\vec{\alpha}\times\overrightarrow{PC}$). چون مجموع این بردارها صفر است پس اگر هرکدام از آنها را 90° دوران دهیم باز هم مجموع این بردارها صفر خواهد بود (چرا؟) از آنجا که بردار $\vec{\alpha}\times\overrightarrow{PA}$ عمود بر PA و در صفحهٔ مثلث ABC است پس اگر آن را 90° دوران دهیم در امتداد PA قرار خواهد گرفت و چون طول آن برابر $\alpha\cdot PA$ است پس بردار $\alpha\ \overrightarrow{PA}$ خواهد بود (به همین ترتیب برای دو بردار دیگر). پس داریم

$$\alpha\cdot\ \overrightarrow{PA}+\beta\cdot\ \overrightarrow{PB}+\gamma\cdot\ \overrightarrow{PC}=0$$

∎

تمرین ۱. *فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی باشد و M_1 و M_2 و M_3 و M_4 و M_5 و M_6 به‌ترتیب وسط پاره‌خط‌های AB و BC و CD و DA و AC و BD باشند. ثابت کنید ضلعهای M_1M_3 و M_2M_4 و M_5M_6 همرسند.*

تمرین ۲. بگیرید.

تمرین ۳. *روی پاره خط AD نقطهٔ P را چنان بگیرید که $\frac{AP}{PD}=\alpha$. فرض کنید M وسط BC باشد. حال Q را خارج از پاره‌خط DM چنان بگیرید که $\frac{MQ}{QD}=\alpha$. ثابت کنید P و Q و مرکز ثقل مثلث ABC روی یک خط هستند.*

تمرین ۴. *مسألهٔ دوم را در حالت کلی حل کنید. یعنی فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه درون n ضلعی P باشد ثابت کنید پای عمود وارد از M روی حداقل یکی از اضلاع P، درون آن ضلع قرار می‌گیرد.*

تمرین ۵. *فرض کنید l خطی گذرا از G، مرکز ثقل مثلث ABC، باشد. ثابت کنید مجموع جبری فاصله‌های رئوس A و B و C از l صفر است.*

تابع‌ها

اکبر عنبرجعفری

در این مقاله چند ویژگی ساده مربوط به تابع و تعاریف مربوط به تابع را می‌خوانیم و سپس چند مسألهٔ المپیادی مطرح می‌کنیم. اولین بخش کارمان در مورد تابع متناوب و مسایل مربوط به آن است.

تعریف ۱ . تابعی مانند f را متناوب می‌گوییم اگر و فقط اگر عدد حقیقیِ مثبتِ c وجود داشته باشد که

$$f(x+c)=f(x).$$

از جمله توابع متناوب می‌توان توابع مثلثاتی را نام برد.

مسأله‌ای را مطرح می‌کنیم که درکتاب‌های زیادی مطرح شده است.

مسأله ۱ . *اگر، $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}-\{0,1\}$ و g باشند و این ویژگی را داشته باشند که*

$$f(x+1)=\frac{g(x)}{f(x)}\ ,\ g(x+1)=\frac{g(x)-1}{f(x)-1}$$

آنگاه f و g متناوب هستند.

به نظر من بهتر است قبل از این‌که حل مسأله را نگاه کنید خودتان آن را حل کنید و قدری فکرتان را ورزش دهید!

حل. فرض کنید $h(x)=\frac{x}{x-1}$ باشد، در این‌صورت $h(h(x))=x$ و

$$g(x+2)=h(f(x))\qquad,\qquad f(x+3)=h(g(x))$$

بنابراین

$$f(x+5)=h(g(x+2))=h(h(f(x)))=f(x)$$

و

$$g(x+5)=h(f(x+3))=h(h(g(x)))=g(x)$$

یعنی f و g متناوب هستند. ∎

سعی کنید راه حل دیگری برای این مسأله ارایه دهید.

در ادامهٔ مقاله به مسایلی در رابطه با یافتن تابع‌هایی با شرایط خاص، می‌پردازیم. این قبیل مسایل بسیارند و راه‌حل‌های آن‌ها بسیار متنوع است. توجه کنید که در عین بسیار بودن راه‌حل‌ها، نوشتن حل این مسایل بسیار دشوار است.

اولین راهی که وجود دارد این است که با توجه به فرض مسأله تابعی را پیدا کنیم (نه لزوماً یکی). سپس ثابت کنیم این تابع یکتا است و در فرض مسأله نیز صدق می‌کند.

به مسألهٔ زیر توجه کنید:

شمارهٔ ۸

(بهمن ۱۳۸۰) صص ۲۱ــ۱۹

مسأله ۲ . همهٔ توابع f، $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ را بیابید که:

$$f(x,x)=x$$

$$f(x,y)=f(y,x)$$

$$(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$$

خودتان چه راهی را پیشنهاد می‌کنید، راه خودتان را ادامه دهید تا به نتیجه برسید.

حل. فرض کنید تابع f ویژگی‌های مورد نظر ما را دارد. از شرط‌های دوم و سوم مسأله نتیجه می‌شود که اگر مقدارهای f به ازای همهٔ زوج‌های (u,v) با شرط $u+v<x+y$ را بدانیم، می‌توانیم مقدار $f(x,y)$ را برای $(x\neq y)$ بیابیم. بنابراین جواب مسأله یکتا است. اگر $f(x,y)$ را کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y بگیریم، معلوم است که شرط‌های اول و دوم درست‌اند و چون

$$(x+y)[x,y]=(x+y)\frac{xy}{(x,y)}=\frac{(x+y)xy}{(x,x+y)}=y[x,x+y]$$

پس شرط سوم هم درست است (منظور از $[x,y]$، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y و منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است). ∎

مسأله ۳ . همهٔ توابع پیوسته مانند f را بیابید که

$$f(x^{۲})=\frac{f(x)}{x}.$$

حل. فرض کنید f ویژگی مورد نظر ما را داشته باشد؛ در این‌صورت

$$f(x)=\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

با استقرایی ساده می‌توان نتیجه گرفت که اگر n عددی طبیعی باشد،

$$f(x)=\frac{f(\sqrt[۲^n]{x})}{x^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}}}=\frac{f(\sqrt[۲^n]{x})}{x^{۱-\frac{۱}{۲^n}}}$$

بنابراین وقتی‌که $n\longrightarrow\infty$، از پیوستگی f نتیجه می‌شود که

$$f(x)=\frac{f(۱)}{x}$$

پس $f(x)=\frac{c}{x}$، ویژگی مورد نظر ما را دارد. ∎

حال به بیان یک مسأله سخت‌تر می‌پردازیم و آن را حل می‌کنیم و چند نمونه در اختیار شما می‌گذاریم.

مسأله ۴ . n عددی طبیعی است و $n\geq ۲$. ثابت کنید تابعی مانند $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ وجود دارد که

$$f(x)+f(۲x)+\cdots+f(nx)=۰$$

و فقط و فقط وقتی $f(x)=۰$ که $x=۰$.

خوب، مسألهٔ فوق کمی مشکل‌تر از مسایل دیگر است ولی این مسأله بسیار زیبا است.
اینک به حل مسألهٔ فوق می‌پردازیم. شما هم دست به کار شوید.

حل. $n > x \geq ۱$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f(x) = ۱$. اگر

$$n\left(\frac{n}{n-۱}\right)^k \leq x < n\left(\frac{n}{n-۱}\right)^{k+۱} \qquad (k \geq ۰)$$

f را این‌طور تعریف می‌کنیم

$$f(x) = -\sum_{i=۱}^{n-۱} f\left(\frac{ix}{n}\right) \qquad (*)$$

و اگر

$$۲^{-k-۱} \leq x < ۲^{-k} \qquad (k \geq ۰)$$

f را این‌طور تعریف می‌کنیم

$$f(x) = -\sum_{n=۱}^{n} f(ix) \qquad (**)$$

سرانجام اگر $x < ۰$، $f(x) = -f(-x)$ و فرض کنید $f(۰) = ۰$.

به این ترتیب f در شرط مسأله صدق می‌کند و از تساوی‌های $(*)$ و $(**)$ معلوم است که اگر $x > ۰$ آن وقت $n|f(x) - ۱$
بنابراین فقط وقتی $f(x) = ۰$ که $x = ۰$.

مطمئناً در نگاه اول شما حدس می‌زنید که تابعی جز $f(x) = ۰$ وجود ندارد اما این غلط است و باید بیشتر فکر کنید. ∎

حال به چند مسأله طرح شده توجه کنید و سعی کنید آن‌ها را حل کنید و راه‌حل خود را برای ما ارسال کنید.

۱) همهٔ توابع پیوستهٔ $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم

$$f(x+y) + g(xy) = h(x) + h(y).$$

۲) اگر n عددی طبیعی و بزرگ‌تر یا مساویِ ۲ باشد $(n \geq ۲)$ همهٔ توابعِ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که اگر $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n.$$

۳) همهٔ توابع f را بیابید که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(f(x)) = x^۲ - ۲$$

۴) همهٔ توابع غیرهمانی مانند $f : I \to \mathbb{R}$ را بیابید (I قطعه‌ای (بازه‌ای) از اعداد حقیقی است) که اگر به‌ازای عدد طبیعیِ $n \geq ۲$، ترکیبِ n بار f با خود، تابع همانی شود، $fof(x)$ همانی باشد.

• اکبر عنبرجعفری، دانش‌آموز مرکز آموزشی شهید سلطانی کرج

روش‌هایی برای اثبات واگرایی سری همساز

شهریار فرهمندراد

درکتاب‌های دبیرستانی و دانشگاهی مربوط به حساب دیفرانسیل وانتگرال، هنگامی‌که راجع به سری همساز $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ بحث می‌شود، برای اثبات واگرایی سری، دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن را تشکیل داده به‌کمک استقرا ثابت می‌کنیم صعودی و بی‌کران است و بنابر این واگرایی این دنباله، واگرایی سری همساز را نتیجه می‌دهد.

حال دو روش مؤثر و زیبا وکاملاً مقدماتی برای اثبات واگرایی سری همساز ارایه می‌دهیم.

روش اول. فرض کنیم سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad (1)$$

همگرا باشد. مجموع آن را با S نشان می‌دهیم. داریم

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots \qquad (2)$$

حال (۲) را از (۱) کم می‌کنیم

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\cdots \qquad (3)$$

و با کم کردن (۲) را از (۳) خواهیم داشت

$$0=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times 2n}+\cdots$$

که آشکارا تناقض است.

روش دوم. می‌دانیم که در هر سری همگرا با جملات مثبت، پرانتزگذاری مجاز است و سری دوم به همان حاصل سری اولیه همگراست.

فرض می‌کنیم سری $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ به S همگرا باشد. با توجه به توضیح بالا سری حاصل از پرانتزگذاری در آن نیز به S همگرا خواهد بود و می‌توان نوشت

$$S=(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})+\cdots$$

چون $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$،

$$S>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

و بنابر این $S>S$، که تناقض است.

• شهریار فرهمندراد، عضو هیأت علمی گروه ریاضی سازمان مرکزی دانشگاه پیام‌نور

شمارهٔ ۸
بهمن ۱۳۸۰ | صص ۲۲ـ۲۴

مسأله‌های درسی

رؤیا درودی

• ریاضیات ۱

۱) اگر نقاط $A(0,1)$ و $B(-2,0)$ و $C(0,0)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات مرکز ثقل این مثلث را به‌دست آورید.

۲) مختصات نقطه‌ای را به‌دست آورید که از محور xها، محور yها و خط $3x+4y=2$ به یک فاصله باشد.

۳) اگر ریشه‌های معادلهٔ $(m-2)x^2+x-2m=0$ عکس ریشه‌های معادلهٔ $(m+3)x^2+(2-m)x-1=0$ باشند، m را به‌دست آورید.

۴) کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ را گویا کنید.

• ریاضیات ۲

۱) حاصل عبارت $\frac{10}{logn}(logn+logn^2+\ldots+logn^{2n})$ را به‌دست آورید.

۲) با فرض $4^{sin^2\alpha}-4^{cos^2\alpha}=\sqrt{2}$، مقدار عددی $4^{sin^2\alpha}$ را به‌دست آورید.

۳) نقطهٔ $(3,\sqrt{3})$ را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ $\angle\alpha$ دوران داده‌ایم. اگر مختصات این نقطه بعد از دوران $(-2\sqrt{3},0)$ باشد، $\angle\alpha$ را به‌دست آورید.

۴) اگر $a\neq\pm1$ و $A=\begin{bmatrix}a & 1\\ -1 & -a\end{bmatrix}$، حاصل $(A^2)^{-1}$ را به‌دست آورید.

• هندسه

۱) در مثلثی $\angle A=50^\circ$ و $\angle B=60^\circ$، زاویهٔ بین نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الساقین به زاویهٔ 120° و ارتفاع وارد بر قاعده ۲ سانتی‌متر است. محیط مثلث را به‌دست آورید.

۳) در مثلث $ABC(\angle A=90^\circ)$ زاویهٔ بین ارتفاع AH و میانهٔ AM برابر 20° است. نسبت زوایای B و C را به‌دست آورید.

۴) در مثلث ABC که $a=6$ و $b=5$ و $c=3$، طول تصویر میانهٔ m_b بر ضلع b را به‌دست آورید.

• جبر و احتمال

۱) از ظرفی که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است، دو مهره (پی‌درپی و بدون جای‌گذاری) خارج می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول و B پیشامد سیاه بودن مهرهٔ دوم باشد. آیا A و B مستقل‌اند؟

۲) دو عدد به تصادف در فاصلهٔ $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع آنها بین ۰/۵ و ۱/۵ شود چقدر است؟

۳) سه کیسه داریم. در کیسهٔ اول ۵ کارت قرمز و ۸ کارت زرد، در کیسهٔ دوم ۴ کارت قرمز و ۶ کارت زرد و در سومی ۹ کارت قرمز و ۴ کارت زرد قرار دارند. کارت‌ها هم‌اندازه و هم‌شکلند. با چشم بسته کارتی را از کیسه اول درآورده و در کیسهٔ دوم قرار می‌دهیم. سپس کارتی را از کیسهٔ دوم درآورده و در کیسهٔ سوم قرار می‌دهیم. حال اگر از کیسهٔ سوم کارتی را بیرون بیاوریم، مطلوب است احتمال این‌که این کارت قرمز باشد.

۴) عدد a به تصادف در بازهٔ $(-1,1)$ انتخاب می‌شود و به عنوان ضریب در معادلهٔ درجه دوم $ax^2-3x+4=0$ به کار می‌رود. احتمال آن‌که این معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد چه‌قدر است؟

همان سؤال را برای معادلهٔ $x^2-ax+4=0$ نیز پاسخ دهید.

شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۰) صص ؟؟ ـ ۲۳

• **حسابان**

۱) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x-\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}}$ محور oy را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۲) اگر $f(x)=x^n$ ثابت کنید:

$$f(1)+\frac{f^{(1)}(1)}{1!}+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$$

(منظور از $f^n(a)$ مشتق n-ام تابع f در نقطهٔ a است.)

۳) اگر f در a مشتق‌پذیر باشد ثابت کنید

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۴) مشتق راست تابع $f(x)=x^2+x[x]$ در $x=0$ از مشتق چپ آن چه‌قدر بیشتر است؟

• **حساب دیفرانسیل و انتگرال**

۱) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن اکیداً صعودی باشد. ثابت کنید هر خط مماس بر نمودار f آن را در نقطه‌ای غیر از نقطهٔ تماس قطع نمی‌کند.

۲) ماکزیمم تابع $f(x)=x^3-3x$ را بر مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی که در نامساوی $x^4+36\leq 13x^2$ صدق می‌کنند بیابید.

۳) فرض کنید f به‌ازای $x\geq 0$ پیوسته و به‌ازای $x>0$ مشتق‌پذیر بوده و $f(0)=0$. به‌علاوه فرض کنید f' اکیداً صعودی است. نشان دهید تابع $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$، به ازای $x>0$ صعودی است.

۴) تابع $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ دارای مشتق دوم پیوسته بوده و رابطهٔ $f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)\geq 0$ همواره برقرار است. ثابت کنید f نمی‌تواند در فاصلهٔ $(0,1)$ دارای نقطهٔ ماکزیمم با مقدار ماکزیمم مثبت باشد.

• **هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی**

۱) A ماتریسی $n\times n$ با دترمینان ناصفر است، ثابت کنید:

(الف) $A^*=|A|^{n-1}$ (ب) $(A^*)^*=|A|^{(n-1)^2}A$

۲) معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

$(a>b>0)$

چند ریشهٔ متمایز دارد؟

۳) درایه‌های هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}^{159}$ (ب) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{159}$

۴) بدون بسط و با استفاده از ویژگی‌های دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+c & 1+c^3 & 1-c^2 \\ 1+a & 1+a^3 & 1-a^2 \\ 1+b & 1+b^3 & 1-b^2 \end{vmatrix}=(1+c)(1+b)(1+a)\begin{vmatrix} 1 & c & c^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$$

• **ریاضیات گسسته**

۱) یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر شمارهٔ تاسهای نشسته متفاوت باشد، احتمال زوج بودن مجموع آنها چقدر است.

۲) در دانشکده‌ای ۲۵% پسرها و ۱۰% دخترها ریاضیات تحصیل می‌کنند. دخترها، ۶۰% مجموع دانشجویان را تشکیل می‌دهند. اگر دانشجویی به‌طور تصادفی انتخاب شود و این دانشجو، مشغول تحصیل ریاضیات باشد، احتمال دختر بودن او را تعیین کنید.

۳) به‌وسیلهٔ تلگراف می‌خواهیم یک پیام را مخابره کنیم. می‌دانیم پیام‌ها از خط و نقطه تشکیل یافته‌اند. احتمال آن که هر یک از این علائم درست مخابره شود ۸% است. به تجربه دریافته‌ایم که در هر متنی نسبت خط‌ها به نقطه‌ها ۶ به ۴ است. مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) علامت خط به‌صورت خط دریافت شود.

ب) علامت -∘ به‌صورت -- دریافت شود.

ج) اگر نماد دریافت شده خط باشد احتمال آن که نقطه مخابره شده باشد چه‌قدر است؟

د) اگر ده نماد مخابره شود، احتمال آن که دست‌کم ۸ تای آن‌ها صحیح مخابره شده باشد چه‌قدر است؟

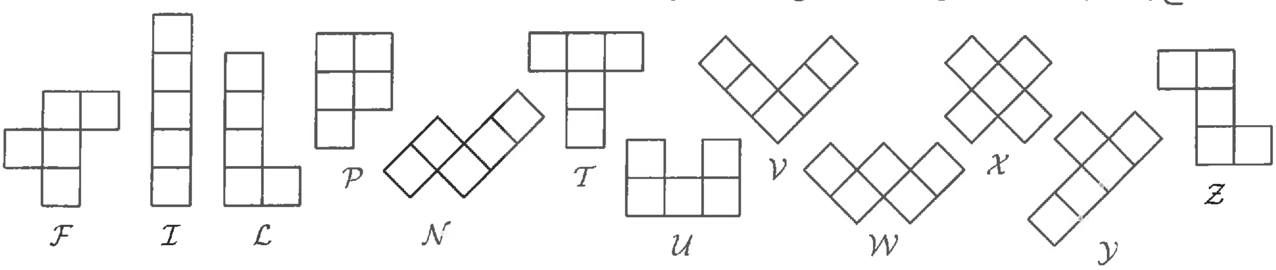
۴) دو عدد به تصادف در فاصلهٔ $(0,2)$ انتخاب شده است. می‌دانیم مجموع آن‌ها بیش از ۱ است. احتمال آن‌که بیش از ۳ نیز باشد چه‌قدر است؟

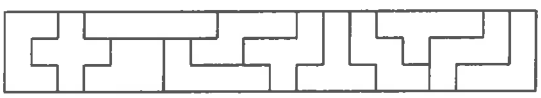
صفحه‌رو پُرکُن!

مانی رضائی

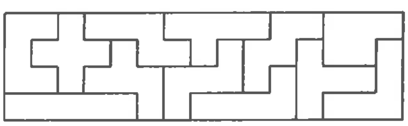
پلیومینوها اشیایی هستند که از مربع‌های هم‌اندازه تشکیل شده و در طول یک یال کامل به هم چسبیده‌اند. پلیومینو **polyomino** کلمه‌ای ترکیبی است و از دومینو اقتباس شده که ابتدای آن از کلمه‌ی **poly**_gon_ (چندضلعی) و انتهای آن از _d_**omino** (دومینو) گرفته شده است. پلیومینوها را می‌توان تعمیمی از دومینو در نظر گرفت.

پنتومینو حالت خاصی از پلیومینوها است که از پنج مربع ساخته شده است(رجوع کنید به [۲]). با یک بررسی ساده می‌توان دید که دوازده نوع پنتومینوی متفاوت وجود دارد که شکل آن‌ها در زیر آمده است.

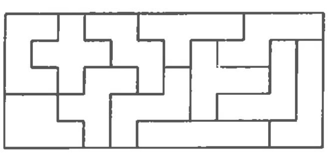




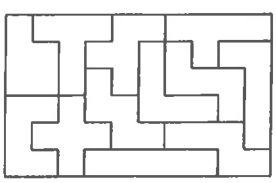
یکی از دو جواب برای مستطیل ۲۰ × ۳



یکی از ۳۶۸ جواب برای مستطیل ۱۵ × ۴



یکی از ۱۰۱۰ جواب برای ۱۲ × ۵



یکی از ۲۳۳۹ جواب برای ۱۰ × ۶

این نامگذاری اولین بار توسط گولوم انجام شد. وی درکتاب خود علاوه بر ارایه‌ی مطالب بدیع، که آن را مبدل به یکی از آثار کلاسیک ساخته است، معماهای متنوعی با پنتومینوها ارایه کرده است. ساختن مستطیل‌هایی با ابعاد ۱۰ × ۶، ۱۲ × ۵، ۱۵ × ۴، و ۲۰ × ۳، نمونه‌ای از این معماها است. برای هر یک از این ابعاد (بجز ۲۰ × ۳ با دو حالت) جواب‌های متعددی وجود دارد. ۳۶۸ حالت برای ساختن مستطیل ۱۵ × ۴ با همه‌ی پنتومینوها وجود دارد، و ۱۰۱۰ حالت برای مستطیل ۱۲ × ۵ و ۲۳۳۹ حالت برای مستطیل ۱۰ × ۶!!!

در نگاه نخست، ممکن است این موضوع یک سرگرمی و بازی ساده به نظر برسد و طرح مسایل گوناگون برای آن دشوار بنماید. اما نه تنها چنین نیست، بلکه با پنتومینوها می‌توان بازی‌های متنوعی انجام داد. پیش از معرفی بازی «صفحه‌رو پرکن» اشاره‌ای کوتاه به رده‌بندی بازی‌ها می‌کنیم.

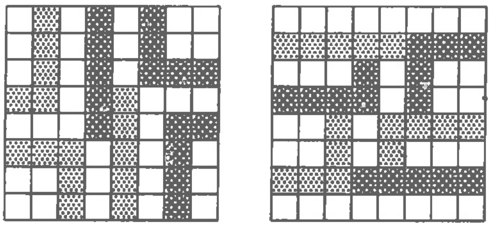
بازی‌های مورد بررسی را به بازی‌های دو نفره محدود می‌کنیم، زیرا در غیر این صورت تنوع بسیاری در بررسی حالتهای ممکن به‌وجود می‌آید. در بازی‌های دو نفره چنان چه عواملی تصادفی (مانند پرتاب تاس یا کشیدن ورق) مؤثر نباشد، مهمترین عامل بُرد، توانایی در استدلال و قدرت تجزیه و تحلیل است. به این مناسبت، این بازی‌ها _عادلانه_ نامیده می‌شوند. بازی‌های عادلانه به دو رده‌ی کلی تقسیم می‌شوند: در نوع اول نوبت بازی اهمیت دارد و نه مهره‌ای که با آن بازی می‌کنیم و مهره‌ها غالباً به شخص خاصی تعلق ندارد و از این بابت تفکیک نشده‌اند، به این علت آن‌ها را بازی‌های _بی‌طرفانه_ می‌نامیم. در نوع دوم هر بازیکن موظف است با مهره‌هایی که به وی تعلق دارد بازی کند و آرایش مهره‌ها در نتیجه‌ی بازی تأثیر دارد، این

شمارهٔ ۸، (بهمن ۱۳۸۰) صص ۲۲ـ۲۵

نوع بازی *پارتیزانی* نامیده می‌شود.

به راستی نمی‌توان از نقش بازی‌های عادلانه در آموزش غافل شد. وجود تنوع بسیار در این بازی‌ها و امکان ایجاد رقابت بین فراگیران، می‌تواند انگیزه‌ی مؤثری در پیش‌برد اهداف آموزشی فراهم کند. اما باید توجه داشت که هیجان بازی‌های پارتیزانی جذابیت بازی را برای فراگیران دوچندان می‌کند.

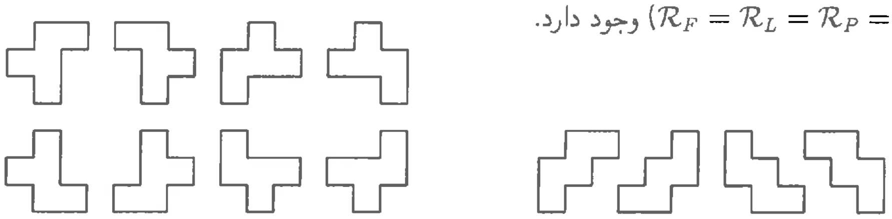
در بازی «عادلانه‌ی پارتیزانی» دو نفره‌ی **صفحه‌رو پُرکن** هر یک از دو بازیکن یک مجموعه‌ی کامل پنتومینو در اختیار دارند. بازیکنان به نوبت هر یک می‌توانند یک قطعه از مجموعه‌ی خود را طوری روی صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ قرار دهد که پنج خانه را کاملاً بپوشاند. بازیکنی که در نوبت خود نتواند قطعه‌ای روی صفحه قرار دهد، بازنده است.



دو نمونه از پایان بازی با سه قطعه‌ی I، L، و V

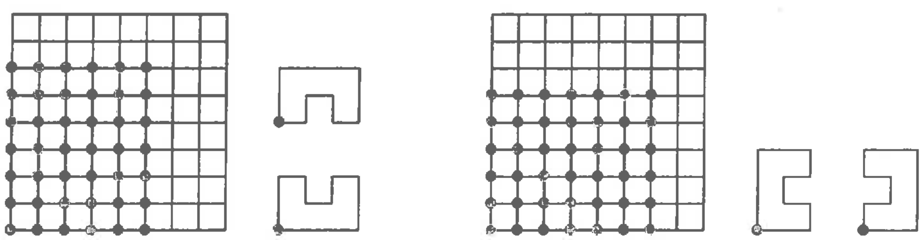
به سادگی می‌توان نشان داد در بازی «صفحه‌رو پرکن» صرف‌نظر از نوبت بازی، لااقل شش حرکت (سه حرکت برای هر یک از دو بازیکن) وجود دارد که پس از آن هیچ‌یک از دو طرف نمی‌توانند قطعه‌ای در صفحه قرار دهند. از طرف دیگر با توجه به این که هر قطعه دقیقاً پنج خانه را می‌پوشاند و صفحه‌ی بازی شامل ۶۴ مربع است، حداکثر دوازده حرکت (شش حرکت برای هر یک از دو بازیکن) وجود دارد. بنابر این هر بازیکن سه تا حداکثر شش قطعه از دوازده قطعه خود را می‌تواند روی صفحه قرار دهد. و در هر حال حداقل نیمی از قطعه‌ها در پایان بازی برای وی باقی می‌ماند.

در این بازی محدودیتی برای انتخاب یا قرار دادن قطعه‌ها روی صفحه وجود ندارد که این موضوع جذابیت و تنوع آن را بیش‌تر می‌کند. برای انتخاب قطعه‌ی اول و قرار دادن آن در صفحه، با حذف حالت‌های متقارن، ۳۴۶ حالت وجود دارد. این تعداد با در نظر گرفتن حالت‌های متقارن برابر با ۲۲۶۰ حالت می‌شود: برای نشاندن X تنها یک جهت ($\mathcal{R}_X =$ ۱)، I دو جهت ($\mathcal{R}_I =$ ۲)، T، U، V، W، و Z هر یک چهار جهت ($\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_U = \mathcal{R}_V = \mathcal{R}_W = \mathcal{R}_Z =$ ۴)، F، L، P، N، و Y هر کدام هشت جهت ($\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_L = \mathcal{R}_P = \mathcal{R}_N = \mathcal{R}_Y =$ ۸) وجود دارد.



نمایش چهار جهت برای W و هشت جهت برای F

از طرف دیگر برای نشاندن پنتومینوی U در صفحه (در هر یک از حالت‌های ممکن) ۴۲ مکان (۴۲ = ۷ × ۶ $= \mathcal{P}_U$)، و برای پنتومینوی I مشابهاً ۳۲ مکان (۳۲ = ۸ × ۴ $= \mathcal{P}_I$)، و به همین ترتیب برای F، P، T، V، W، X، Z هر یک ۳۶ مکان (۳۶ = ۶ × ۶ $= \mathcal{P}_F = \mathcal{P}_P = \mathcal{P}_T = \mathcal{P}_V = \mathcal{P}_W = \mathcal{P}_X = \mathcal{P}_Z$)، و برای L، N، Y هر یک ۳۵ مکان (۳۵ = ۷ × ۵ $= \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_N = \mathcal{P}_Y$) وجود دارد.



۴۲ مکانی که U می‌تواند در آن قرار گیرد با نقطه‌های متناظر مشخص شده‌اند

بدین ترتیب با انتخاب هر قطعه تعداد راه‌های قرار دادن آن در صفحه برابر با $\mathcal{R}_p \times \mathcal{P}_p$ است. پس

$$\text{تعداد راه‌های قرار دادن اولین پنتومینو روی صفحه} = \sum_{p\in\{\text{Pentominoes}\}} \mathcal{P}_p \times \mathcal{R}_p = ۲۲۶۰$$

برای قرار دادن قطعه دوم (اولین قطعه از مجموعه‌ی پنتومینوهای نفر دوم) تعداد انتخاب‌ها تقریباً برابر با حالت‌های متقارنی است که قطعه اول می‌تواند در صفحه قرارگیرد. بنابر این تعداد راه‌های ممکن برای رسیدن به نوبت دوم حرکات حدود $7/8 \times 10^5$ حالت می‌باشد.

بدین ترتیب شروع بازی (حرکت اول هر یک از بازیکنان) بسیار متنوع است و با وجود این که با هر حرکت تعداد حالت‌ها کم‌تر می‌شود و تا پایان بازی هر بازیکن حداکثر شش حرکت انجام می‌دهد. اما بررسی همه‌ی حالتهای بازی، ناممکن به نظر می‌رسد (تلاش برای شمارش تعداد حالت‌های ممکن تا پایان بازی خالی از لطف نیست.).

وجود یا عدم‌وجود راهبرد پیروزی برای این بازی تاکنون بی‌پاسخ مانده است. با این حال می‌توان روش‌هایی در پیش گرفت که امکان برنده شدن را بیش‌تر کند. این روش‌ها را می‌توان با توجه به عوامل زیر شناسایی کرد:

۱) **زوجیت.** اگر تعداد قطعه‌هایی که تا پایان بازی روی صفحه قرار می‌گیرد زوج باشد، نفر دوم و اگر فرد باشد، نفر اول برنده می‌شود. توجه کنید که تعداد حرکات ممکن در بازی (برای هر دو نفر) از ۶ تا ۱۲ حرکت است.

۲) **موقعیت خصوصی.** بعد از قرار دادن یک قطعه، نفر بعدی می‌تواند ناحیه‌ای خالی منطبق با قطعه‌ی مذکور به وجود آورد و امکانی منحصر به خود در بازی ایجاد کند.

۳) **تقابل.** با قرار دادن مهره‌های همانند می‌توان صفحه را به دو ناحیه همنهشت تقسیم کرد و به ازای هر انتخاب و حرکت توسط نفر اول، نفر بعدی می‌تواند با انجام حرکت متقابل تا پایان بازی برای خود امکان قرار دادن یک قطعه را حفظ کند.

باید توجه داشت، بین یافتن راهبرد پیروزی و مهارت در بازی تفاوت بسیاری وجود دارد. ممکن است با توجه به ویژگی‌های بازی راهبرد پیروزی را یافت لیکن کسب مهارت در بازی می‌تواند به یافتن راهبرد پیروزی یاری رساند. بنابر این در صورتی که علاقه به یافتن راهبرد پیروزی دارید می‌توانید با ساختن این قطعه‌ها به بازی بپردازید. این قطعه‌ها را می‌توانید با مقوا (یا سه‌لایی چوبی) ببُرید و با دو رنگ آن‌ها را از هم متمایز کنید. و اگر نخواهید مهارت خود را در ساخت این قطعه‌ها اثبات کنید، می‌توانید در وسایل بازی **کانون پرورش فکری کودکان و نوجوانان** یک مجموعه از پنتومینوها را همراه با صفحه مستطیلی 6×10 با نام تجاری «معمای جورچین» بیابید.

مراجع.

[۱] مانی رضائی. استراتژیِ بردِ بازیهای عادلانه، کنفرانس ریاضیات برای همه، سنندج، تیر ۱۳۷۹.

[۲] سپیده چمن‌آرا، مانی رضائی. **دومینو، سه‌مینو، چهارمینو، پنج‌مینو!!** ماهنامه ریاضیات، همین شماره.

[3] Solomon W. Golomb. *Polyominoes.* (2nd Ed.) Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1994.

آمادگی برای المپیاد ریاضی ۸

هادی سلماسیان

۱۴. بیایید قدری به موضوع بند ۹ برگردیم. در آن‌جا هدف ما بررسی معادله‌های دیوفانتی بود (البته نه آن‌هایی که به دشواری مسأله فرما هستند!). این بار هم می‌خواهم از ابتدا با چند مثال شروع کنم.

مثال ۱. همهٔ جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ دیوفانتی $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=3$ را بیابید.

روشن است که $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\geq 2\sqrt{\frac{x}{z}}$ (خودتان نامساوی را ثابت کنید!) به دلیل مشابه $\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}}$. با استدلالی مشابه می‌شود دید که $\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\geq 2$، و بنابراین $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\geq 4$. یعنی هیچ جوابی برای معادلهٔ ذکر شده وجود ندارد!

اگر خوب دقت کنید، فقط از نامساوی‌هایی که برای عددهای حقیقی و مثبت x,y,z,t هم برقرارند استفاده کردیم. خودتان بررسی کنید که با همین روش، با توجه به این که چه موقع نامساوی‌های ذکر شده به تساوی منجر می‌شوند، می‌شود نشان داد که همهٔ جواب‌های $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=4$، به صورت $x=y=z=t$ هستند. می‌توانید از نامساوی زیر، که به نابرابری میانگین‌های حسابی — هندسی معروف است، کمک بگیرید و معادلهٔ دیوفانتی $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=n$ را حل کنید.

نابرابری میانگین‌های حسابی — هندسی: اگر $a_1,a_2,\cdots,a_n$ عددهای حقیقی و نامنفی باشند،

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

مثال خیلی سادهٔ بالا نشان داد که گاهی استفاده از نابرابری‌ها می‌تواند در حل معادله‌های دیوفانتی کمک کند.

تمرین ۱. *همهٔ عددهای صحیح x_1,x_2,x_3,x_4 را بیابید که* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=1$.

(راهنمایی. روشن است که کافی است که فرض کنیم x_i ها مثبت هستند. فرض کنید $x_4\leq x_3\leq x_2\leq x_1$. نشان دهید $x_1\leq 2$ پس دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: $\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_2^2}=0$، یا $\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{3}{4}$. به همین شیوه ادامه دهید...!)

تمرین بعدی، مسالهٔ جدی‌تری را مطرح می‌کند، که بر حسب تصادف، شباهت غریبی به مسالهٔ فرما[1] دارد(!)

تمرین ۲. *همهٔ جواب‌های معادلهٔ دیوفانتی $n^x+n^y=n^z$ را، با این فرض که n,x,y,z عددهای صحیح و مثبت هستند، بیابید.*

(راهنمایی. فرض کنید $x\leq y\leq z$. نهایتاً باید به تنها دسته جواب $y=t, z=t+1$ و $n=2, x=t$ برسید.)

برای این‌که بتوانیم بررسی عمیق‌تری انجام دهیم، لازم است که به شما قدری نظریه اعداد مقدماتی بیاموزیم! بگذارید با یک نمادگذاری شروع کنیم. فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند. اگر $a-b$ بر عدد صحیح و مثبت m بخش‌پذیر باشد، روشن است که باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم a و b بر m، یکی است. در این صورت می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$[2].

۱) Pierre de Fermat ریاضیدان قرن هفدهم فرانسوی

۲) ممکن است در متن‌های دیگر با نمادگذاری $a\equiv b \pmod{m}$ هم مواجه شوید.

برای مثال، $2 \overset{5}{\equiv} 7$ یا $7 \overset{10}{\equiv} -3$ یا $3m^2+1 \overset{m}{\equiv} 1$.

فرض کنید p عددی اول باشد و a عددی صحیح، طوری که $(a,p)=1$ [1]. به دنبالهٔ عددهای $a, a^2, a^3, \dots$ نگاه کنید. هیچ‌کدام از اعضای این دنباله بر p بخش‌پذیر نیست. پس برای هیچ مقدار k، $a^k \overset{p}{\equiv} 0$ برقرار نیست. از سوی دیگر، هر عددی در تقسیم بر p به یکی از باقی‌مانده‌های $0, 1, \dots, p-1$ می‌تواند برسد (در دبستان آموخته‌اید که باقی‌مانده از خارج قسمت کوچک‌تر است!). بنابراین بین عددهای $a, a^2, \dots, a^p$، دوتایشان در تقسیم بر p به باقی‌مانده‌های یکسان می‌رسند. یعنی عددهای صحیح و مثبت $0 < k < l \le p$ وجود دارند که $a^k \overset{p}{\equiv} a^l$. بنابراین باید $p \mid a^k - a^l$. ولی $(p,a)=1$ و $p \mid a^k(1-a^{l-k})$. یعنی $p \mid a^{l-k}-1$، و به عبارتی، نتیجه می‌شود که عدد صحیح و مثبت n، که $1 \le n \le p-1$، وجود دارد چنان‌که $a^n \overset{p}{\equiv} 1$. فرما، نتیجهٔ دقیق‌تری را ثابت کرد.

قضیه ۱. *(قضیهٔ کوچک فرما.) اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح که نسبت به p اول است، $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.*

تمرین ۳. *قضیهٔ کوچک فرما را ثابت کنید!*

(راهنمایی. از استقرا روی a استفاده کنید. دقت کنید که کافی است نشان دهید $a^p \overset{p}{\equiv} a$. اما از سوی دیگر، با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن که در بند ۱۰ مطرح شد، می‌توان نوشت:

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a + 1$$

به کمک رابطهٔ صریح $\binom{n}{k}$، نشان دهید $\binom{p}{1}$، $\binom{p}{2}$، $\cdots$، $\binom{p}{p-1}$ بر p بخش‌پذیرند. پس با کمک فرض استقرا، نتیجه می‌شود $(a+1)^p \overset{p}{\equiv} a+1$.)

مثال ۲. همهٔ جواب‌های صحیح و مثبت $4xy - x - y = z^2$ را بیابید. دقت کنید که $4z^2 + 1 = (4x-1)(4y-1)$.

به‌راحتی می‌شود نشان داد که هر عدد صحیح و مثبت که در تقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ ۳ می‌رسد، دارای مقسوم‌علیه اولی است که آن هم در تقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ ۳ می‌رسد. در حقیقت همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول چنین عددی، فرد هستند؛ پس در تقسیم بر ۴ به یکی از باقی‌مانده‌های ۱ یا ۳ می‌رسند. به علاوه، اگر A و B دو عدد صحیح مثبت باشند که باقی‌مانده‌های هر دوی آن‌ها در تقسیم بر ۴ مساوی ۱ باشد، AB هم همین خاصیت را خواهد داشت، زیرا از $A = 4A_1 + 1$ و $B = 4B_1 + 1$ نتیجه می‌شود

$$AB = 4(4A_1B_1 + A_1 + B_1) + 1$$

بنابر این همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول $4x-1$ (و همین‌طور $4y-1$) نمی‌توانند به شکل $4t+1$ باشند ($t \in \mathbb{Z}$). یعنی عدد اول p وجود دارد که $p \mid 4x-1$ و $p \overset{4}{\equiv} 3$. چون $p \mid 4z^2+1$، باید z و p نسبت به هم اول باشند. توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ فرما نتیجه می‌شود

$$1 \overset{p}{\equiv} (2z)^{p-1} \overset{p}{\equiv} (4z^2)^{\frac{p-1}{2}} \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \overset{p}{\equiv} -1$$

($p \overset{4}{\equiv} 3$ نتیجه می‌دهد که $\frac{p-1}{2}$ عدد صحیح فردی است.)

ولی نتیجهٔ نهایی، امکان ندارد زیرا $-1 \overset{p}{\equiv} 1$ نتیجه می‌دهد که $p = 1$ یا $p = 2$ در حالی‌که p فرد و اول است.

تمرین ۴. *ثابت کنید اگر p عددی اول باشد که $p \overset{4}{\equiv} 3$، نمی‌توان p را به صورت مجموع دو عدد صحیح که مربع کامل هستند نوشت (یعنی هیچ دو عدد صحیح x و y وجود ندارد که $p = x^2 + y^2$).*

۱) این نماد را قبلاً هم به‌کار برده‌ایم. معنای آن این است که a و p نسبت به هم اولند؛ یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها، ۱ است.

این سؤال که چه عددهای اولی را می‌توان به‌صورت جمع دو مربع کامل نوشت، توسط فرما حل شده است. در حقیقت، همهٔ عددهای اول، مگر آن‌هایی که در تمرین ۴ کنارگذاشته می‌شوند، دارای این خاصیت هستند. این سؤال که اصولاً چه عددهایی صحیحی را می‌توان به‌صورت $x^{2}+My^{2}$، $Ax^{2}+By^{2}$، $x^{2}+y^{2}+z^{2}$، $\cdots$ (که A، B و M ثابت هستند و x، y و z می‌توانند تغییر کنند) بیان کرد، ذهن ریاضیدان‌های بسیاری را به خودش مشغول کرده است، و جالب این‌جاست که هنوز هم این مسأله حل نشده است! فرما روی «مسألهٔ آخر» خودش کار کرده و اثباتی برای حالت $n=4$ ارایه می‌کند؛ ولی بعداً در حاشیهٔ آن اثبات نوشته است «من برای حالت کلی (n دلخواه) اثبات شگفت‌آوری پیدا کرده‌ام، اما متأسفانه در این حاشیه نمی‌گنجد»! در حقیقت، آن‌چه فرما ثابت کرده است، نشان می‌دهد که تنها جواب‌های $x^{4}+y^{4}=z^{2}$، در اعداد صحیح، آن‌هایی هستند که دست‌کم یکی از x و y صفرند.

تمرین ۵. *همهٔ جواب‌های صحیح معادلهٔ $ay^{3}-4a^{3}b^{4}y=z^{2}$ را برای a، b، y و z بیابید.*

(راهنمایی. معادلهٔ درجهٔ دوم $ay^{3}X^{2}-z^{2}X-4ab^{4}y=0$ را در نظر بگیرید. $X=1$ یک ریشهٔ این معادله است. پس با توجه به صحیح بودن ضریب‌ها، و دستور حل معادلهٔ درجهٔ دوم، چون $X=\dfrac{z^{2}\pm\sqrt{z^{4}+(2aby)^{4}}}{2ay^{3}}$، باید مقدار عبارت $z^{4}+(2aby)^{4}$ مربع کامل باشد. از آنچه فرما ثابت کرده استفاده کنید و مسأله را حل کنید!)

دیدید که حل مسألهٔ پیچیدهٔ بالا، منجر به حل یکی از مسائلی شد که پاسخش را «می‌دانیم». اما ذکر این‌که فرما چگونه این مسأله را حل کرده را موکول به بعد می‌کنم. در عوض، «می‌خواهم یک شیوهٔ جالب دیگر برای حل معادله‌های دیوفانتی، به‌ویژه برخی از آن‌هایی که بی‌نهایت دستهٔ جواب دارند، مطرح کنم.

مثال ۳. همهٔ جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x^{2}-xy-y^{2}=1$ را بیابید.

فرض کنید $(\tilde{x},\tilde{y})$ یک جواب از معادلهٔ ذکر شده باشد. اگر این معادله را به عنوان یک عبارت درجه دوم بر حسب x در نظر بگیریم (یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم $X^{2}-\tilde{y}X-\tilde{y}^{2}-1=0$ را در نظر بگیریم)، طبق دستور حل معادلهٔ درجه دوم، $X=\dfrac{\tilde{y}\pm\sqrt{5\tilde{y}^{2}+4}}{2}$.

اما یکی از این دو ریشه، $X=\tilde{x}$ است که عددی صحیح است. پس $\sqrt{5\tilde{y}^{2}+4}$ هم عددی صحیح است و $\tilde{y}\pm\sqrt{5\tilde{y}^{2}+4}$ هر دو زوج هستند (چرا؟) یعنی ریشهٔ دیگر این معادله هم، عددی صحیح است. ریشهٔ دیگر، با توجه به رابطه‌های ذکر شده، برابر است با $\tilde{y}-\tilde{x}$. پس اگر $(\tilde{x},\tilde{y})$ جوابی از معادله باشد، $(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{y})$ نیز جوابی از معادله است. با در نظرگرفتن معادله بر حسب y (یعنی $Y^{2}+\tilde{x}Y-\tilde{x}^{2}+1=0$)، به طور مشابه به این نتیجه می‌رسیم که اگر $(\tilde{x},\tilde{y})$ جوابی از معادلهٔ ذکر شده باشد، $(\tilde{x},-\tilde{x}-\tilde{y})$ هم جوابی از آن است (دقت کنید که جواب‌های حاصل، لزوماً مثبت نیست؛ ولی هر دو مقدارهایی صحیح دارند. روشن است که از هر جواب $(\tilde{x},\tilde{y})$ به جواب $(-\tilde{x},-\tilde{y})$ هم می‌توان رسید. بنابراین با تکرار این عمل‌ها، می‌شود دید که جواب‌ها به شکل زیر تغییر می‌کنند.

$$(\tilde{x},\tilde{y})\longrightarrow(\tilde{y}-\tilde{x},\tilde{y})\longrightarrow(\tilde{y}-\tilde{x},-2\tilde{y}+\tilde{x})\longrightarrow(\tilde{x}-\tilde{y},2\tilde{y}-\tilde{x})$$

چون $\tilde{x}^{2}>\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^{2}+1$، برای هر جواب $(\tilde{x},\tilde{y})$ که $\tilde{x}\tilde{y}>0$، روشن است که $\tilde{y}\geq\tilde{x}$. همین‌طور، روشن است که $\tilde{x}\geq 2\tilde{y}$؛ زیرا اگر $\tilde{x}>2\tilde{y}$،

$$1=\tilde{x}^{2}-\tilde{x}\tilde{y}-\tilde{y}^{2}=\tilde{x}(\tilde{x}-\tilde{y})-\tilde{y}^{2}>2\tilde{y}(2\tilde{y}-\tilde{y})-\tilde{y}^{2}=\tilde{y}^{2}\geq 1$$

که امکان ندارد. بنابر این از روی هر جواب $(\tilde{x},\tilde{y})$ که $\tilde{x},\tilde{y}$ صحیح و مثبت هستند می‌شود به یک جواب $(\tilde{x}-\tilde{y},2\tilde{y}-\tilde{x})$ رسید که در این جواب هم، $\tilde{y}-\tilde{x}$ و $\tilde{x}-2\tilde{y}$ عددهای صحیح و نامنفی هستند. ضمناً مجموع مؤلفه‌های این جواب، از مجموع مؤلفه‌های جواب اولیه کم‌تر است، زیرا

$$2\tilde{x}-\tilde{y}+(2\tilde{y}-\tilde{x})\ =\tilde{y}\ <\tilde{x}+\tilde{y}$$

با تکرار این عمل‌ها نهایتاً باید زمانی متوقف شویم (چرا؟) و این فقط زمانی رخ می‌دهد که دست‌کم یکی از مؤلفه‌های جواب به‌دست آمده، صفر باشد. یعنی $\tilde{x}=2\tilde{y}$ یا $\tilde{x}=\tilde{y}$. محاسبهٔ ساده‌ای (با جای‌گذاری در معادلهٔ اولیه) نشان می‌دهد که تنها جواب ممکن،

$(\text{۲}, \text{۱})=(x,y)$ است. اما روشن است که از رابطهٔ $(x_\text{۱}, y_\text{۱})=(x-\text{۱}, \text{۲}y-x)$ نتیجه می‌شود

$$(x,y)=(\text{۲}x_\text{۱}+y_\text{۱}, x_\text{۱}+y_\text{۱})$$

یعنی همهٔ جواب‌های معادلهٔ اولیه، از روی جواب (۲،۱)، با تکرار عمل‌های بالا، یعنی تبدیل یک جواب $(\tilde{x},\tilde{y})$ به جواب $(\text{۲}\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{x}+\tilde{y})$، به‌دست می‌آیند (ثابت کنید $(\text{۲}\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{x}+\tilde{y})$ واقعاً در معادله صدق می‌کند!) چند جواب اول را در زیر محاسبه کرده‌ایم.

$$(\text{۲},\text{۱}) \rightsquigarrow (\text{۵},\text{۳}) \rightsquigarrow (\text{۱۳},\text{۸}) \rightsquigarrow (\text{۳۴},\text{۲۱}) \rightsquigarrow \cdots$$

تمرین ۶. *نشان دهید در دنبالهٔ نامتناهی عددهای طبیعی $\text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \text{۵}, \text{۸}, \text{۱۳}, \text{۲۱}, \cdots$ که از چیدن مؤلفه‌های جواب‌های مختلف معادلهٔ ذکر شده به ترتیبِ اکیداً صعودی به دست می‌آید، هر عضو دنباله مساوی با مجموع آن دو عضو دنباله است که بلافاصله سمت چپ آن عضو قرار دارند. آیا می‌توانید حدس بزنید نسبت دو عضو متوالی دنباله (یعنی $\frac{\text{۲}}{\text{۱}}, \frac{\text{۳}}{\text{۲}}, \frac{\text{۵}}{\text{۳}}, \frac{\text{۸}}{\text{۵}}, \frac{\text{۱۳}}{\text{۸}}, \cdots$) به چه عدد حقیقی میل می‌کند؟*

مسألهٔ زیر هم، اگر چه یک معادلهٔ دیوفانتی نیست، ولی با این روش‌ها قابل حل است. این مسأله در المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۸۴ (استرالیا) مطرح شده است.

تمرین ۷. *فرض کنید a و b عددهایی صحیح و مثبت هستند که $m=\frac{a^\text{۲}+b^\text{۲}}{\text{۱}+ab}$ نیز عددی صحیح است. نشان دهید m مربع کامل است (یعنی $m=n^\text{۲}$ برای یک عدد صحیح n).*

(راهنمایی. اگر $(a_\circ, b_\circ)$ جوابی از معادله باشد، و $\circ < a_\circ \leq b_\circ$ می‌توان به جواب $(a_\circ, ma_\circ-b_\circ)$ رسید. ثابت کنید $ma_\circ-b_\circ \geq \circ$ و همین‌طور، $ma_\circ-b_\circ < b_\circ$. پس مجموع مجهولات در جواب جدید کم‌تر از جواب قبلی است. این فرایند زمانی متوقف می‌شود که یکی از مجهولات صفر شود. ضمناً مقدار m در حین این تغییرات عوض نمی‌شود.)

در مورد معادله‌های دیوفانتی حرف‌های زیادی برای گفتن دارم، که متأسفانه در این حاشیه نمی‌گنجد! بنابر این همان‌طور که قبلاً هم چند باری اعلام کرده‌ام، در آینده باز هم به این مبحث خواهم پرداخت.

توضیح. مثال‌ها و تمرین‌های ۱ و ۲ را از کتاب «۲۵۰ مسأله حساب» نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی [1] (ترجمهٔ پرویز شهریاری) برگزیدم!

۱) W. SierpińsRi

داستان طرح یک مسأله (قسمت دوم)

امید نقشینه‌ارجمند

تصحیح برگه‌های المپیاد کاری سخت و در عین حال جذاب است. در بین برگه‌ها گاهی راه‌حل‌هایی یافت می‌شود که تحسین‌برانگیز است. در تصحیح، ایده‌هایی که به جواب نرسیده‌اند باید بررسی شوند تا ارزش آن‌ها مشخص شود. حدس‌ها و تعمیم‌ها هم باید موشکافی شوند.

در قسمت اول این مقاله مراحل طرح یکی از مسایل المپیاد داخلی بیان شد. صورت مسأله را یادآوری می‌کنم.

• یک جدول نامتناهی در نظر بگیرید به‌طوری که از سمت چپ ابتدا داشته باشد. فرض کنید تعدادی مهره در خانه‌های آن قرار داده‌ایم. تعداد کل مهره‌ها متناهی است و احتمال دارد در بعضی از خانه‌ها بیش از یک مهره وجود داشته باشد.

در هر مرحله می‌توانیم یکی از حرکات زیر را انجام دهیم.

حرکت ۱) دو مهره در دو خانهٔ متوالی را انتخاب کرده، سمت چپی را دو خانه جلو ببریم و سمت راستی را حذف کنیم.

حرکت ۲) دو مهرهٔ هم‌خانه، که در خانه‌ای غیر از دو خانه اول قرار دارند، را انتخاب کرده، یکی را یک قدم به راست و یکی را دو قدم به چپ حرکت دهیم.

الف_ نشان دهید با شروع از هر وضعیت، به وضعیتی می‌رسیم که دیگر انجام هیچ حرکتی ممکن نیست.

ب_ فرض کنید در خانه‌های ۱ تا n، در هر کدام یک مهره قرار داده‌ایم. ثابت کنید هیچ‌گاه هیچ مهره‌ای از خانه $n+1$ ام جلوتر نخواهد رفت.

برای دیدن راه‌حل این مسأله، می‌توانید قسمت اول این مقاله را مطالعه کنید. در آن‌جا (الف) با استقرا ثابت شد و (ب) با تعریف یک تابع انرژی.

از این پس هر وضعیت از مهره‌ها را با دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی مثل $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش می‌دهیم. در این نمایش منظور از a_n تعداد مهره‌ها در خانهٔ n ام است و لذا به غیر از متناهی جمله، بقیهٔ جمله‌های دنباله برابر صفرند.

منظور از یک تابع انرژی تابعی است که به هر دنباله این چنینی یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. به‌عنوان مثال، تابع انرژی‌ای که به کمک دنبالهٔ فیبوناتچی[1] تعریف کردیم به این شکل بود.

$$V_F\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = V_F(a_1, a_2, a_3, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n$$

معمولاً یک تابع انرژی وقتی مفید است که با انجام حرکات مجاز یا انرژی تغییر نکند، یا در هیچ حالتی زیاد نشود و یا در هیچ حالتی کم نشود. در این سه حالت با محاسبهٔ انرژی در وضعیت‌های مختلف می‌توان نتایجی به‌دست آورد.

ساده‌ترین روش برای تعریف یک تابع انرژی استفاده از یک دنباله است. به این صورت که اگر $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی

۱) ویراستار محترم مجله اسرار داشتند که Fibonacci باید به این‌صورت که در این مقاله نوشته شده، نوشته شود. من اصرار داشتم که در کتاب فارسی امروزی، این کلمه به‌صورت «فیبوناچی» آمده است و برای اثبات ادعایم، کتابی را به تصادف از کتاب‌خانهٔ ماهنامه بیرون کشیدم؛ و خوب، مشاهده می‌کنید که جنگ به نفع ویراستار خاتمه یافت.

شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۵) صص ۳۶_۴۱

باشد، V_v را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$V_v\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = V_v(a_1, a_2, a_3, \dots,) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

استفاده از تابع انرژی برای حل قسمت (الف)

دنبالهٔ $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$v_n = n + 1 \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

حال اگر تابع انرژی تولید شده توسط این دنباله را V_v بنامیم به‌راحتی می‌توان دید که با انجام حرکت‌های ۱ و ۲ انرژی اکیداً کم می‌شود. فرض کنید با انجام حرکت نوع اول (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) را به $(a_n - 1, a_{n+1} - 1, a_{n+2} + 1)$ تبدیل کرده باشیم. در این‌صورت انرژی به مقدار $(n+3) + (n+2) - (n+1) -$ تغییر کرده است، یعنی

$$V_v(\dots, a_n - 1, a_{n+1} - 1, a_{n+2} + 1, \dots) = V_v(\dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots) - n$$

اگر با انجام حرکت نوع دوم $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})$ را به $(a_n + 1, a_{n+1}, a_{n+2} - 2, a_{n+3} + 1)$ تبدیل کرده باشیم تغییرات انرژی برابر $(n+4) + (n+1) - 2(n+3)$ است. یعنی

$$V_v(\dots, a_n + 1, a_{n+1}, a_{n+2} - 2, a_{n+3} + 1, \dots) = V_v(\dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots) - 1$$

اکنون توجه کنید که مقدار V_v عددی طبیعی است که در هر حرکت حداقل یک واحد کم می‌شود و این نشان می‌دهد که بعد از حداکثر V_v حرکت، دیگر هیچ حرکتی ممکن نخواهد بود.

برتری این راه‌حل به راه‌حلی که در قسمت قبل مطرح شد این است که نه تنها نشان می‌دهد نمی‌توان تا ابد حرکات ۱ و ۲ را انجام داد بلکه کران بالایی نیز برای تعداد حرکات معرفی می‌کند.

یک مسألهٔ زیبا

تعدادی از دانش‌آموزان در تلاش برای حل قسمت (ب) با انجام تجربه به حدسی رسیده بودند که هیچ‌یک نتوانسته بودند آن را به درستی اثبات کنند. البته این حدس در صورت اثبات شدن هم ظاهراً هیچ کمکی به حل مسألهٔ اصلی نمی‌کند! ولی خود، به اندازهٔ مسألهٔ اصلی زیباست.

مسأله ۴. با فرض قسمت (ب) هیچ‌گاه بیش از دو مهره در یک خانه جمع نمی‌شود.

حلی که ما برای این مسأله پیدا کردیم به نوعی تکمیل ایده‌هایی بود که در برگه‌ها وجود داشت. کاری که خواهیم کرد در واقع تحلیل تمام حالت‌هایی است که در بازی می‌توان به آن‌ها رسید.

قبل از این‌که حل مسألهٔ ۴ را بخوانید سعی کنید این کار را انجام دهید. دست‌کم یک ربع فکر کنید. فکر می‌کنم اگر به اندازهٔ کافی حرفه‌ای نباشید نتوانید به سادگی ایده را کشف کنید! (جملهٔ اخیر روشی است برای ترغیب خواننده تا بیش‌تر فکر کند!)

خوب بس است! نزدیک به یک ساعت است که دارید تلاش می‌کنید! (و این جمله‌ای است که بنده، یعنی نویسندهٔ مقاله، دل خودم را الکی به آن خوش کرده‌ام!)

حل. (مسألهٔ ۴) فرض کنید n و m دو عدد صحیح نامنفی باشند. منظور از $B_{n,m}$ دنباله‌ای به شکل زیر است.

$$B_{n,m} = (10)^n 2 1^m 00 = \underbrace{1010\dots10}_{\text{جمله } 2n} 2 \underbrace{11\dots1}_{\text{جمله } m} 00$$

اکنون فرض کنید در وضعیتی به شکل $B_{n_1,m_1}B_{n_2,m_2}B_{n_3,m_3}\dots B_{n_k,m_k}$ باشیم (منظورم این است که وضعیت‌های بالا را به‌طور متوالی پشت سر هم قرار دهید، به‌عنوان مثال $B_{1,0}B_{2,2}$ یعنی ۱۰۲۰۰۱۰۱۰۲۱۱۰۰). نشان می‌دهیم که با انجام حرکت‌های ۱ یا ۲ باز هم به وضعیتی از این قماش می‌رسیم، که احتمالاً تعدادی از مهره‌های آن حذف شده است. یعنی وضعیتی که از کنار هم قرار دادن تعدادی بلوک به شکل $B_{n,m}$ و حذف بعضی از مهره‌ها به‌دست می‌آید. توجه کنید که سمت راست هر بلوک ۲، صفر قرار دارد و این نشان می‌دهد که حرکت‌های ۱ و ۲ داخل یکی از بلوک‌ها انجام می‌شوند.

بررسی حرکت ۱ روی بلوک $B_{n,m}$. این حرکت روی دو خانهٔ متوالی انجام می‌شود.

اگر $m \geq 2$ آن‌گاه داریم

$$B_{n,m} = (10)^n \overset{\downarrow}{2}\, 111^{m-2}00 \rightsquigarrow (10)^n \overset{\downarrow}{1}\, 021^{m-2}00 = (10)^{n+1}21^{m-2}00 = B_{n+1,m-2}$$

اگر $m = 1$ آن‌گاه

$$B_{n,1}B_{n'm'} = (10)^n \overset{\downarrow}{2}\, 100B_{n',m'} \rightsquigarrow (10)^n \overset{\downarrow}{1}\, 010B_{n',m'} = B_{n+n'+2,m'}$$

برای هر i که $0 \leq i \leq m-3$ داریم

$$B_{n,m} = (10)^n 21^i \overset{\downarrow}{1}\, 111^{m-i-3}00 \rightsquigarrow (10)^n 21^i \overset{\downarrow}{0}\, 021^{m-i-3}00 = B_{n,i}B_{0,m-i-3}$$

و اگر $m \geq 2$ آن‌گاه

$$B_{n,m}B_{n',m'} = (10)^n 21^{m-2} \overset{\downarrow}{1}\, 100B_{n',m'} \rightsquigarrow (10)^n 21^{m-2}0010B_{n',m'} = B_{n,m-2}B_{n'+1,m'}$$

بررسی حرکت ۲ روی بلوک $B_{n,m}$. این حرکت را تنها در یک مکان می‌توان انجام داد.

در صورتی که $n, m \geq 1$ داریم

$$B_{n,m} = (10)^{n-1}10 \overset{\downarrow}{2}\, 1\, 1^{m-1} \rightsquigarrow (10)^{n-1}20 \overset{\downarrow}{0}\, 21^{m-1} = B_{n-1,0}B_{0,m-1}$$

اگر $n \geq 1$ و $m = 0$ آن‌گاه

$$B_{n,0}B_{n',m'} = (10)^{n-1}10 \overset{\downarrow}{2}\, 00B_{n',m'} \rightsquigarrow (10)^{n-1}20 \overset{\downarrow}{0}\, 10B_{n',m'} = B_{n-1,0}B_{n'+1,m'}$$

اگر $n = 0$ و $m \geq 1$ آن‌گاه

$$B_{n',m'}B_{0,m} = B_{n',m'} \overset{\downarrow}{2}\, 11^{m-1}00 \rightsquigarrow B_{n',m'+1}21^{m-1}00 = B_{n',m'+1}B_{0,m-1}$$

و در حالت $n = m = 0$ داریم

$$B_{n',m'}B_{0,0}Bn'', m'' = B_{n',m'} \overset{\downarrow}{2}\, 00B_{n'',m''} \rightsquigarrow B_{n',m'+1}B_{n''+1,m''}$$

توجه کنید که در بعضی حالات فرض کردیم که در چپ یا راست $B_{n,m}$ بلوک دیگری قرار دارد و گاهی این‌طور نیست. اگر چنین نبود به‌وضوح، با اضافه کردن تعدادی مهره به وضعیت‌های بالا می‌رسیم.

اکنون با وضعیت 1^n شروع می‌کنیم. توجه کنید که اگر دو مهره به سمت راست اضافه کنیم $B_{n,0}$ به‌وجود می‌آید. از این پس، همیشه در وضعیت‌هایی هستیم که از تعدادی بلوک به شکل $B_{n,m}$ درست شده‌اند و لذا در هیچ خانه‌ای، بیش از ۲ مهره نخواهیم داشت.

در مسألهٔ اخیر می‌توان فرض کرد که جدول، از دو طرف نامتناهی است و در ضمن در تمام خانه‌های آن یک مهره قرار دارد. آیا این مسأله را می‌توان تعمیم داد؟ در این مورد، سؤال زیر به ذهنم رسید که البته جواب آن را نمی‌دانم.

سؤال: فرض کنید $m > 1$ عددی طبیعی باشد. در هر خانه، یک جدول از دو طرف نامتناهی m مهره قرار داده‌ایم. حرکات ۱ و ۲ را به دل‌خواه روی خانه‌های آن انجام می‌دهیم. آیا عدد d_m وجود دارد که هیچ‌گاه، در هیچ خانه‌ای بیش از d_m مهره جمع نشود؟ در صورت وجود، کم‌ترین مقدار d_m، بر حسب m، چند است؟

جدول از دو طرف نامتناهی

می‌خواهیم مسألهٔ اصلی را در حالتی بررسی کنیم که جدول از هر دو طرف نامتناهی باشد. آیا باز هم می‌توان ثابت کرد که حرکات روزی متوقف خواهند شد؟ اگر به دو اثباتی که برای قسمت (الف) داده‌ایم مراجعه کنید می‌بینید که در هر دو از این شرط که جدول از سمت چپ بسته است استفاده شده است. پس اگر این حکم درست باشد باید به دنبال اثباتی دیگر گشت.

در این حالت اثبات قسمت (ب) هم با مشکل مواجه می‌شود. دامنهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی را می‌توان به کل اعداد صحیح توسعه داد. با توجه به رابطهٔ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ می‌توان نوشت $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$.

به‌این ترتیب F_0، F_{-1}، F_{-2}، ... هم تعریف می‌شوند. اگر محاسبه کنید می‌بینید که $F_0 = 1$، $F_{-1} = 0$، $F_{-2} = 1$، $F_{-3} = -1$، ... در نتیجه بعضی از جملات دنبالهٔ فیبوناتچی منفی خواهند بود و این اثبات قسمت (ب) را دچار مشکل می‌کند.

معرفی دسته‌ای جدید از توابع انرژی

ایدهٔ این قسمت برای کسانی که با روش محاسبهٔ فرمول بستهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی آشنا هستند، احتمالاً جدید نخواهد بود.

معادلهٔ درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله دو جواب حقیقی دارد که یکی مثبت و بیش‌تر از یک و دیگر منفی و بیش‌تر از منفی یک است.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ,\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

اکنون دنباله‌های $\{\phi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و $\{\hat{\phi}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را در نظر بگیرید. این دو دنباله، دو تابع انرژی به‌صورت زیر تولید می‌کنند.

$$V_\phi(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\phi^n$$
$$V_{\hat{\phi}}(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\hat{\phi}^n$$

به یاد داشته باشید که در مجموع‌های بالا همهٔ جملات، غیر از متناهی جمله صفرند زیرا تنها متناهی تا از a_nها ناصفرند.

اکنون خودتان بررسی کنید و ببینید که V_ϕ و $V_{\hat{\phi}}$ با حرکات ۱ و ۲ تغییر نمی‌کنند. دنبالهٔ فیبوناتچی رابطهٔ نزدیکی با این دو عدد دارد. در واقع به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داریم

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1})$$

تابع‌های انرژی اخیر با آن‌هایی که تا پیش از این تعریف کرده بودیم تفاوت‌هایی دارند. یکی این‌که با توجه به گنگ بودنِ ϕ، $\hat{\phi}$، V_ϕ و $V_{\hat{\phi}}$ هم می‌توانند گنگ باشند. دیگر این‌که با توجه به منفی بودنِ $\hat{\phi}$، $V_{\hat{\phi}}$ در برخی حالات منفی است.

اکنون به کمک V_ϕ می‌خواهم نشان دهم که در حالتی که جدول از دوطرف نامتناهی باشد نیز (الف) درست است. با توجه به این‌که $\phi > 1$، به‌ازای هر $m \in \mathbb{Z}$، $\phi^m > 0$ و در ضمن $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} \phi^m = \infty$.

اکنون فرض کنید با دنباله‌ای مثل $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ شروع کنیم. $V_\phi(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ را در نظر بگیرید. $M > 0$ وجود دارد که اگر $m > M$ آن‌گاه

$$V_\phi(\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) < \phi^m$$

این نشان می‌دهد که هیچ مهره‌ای به خانه m ام نمی‌رسد. یعنی می‌توان فرض کرد که بازی در خانه‌های M به قبل انجام می‌شود. اکنون حکم را با استفاده از استقراء روی تعداد مهره‌ها می‌توان ثابت کرد. خودتان راه حل را کامل کنید. علاوه بر این نشان دهید که در این حالت، قسمت (ب) هم برقرار است و در ضمن آرایش نهایی مهره‌ها هم مستقل از ترتیب انجام حرکات است.

اکنون نوبت شماست

سعی کنید با این ایده‌ها خودتان حدس‌هایی بزنید و آن‌ها را ثابت کنید. من هیچ استفاده‌ای از V_ϕ نکردم. آیا می‌توانید مسأله‌ای بسازید که به کمک V_ϕ حل شود؟

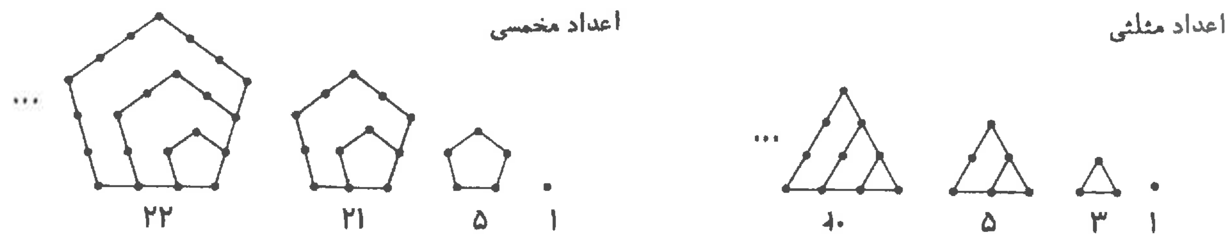
به این مسأله به‌عنوان یک بازی دو نفره نگاه کنید. با شروع از یک وضعیت اولیه، دو نفر به نوبت یکی از حرکات تعریف شده را انجام می‌دهند تا هنگامی که دیگر هیچ حرکتی ممکن نباشد. بازنده می‌تواند کسی باشد که نتوانسته حرکتی انجام دهد و یا برعکس. چه کسی استراتژی برد دارد؟ روش بردن چیست؟

تشکر

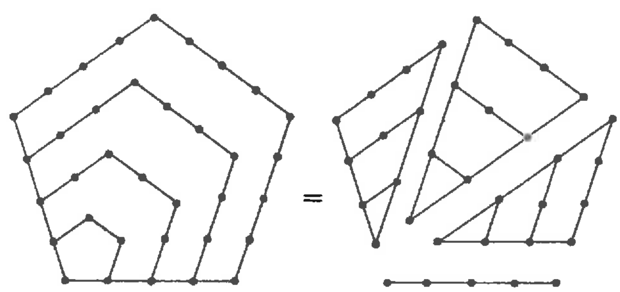
از همهٔ کسانی که هنگام تصحیح برگه‌های آن‌ها این ایده‌ها به ذهنم رسید سپاس‌گذارم. نام ایشان را به دو دلیل نمی‌آورم، اول این‌که هزارو ششصد اسم احتیاج به فضای زیادی دارد و دیگر این‌که برگه‌هایی که در دست مصححان است سر برگ ندارد!

از دوست عزیزم کسری علیشاهی که تصحیح برگه و در نتیجه بررسی ایده‌ها را با ایشان انجام دادم، ممنونم.

در آخر لازم است از سه نفر اعضای تیم ملی المپیاد ریاضی که در نوشتن قسمت‌هایی از این مقاله به من کمک کردند تشکر کنم؛ دوستان خوبم، آقایان ستایش، موسوی و میرصادقی.



n امین عدد مخمسی برابر است با n به‌اضافهٔ سه برابر $(n-۱)$ امین عدد مثلثی.



مسائل المپیادی سری ۸

علی شوریده

۸-۱) فرض کنید $S(n)$، برای هر عدد طبیعی n، جمع ارقام n در نمایش ده‌دهی باشد. نشان دهید

$$\frac{۱}{۵}S(n) \leq S(۲n) \leq ۲S(n)$$

۸-۲) فرض کنید $r_۱$، $r_۲$، ...، r_m مجموعه‌ای از اعداد مثبت گویا باشد که مجموعشان مساوی یک است. برای هر عدد طبیعی تعریف کنید

$$f(n) = n - \sum_{k=۱}^{m}[r_k n].$$

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار f را بیابید. (منظور از $[x]$ جزء صحیح x است.)

۸-۳) می‌دانیم که دنباله $\{G(n)\}_{n=۰}^{\infty}$ از اعداد صحیح در خاصیت‌های زیر صدق می‌کند.

$$G(۰) = ۰$$
$$G(n+۱) = n - G(G(n)) \ quad, n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

ثابت کنید

الف) برای هر عدد طبیعی k، $G(k) \geq G(k-۱)$،

ب) عدد صحیح k وجود ندارد که $G(k-۱) = G(k) = G(k+۱)$.

۸-۴) شش زیرمجموعهٔ سه عضوی یک مجموعهٔ متناهی X داده شده‌اند. نشان دهید می‌توان اعضای X را طوری با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد که در هیچ مجموعه‌ای، همه عضوها هم‌رنگ نباشد.

حل مسأله‌های المپیادی سری ۶

علی شوریده

۱) اگر x از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر نباشد، در این‌صورت $f(x)+f(1-x) \le f(1)=1$ و چون $f(1-x)$ نامنفی است در نتیجه $f(x)$ از ۱ و لذا از $2x$ کوچک‌تر است. حال اگر x از $\frac{1}{2}$ کوچک‌تر باشد، عدد n وجود خواهد داشت که $\frac{1}{2} \le 2^n x < 1$ (چرا؟) و لذا با توجه به شرط ۳ خواهیم داشت $2^n f(x) \le f(2^n x) \le 2^{n+1}x$ و در نتیجه $f(x) \le 2x$.

۲) فرض کنید 5^n+3^n بر $5^{n-1}+3^{n-1}$ بخش‌پذیر باشد. از طرفی چون $3\times 5^{n-1}+3^n$ بر $5^{n-1}+3^{n-1}$ بخش‌پذیر است، تفاضل 5^n+3^n و $3\times 5^{n-1}+3^n$ که برابر $2\times 5^{n-1}$ است نیز بر $5^{n-1}+3^{n-1}$ بخش‌پذیر خواهد بود و در نتیجه $5^{n-1}+3^{n-1}$ باید ۲ را بشمارد (چرا؟) و از اینجا نتیجه می‌شود که $n=1$.

۳) به راحتی می‌توانیم نشان دهیم که دو ریشه $19x-\frac{96}{x}=a$ برای هر مقدار a وجود دارند و متمایزند لذا تعداد جواب‌های $f(19x-\frac{96}{x})=0$ اگر متناهی باشد باید زوج باشد و در نتیجه رضا هم توانایی یافتن دست‌کم یک جواب دیگر برای معادله را دارد.

الف) فرض کنید $u_n > a$. اگر u_n زوج باشد، آن‌وقت $u_{n+1}=\frac{u_n}{2} < u_n$ اگر u_n فرد باشد هم، $u_{n+2}=\frac{u_n+a}{2} < u_n$. پس برای هر جمله از دنباله که از a بیش‌تر باشد. جمله‌ای هست که از آن اکیداً کوچک‌تر است پس اگر همواره $u_n > 0$، دنباله‌ای اکیداً نزولی و نامتناهی از اعداد صحیح مثبت ایجاد می‌شود که ناممکن است.

ب) اگر $u_m \le a$ در این‌صورت برای هر $n \ge m$ یا $u_n \le a$ و یا این‌که u_n زوج است و به استقرا روی n نتیجه می‌شود که $u_n \le 2a$. به‌خصوص برای هر $n \ge m$، داریم $u_n \le 2a$. بنابراین مقداری از u_n هست که دست‌کم دو بار ظاهر شود و دنباله از این محل به بعد متناوب می‌شود.

نامه‌ها . . .

☒ آقای میرداود حسینی (شبستر): نامهٔ شما را دریافت کردیم، از آن متشکریم. نخست در مورد اعداد D که معرفی کردید؛ آیا درستی ادعای خود را برای بخش‌پذیری $1-53^2$ بر عدد ۳ بررسی کرده‌اید؟! (توجه کنید که ۵۳ عددی اول است.) دوم این‌که در اثبات شما برای حدس گلدباخ، از این فرض که هر عدد فرد، اول است استفاده شده که به‌وضوح نادرست است.

☒ آقای اسماعیل اسکندری (شیراز): از اظهار لطف شما در نامه، متشکریم. پاسخ شما را ارسال خواهیم کرد.

@ ضمناً نامه‌های الکترونیکی دوستان زیر به دست ما رسید. از همهٔ آنها متشکریم.
دکتر محمود کریمی (شیراز)، امیر جهرمی، فرنوش فروزان، سپهر و سینا حمزه‌لو، رضا قاسمی، دکتر هژیری، امیرحسین کدیور، دکتر محمد صال‌مصلحیان (مشهد).

شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۰) صص ۳۸ـ۳۸

فن‌آوری اطلاعات و ریاضیات

سینا تابش

۱. درآمد

می‌گویند فن‌آوری اطلاعات در کاربردهای اینترنت متجلی شده که در شبکه‌ای از کامپیوترهای به هم وصل شده، امکان تبادل فایل‌های متنی و تصویری را به‌وجود آورده است. این امکان، ارسال پیام‌های شخصی به‌صورت پست الکترونیک و یا رجوع به برگه‌های اطلاعاتی (homepage) و دست‌یابی به اطلاعات موجود در آنها به‌صورت چندرسانه‌ای را فراهم می‌کند. به کمک شبکهٔ اینترنت امکان برقراری ارتباط و دست‌یابی به اطلاعات به‌صورت آنی و بی‌درنگ امکان‌پذیر شده است و این امر موجب ارتباط بیشتر جوامع بشری و رشد و توسعهٔ دانش و فرهنگ، اقتصاد و فرهنگ و اقتصاد و صنعت، حتی بیش از اختراع صنعت چاپ توسط گوتنبرگ است. از این رو است که این باور به‌وجود آمده است که عصر اطلاعات از راه رسیده است و بشر در یک دهکدهٔ جهانی زندگی می‌کند که فراسوی آن همه به درون سپهر اطلاعاتی کشیده می‌شوند.

۱.۱. اینترنت چگونه شروع شد

در سال‌های آخر دههٔ ۶۰ میلادی، وزارت دفاع آمریکا برای برقراری ارتباط بین پژوهش‌گرانی که در طرح‌های دفاعی کار می‌کردند به منظور استفاده از منابع اطلاعاتی به طور مشترک، به فکر راه انداختن شبکهٔ کامپیوتری افتاد. این شبکه که به ARPANET[۱] معروف شد ابتدا فقط چهار کامپیوتر را به هم متصل می‌کرد، ولی خیلی زود صدها کامپیوتر را فراگرفت. در اوایل سال‌های ۸۰ میلادی ARPANET به INTERNET[۲] تبدیل شد که شبکه‌های کامپیوتری در مؤسسات آموزشی و تحقیقاتی آمریکا به پشتیبانی بنیاد ملی علوم[۳] آمریکا به هم متصل شدند. سپس مراکز علمی اروپا و سایر کشورها نیز به آن پیوستند. این شبکه که ابتدا فقط به منظور برقراری ارتباط این دانش‌مندان و پژوهش‌گران در نظر گرفته شده بود از آغاز دههٔ ۹۰ میلادی، شرکت‌ها و مؤسسات صنعتی و اقتصادی را نیز به درون خود راه داد و به یک شبکهٔ عمومی برای استفاده‌های گوناگون تبدیل شد.

امروزه علاوه بر آن که اینترنت یک وسیلهٔ ارتباطی است، امکان دست‌رسی به منابع اطلاعاتی نیز در آن فراهم آمده است و جنبه‌های مختلف زندگی بشر را با ده‌ها مورد استفاده تحت تأثیر قرار داده است، از جمله اقتصاد و تجارت با فروشگاه‌های الکترونیکی، آموزش از راه دور به کمک مدارس هوشمند، پزشکی از راه دور، ادارات بدون کاغذ و موارد گوناگون دیگر.

---

1) Advanced Research Project Administration NETwork 2) INTER Linked NETwork 3) National Science Foundation

شمارهٔ ۸
بهمن ۱۳۸۵، صص ۳۹-۴۴

۲.۱. چگونه به اینترنت وصل شویم

برای اتصال کامپیوترها به شبکهٔ اینترنت باید به یک مرکز خدمات اینترنت یا ISP[1] متصل شد. اتصال به مرکز خدمات اینترنت از طریق خطوط تلفنی معمولی، خطوط تلفنی ویژه و یا اتصال ماهواره‌ای امکان‌پذیر است.

در اتصال از طریق خطوط تلفنی معمولی، به کمک مودم عمل ارسال و دریافت فایل‌های اطلاعاتی امکان‌پذیر می‌شود. برای این منظور لازم است قرارداد اشتراک با یک مرکز خدمات اینترنت منعقد شود و پس از دریافت شمارهٔ ارتباطی و رمز ورود به آن مرکز، به کمک نرم‌افزارهای ویژه می‌توان از طریق مرکز خدمات اینترنت به شبکهٔ اینترنت متصل شد.

توانایی خطوط ارتباطی بر حسب تعداد بیت‌هایی که در هر ثانیه تبادل می‌شود سنجیده می‌شود، مثلاً یک «خط با سرعت ۹۶۰۰»، خطی است که در هر ثانیه ۹۶۰۰ بیت را جابه‌جا می‌کند، یا خط 64 kb/s می‌تواند در هر ثانیه ۶۴۰۰۰ بیت را جابه‌جا کند. اتصال با خطوط تلفنی و استفاده از مودم‌های معمولی سرعتی برابر ۹۶۰۰ یا حداکثر ۱۹۲۰۰ بیت در ثانیه فراهم می‌کند. این سرعت برای مصرف‌های فردی و ارتباط‌های خانگی کم و بیش مناسب است ولی اگر یک سازمان بخواهد شبکهٔ کامپیوتر محلی خود را به شبکهٔ اینترنت متصل کند تا همهٔ کاربران سازمان از طریق کامپیوترهای موجود روی شبکهٔ محلی آن سازمان بتوانند به شبکهٔ اینترنت متصل شوند، لازم است خطوط پرسرعت‌تر نظیر خطوط تلفنی ویژه و یا اتصال ماهواره‌ای استفاده شود. در سازمان‌های بزرگ خطوط بسیار پر سرعت مثلاً با ظرفیت چند مگابیت (میلیون بیت) در ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۱. اینترنت آینده

اینترنت ۲ (آی ۲)، نتیجهٔ یک کار جسارت‌آمیز دانشگاه‌های آمریکایی است که برای بنا کردن زیرساخت آیندهٔ اینترنت از آن استفاده می‌شود. در سال ۲۰۰۰، شبکه‌های دانشگاهی به صورتی بسیار بهبود یافته در خط بسیار پر سرعت اینترنت ۲ به هم متصل می‌شوند. به‌علاوه، شرکت‌ها هم به زودی مزهٔ این کوشش‌ها را ــ که به کمک تکنولوژی پیش‌رفته انجام می‌سود ــ خواهند چشید.

شبکهٔ آی ۲ را، به یاد مسیر خط آهنی که اولین بار غرب آمریکا را گشود، ابیلین[2] نامیده‌اند. این شبکه از پروتکل جدید IPv6 (به جای پروتکل فعلی IPv4) استفاده می‌کند و در حال حاضر، ۱۵۰ دانشگاه را به هم متصل کرده است. این پروتکل ظرفیتی عظیم دارد، فوق‌العاده قابل اعتماد است و بسیار بسیار سریع‌تر از بزرگ‌راه‌های اطلاعاتی پرتراکم فعلی، کار می‌کند. ابیلین می‌تواند در یک ثانیه، ۲٫۴ گیگابیت (میلیارد بیت) داده را منتقل کند و این سرعت، ۱۳۰۰۰۰ بار بیشتر از سرعت یک مودم معمولی است. تصور کنید که ده دایره‌المعارف درکمتر از یک ثانیه در دنیا پخش می‌شوند. با تکنولوژی چند رسانه‌ای می‌توان اطلاعات یکسانی را به جاهای مختلف فرستاد و این را پیش‌تر، ۳۰۰۰ ایستگاه رادیو که برنامه‌هایشان را روی اینترنت پخش می‌کردند به کار گرفته‌اند. معجزهٔ IPv6 این است که می‌تواند هم‌زمان تصویر و صدا را بدون تأخیر، لرزش یا حذف، انتقال دهد و این، راه را برای ایجاد تلویزیون بر پایهٔ وب باز می‌کند.

IPv6، با ضمانت عرض مطمئن باند پهن، بخش مهمی از مسألهٔ تراکم شبکه را حل می‌کند. شکی نیست که انتقال را می‌توان اولویت‌بندی کرد و تقریباً در دم انجام داد. ممکن است که ابیلین به زودی تصویرهای اسناد اصیل را هم منتقل کند و پدید آورندگانش در حال کار روی نوعی «لمس» هستند.

در سال ۲۰۰۰، تکنولوژی چند رسانه‌ای برای امتحان بیشتر از انحصار دانشگاه به‌در می‌آید. بدون تردید دورنگاه داشتن شرکت‌های بزرگ آمریکایی از این سیستم ــ چنان که رویای طرفداران افراطی اینترنت است ــ ممکن نیست، دست کم به این علت که خود این شرکت‌ها در بخش‌هایی از کار سرمایه‌گذاری کرده‌اند.

ای تی اند تی، مایکروسافت، آی‌بی‌ام، سیسکو، اِم سی‌آی وورلد کام/ سپرینت و دیگران، به این امید که از این تکنولوژی در ساخت شبکه‌های داخلی و ارتباطی خود استفاده کنند، حدود پنجاه میلیون دلار به این پروژه کمک کرده‌اند و این، تقدم بلامنازع و تسلط آنان بر تکنولوژی اینترنت را برای دهه‌ای دیگر تضمین می‌کند.

---
1) Internet Service Provider 2) Ebelin

۲. کاربردهای اینترنت

همان‌طور که ذکر کردیم اینترنت کاربردهای گوناگونی دارد، از جمله ارسال و دریافت نامه (پست الکترونیک)، دست‌یابی به پایگاه‌های اطلاعاتی به‌صورت چند رسانه‌ای، گفتگو با دیگران به‌صورت مجازی ولی هم‌زمان، یا حتی ارسال صدا و تصویر در هنگام گفت‌وگو و برقراری تماس. در این بخش به بررسی این کاربردها می‌پردازیم.

۱.۲ پست الکترونیک

یکی از کاربردهای اینترنت، ارسال و دریافت نامه‌های الکترونیکی است. یک نامهٔ الکترونیک (email) یک فایل است که از طریق شبکهٔ اینترنت برای مخاطبی که دارای نشانی پست الکترونیکی است، ارسال می‌شود. یک نشانی پست الکترونیکی به عنوان مثال به صورت زیر است.

alborz@schoolnet.sharif.ac.ir

در اینجا اگر از راست به چپ به بررسی این آدرس بپردازیم، ir یعنی این نشانی در کشور ایران قرار دارد، ac یعنی یک مؤسسهٔ فرهنگی و آموزشی، sharif حوزهٔ اصلی شبکهٔ دانشگاه صنعتی شریف است، schoolnet یک زیر شبکه (ویژهٔ مدارس) در دانشگاه صنعتی شریف است، و بالاخره بعد از علامت @ کلمهٔ alborz، شناسهٔ کاربر و ویژهٔ دبیرستان البرز است.

چنانچه دارای یک شناسهٔ کاربر روی شبکهٔ اینترنت باشید و برای شما یک email ارسال شده باشد، این email روی دستگاه کارگزار شبکه‌ای که به آن متصل هستید باقی می‌ماند تا شما به شبکه وصل شوید، سپس با پیغام «نامهٔ تازه» مواجه می‌شوید که می‌توانید به کمک نرم‌افزارهای مورد استفادهٔ خود آن را بخوانید و به آن جواب دهید.

۲.۲. برگه‌های اطلاعاتی (home page)

آن‌چه که به **برگه‌های اطلاعاتی شخصی** مشهور شده است و در اینترنت تحت نشانی ویژه‌ای قابل دسترسی است، مجموعه‌ای از اطلاعات دربارهٔ یک فرد، یک سازمان یا یک محصول است. وقتی کامپیوتر شما مثلاً تحت ویندوز به اینترنت متصل شده باشد می‌توانید با استفاده از Netscape یا Internet Explorer و وارد کردن نشانی پایگاه موردنظر به پایگاه مطلوب متصل شوید. مثلاً اگر عبارت زیر را وارد کنیم

http: // www.president.ir

به برگهٔ اطلاعاتی رئیس جمهوری اسلامی ایران وارد می‌شویم.

بعضی از برگه‌های اطلاعاتی مشتمل بر اطلاعات خاصی دربارهٔ موضوعات مشخصی است، مثلاً در برگهٔ اطلاعاتیِ

www.schoolnet.sharif.ac.ir

اطلاعات جالبی دربارهٔ مباحث مختلف علمی اعم از فیزیک، شیمی، ریاضی، زیست‌شناسی، نجوم، وکامپیوتر وجود دارد و با بعضی از مدارس شبکهٔ مدرسه آشنا می‌شویم.

۳.۲. گفت‌وگو

در اینترنت، گفت‌وگو به صورت مجازی و واقعی ممکن است. درگفت‌وگوی مجازی (chat) با استفاده از نرم‌افزار مناسب امکان گفت‌وگو به صورت الکترونیک با یک فرد به طور خصوصی، یا وارد شدن به اتاق‌های مجازی گفت‌وگو و شرکتِ در بحث و مناظره با دیگران وجود دارد.

علاوه بر این، با نصب تجهیزات مناسب بر روی کامپیوتر می‌توان از طریق اینترنت مکالمهٔ واقعی نیز انجام داد. به کمک سخت‌افزارهای مناسب، کلام و پیام به صورت فایل‌های دیجیتالی درآمده و برای فرد موردنظر ارسال می‌گردد که پس از دریافت از طریق سخت‌افزار، مجدداً به کلام تبدیل شده و به سمع طرف مقابل می‌رسد. با تجهیزات مناسب حتی امکان ارسال و دریافت تصویر نیز وجود دارد.

۳. تار جهان‌گستر World Wide Web

آن‌چه که به تار جهان‌گستر معروف شده است و به‌طور اختصاری، وِب (Web) نامیده می‌شود، یک مجموعهٔ بسیار بزرگ از اطلاعات است که به صورت چندرسانه‌ای (همراه با صوت و تصویر) در کامپیوترهای موجود در سراسر جهان ذخیره شده است.

با استفاده از نرم‌افزارهای ویژه مانند Internet Explorer و Netscape که به مرورگر[1] معروف‌اند، می‌توان به این مجموعه‌های اطلاعاتی دست‌رسی پیدا کرد.

هر یک از این مجموعه‌های اطلاعاتی، یا اطلاعات در مورد یک فرد است، یا اطلاعات دربارهٔ یک مؤسسه، یا یک محصول، یا یک موضوع علمی و غیره. دست‌یابی به اطلاعات به منظورهای مختلفی اعم از فعالیت‌های علمی و تحقیقاتی، امور تجاری و اقتصادی و یا آشنایی با یک موضوع صورت می‌گیرد.

۱.۳. آشنایی با وب

تار جهان‌گستر (www) توسط تیم برنرزلی[2] که پژوهش‌گر رشتهٔ فیزیک در کشور سوئیس بود ابداع شد. وب بر اساس پروتکل http[3] شکل گرفته است. بر اساس این پروتکل، مستنداتی از انواع مختلف از لحاظ صوت و تصویر از یک کارگزار وِب به یک مرورگر فرستاده می‌شود. کارگزار و مرورگر می‌توانند هر کجای دنیا بر روی شبکهٔ اینترنت قرار داشته باشند.

این مستندات با زبان HTML[4] تدوین می‌شوند که توسط مرورگر برای نمایش متن مورد نظر قابل تفسیر است.

مرورگر یک برنامه کامپیوتری است که پروتکل http را مورد استفاده قرار می‌دهد تا صفحات وب را از کارگزار وِب دریافت کرده و آنها را به صورت مناسبی به نمایش بگذارد. در سیستم عامل ویندوز عموماً از دو مرورگر مشهور Internet Explorer و Netscape استفاده می‌شود.

۲.۳. جست‌وجوگرها

در وب برنامه‌های جست‌وجوگر گوناگونی وجود دارد که به کمک آنها پیدا کردن مسیر دست یافتن به اطلاعات مورد نظر یا پیدا کردن سایت‌های اطلاعاتی به‌سادگی امکان‌پذیر می‌شود. معروف‌ترین جست‌وجوگرها به قرار زیرند:

http://www.yahoo.com
http://www.altavista.com
http://www.infoseek.com
http://www.google.com

جست‌وجوگرهای فوق، جست‌وجوگرهای عمومی هستند و جست‌وجوگرهای خاص نیز وجود دارند. به کمک جست‌وجوگرهایی نظیر جست‌وجو گرهای فوق می‌توان مسیر دست‌یابی به اطلاعات ویژه را پیدا کرد.

---

1) Browser 2) Tim Berners-Lee 3) Hyper Text Transport Protocol 4) Hyper Text Mark-up Language

۴. عصر فن‌آوری اطلاعات

تأثیر اینترنت در اقتصاد و فرهنگ را با اختراع صنعت چاپ توسط گوتنبرگ مقایسه می‌کنند. بدون تردید اینترنت نقش بسیار مهمی در توسعهٔ اقتصاد و پیشرفت فرهنگ ایفا خواهد کرد. بعضی از جنبه‌های این تأثیر، که ما را به عصر فن‌آوری اطلاعات وارد ساخته است را فهرست‌وار ذکر می‌کنیم.

۱.۴. تجارت الکترونیک

بازارهای مَجازی بر روی شبکهٔ اینترنت، عرصهٔ ارایهٔ کالاهای مختلف است و مصرف‌کنندگان می‌توانند نیازهای خود را بدون اتلاف وقت و با هزینهٔ کمتر تهیه کنند.

۲.۴. آموزش از راه دور

شبکهٔ اینترنت این امکان را فراهم کرده است که مدارس مجازی نیز شکل بگیرند و دانش‌آموزان از راه دور بتوانند مطالعات خود را ادامه دهند و با ارتباطی مستقیم و زنده آموزش ببینند و مهارت‌های خود را محک بزنند.

۳.۴. پزشکی از راه دور

پزشکی از راه دور نیز به کمک شبکهٔ اینترنت به یاری بیماران می‌شتابد تا دیگر هیچ دردمندی در گوشه و کنار جهان، آلام خود را به تنهایی در دل نگاه ندارد.

۴.۴. واقعیت مجازی

به کمک نرم‌افزارهای پیشرفته خلق واقعیت‌های مجازی به سهولت میسر شده است که این امر هم برای شبیه‌سازی پدیده‌های علمی مفید و مؤثر است و هم عرصه‌ای برای خلاقیت هنری در آن نهفته است.

۵.۴ ادارات بدون کاغذ

شبکه‌های پرسرعت امکان تبادل امور اداری و دفتری را به صورت مجازی و بر روی شبکه فراهم ساخته است. از این‌رو است که سازمان‌های بدون کاغذ، عرصهٔ جدیدی از مدیریت پویا را به‌وجود می‌آورند.

آنچه که به‌طور خلاصه ذکر شد در یک کلام خلاصه می‌شود: eWorld. به عصر فن‌آوری اطلاعات قدم گذاشته‌ایم.

۶.۴. فن‌آوری اطلاعات و ریاضیات

فن‌آوری اطلاعات چگونه بر آموزش و پژوهش در ریاضیات تأثیر خواهد گذاشت؟ پژوهش‌گران به کمک بانک‌های اطلاعاتی به طور لحظه‌ای و روزآمد به آخرین یافته دست می‌یابند و با ارتباط با هم در اقصی نقاط جهان مرزهای دانش را جلو می‌برند. از سوی دیگر سایت‌های اطلاعاتی و آموزشی فرصت‌های یکسان و ارزشمندی در اختیار هر دانش‌آموزی می‌گذارند که می‌خواهد به چالش علمی برخیزد. در عصر اطلاعات در یک دنیای دیجیتال به‌سر می‌بریم که متعلم می‌تواند از طریق پنجره کامپیوتر با معلم خود ارتباط برقرار کند، معلم نیز دیگر برای نشر آن‌چه که برای آموزش در توان دارد منتظر نشر کاغذی نمی‌ماند و بلادرنگ در عرصهٔ دیجیتال به انتشار آن اقدام می‌کند و با شاگردان خود در همهٔ لحظات در ارتباط و گفت‌وگو است. ریاضیات نیز از این فرآیند بی‌بهره نمانده است و در جای‌جای شبکهٔ اینترنت می‌توان سایت‌های آموزشی مختلفی را یافت که بسیار غنی و آموزنده هستند؛ از جمله، در زیر به معرفی چند سایت از این دست می‌پردازیم.

1) www.education-world.com/math به بررسی دنیا در پرتو ریاضیات می‌پردازد.

2) www.sci.wsu.edu/math/HS/problems.html مسایلی در سطح دبیرستان مطرح و برای حل آن‌ها راهنمایی می‌کند.

3) www.learner.org/exhibits/dailymath ریاضیات و زندگی روزانه!

4) www.cica.indiana.edu/projects/Fermat به چالش مسأله‌های حل نشده هم‌چون قضیهٔ آخر فرما راه می‌بریم.

5) polymer.bu.edu/museum به دنبال فراکتال‌ها راه می‌گشاید.

6) www-math.sci.kun.nl/math/knopen/art_gallery.html باز هم دنیای فرکتال‌ها!

7) world.std.com/~reinhold/mathmovies.html سینما و ریاضیات!

8) math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html مجدداً دنیای فراکتال‌ها!

9) freeabel.geom.umn.edu/apps رنگین کمان!

اینترنت و فن‌آوری اطلاعات یک ابزار توانمندسازی است، آن‌گونه توانمندسازی که راه عشق و امید را می‌گشاید!

• سینا تابش، دانش‌آموز پیش‌دانشگاهی

تاریخ هندسه، از مصر و بابل تا ویتن (۴)

رامین دانشی

جنگ‌های پلوپنزی

صلح یونانی‌ها که پس از دفع حملهٔ ایرانی‌ها به یونان به‌وجود آمده بود در سال ۴۳۱ ق.م با آغاز جنگ پلوپنزی بین اسپارت‌ها و آتنی‌ها به پایان رسید. آتن که ابتدا پیروزمند بود، بعداً متحمل طاعون نابودکننده‌ای شد که یک‌چهارم جمعیت آن را نابود کرد و در سال ۴۰۴ ق.م مجبور به پذیرش شکست شد. اسپارت‌ها رهبری سیاسی یونان را در اختیار گرفتند ولی در سال ۳۷۱ ق.م گروهی متفق از شهرهای خودمختار آن‌را از چنگ اسپارت‌ها بیرون آوردند. در جریان این ناآرامی‌ها هندسه پیشرفت بسیار کمی در آتن داشت ولی در نواحی آرام‌تر یونان بزرگ نتایج خوبی در هندسه به‌دست آمد.

به فیثاغورسیان که در ایتالیای جنوبی ساکن بودند اجازهٔ بازگشت داده شد و مدرسه فیثاغورسی جدیدی در تارنتوم[1] تحت مدیریت آرخوتاس برپا شد. مدرسه‌ای دیگر نیز توسط ائوموکوس از شاگردان افلاطون و آرخوتاس در سیزیکوس[2] واقع در آسیای صغیر شمالی

1) Tarentum 2) Cyzicus

شمارهٔ ۸
(بهمن ۱۳۸۰) صص ۴۸ـ۴۵

تأسیس شد. منایخیموس از شاگردان افلاطون نیز موفق به ابداع مقاطع مخروطی گردید.

تکامل هندسه در سه سدهٔ نخست هندسهٔ یونانی سه مسیر مهم را پیمود، ابتدا بسط مطالبی که در اصول تدوین شد که توسط فیثاغورسیان شروع شد و بعدها بقراط و ائوموکسوس مطالبی به آن اضافه کردند. مسیر دوم شامل بسط مفاهیمی در بی‌نهایت بزرگ‌ها و بی‌نهایت کوچک‌ها بود و در سومین مسیر، هندسه به‌سوی هندسهٔ عالی یا هندسهٔ منحنی‌هایی به‌جز دایره و خط مستقیم و سطوحی به‌جز صفحه و کُره است، که نتیجهٔ مستقیم تلاش هندسه‌دانان برای حل سه مسألهٔ مشهور افلاطون بود.

اسکندریه

جنگ پلوپنزی یکی از دوره‌های تفرقهٔ سیاسی بین ایالات یونان را در پی داشت و آن‌ها را به صورت طعمه‌ای آسان برای شاه فیلیپ مقدونی که در شمال به قدرت رسیده بود، درآورد.

شاه فیلیپ، پیش از آن که یونانی‌ها بتوانند دفاع مناسبی در برابر حملاتش بیابند با شکست در آتن در کرنیه[1] در ۳۳۸ ق.م، یونان را به امپراطوری جدید خود ضمیمه کرد. دو سال پس از سقوط یونان، اسکندر کبیر جاه‌طلب، جانشین پدر خود فیلیپ شد و فتوحات بی‌مانند خود را آغاز کرد. اسکندر در هر جا که ارتش جهان‌گشای خویش را هدایت می‌کرد، شهرهای جدیدی برپا می‌کرد.

به‌همین ترتیب زمانی که به مصر وارد شد اقدام به ساختن شهر افسانه‌ای اسکندریه کرد. گفته‌اند اسکندر خود محل ساختن شهر را تعیین کرد و نقشهٔ شهر را که به‌صورت گستردهٔ شنل معروف خود بود طراحی کرد. پس از درگذشت اسکندر، امپراطوری او بین فرمانروایان نظامی او تقسیم شد که مصر را بطلمیوس تحت سلطه گرفت، او اسکندریه را به‌عنوان پایتخت خود برگزید و برای جلب دانشمندان به این شهر، دانشگاه اسکندریه را بنا نهاد. دانشگاه اسکندریه اولین دانشگاه به مفهوم امروزی آن در جهان بود که شامل سالن‌های سخنرانی، آزمایشگاه‌ها، باغ‌ها، موزه‌ها، کتابخانه و خوابگاه بود. کتابخانهٔ معروف آن که تا سال‌ها بزرگترین کتابخانه در جهان بود مشتمل بر ۶۰۰,۰۰۰ پاپیروس بود.

اقلیدس

دربارهٔ زندگی و شخصیت اقلیدس اطلاعات کمی وجود دارد تاریخ وقایع عمدهٔ زندگی او و حتی محل تولدش نامعلوم است. گفته می‌شود که احتمالاً اقلیدس تعلیمات ریاضی خود را در مدرسهٔ افلاطونی آتن فرا گرفت و سپس به‌صورت استاد ریاضیات و هندسه در حدود سال ۳۰۰ ق.م در دانشگاه اسکندریه به‌کار مشغول شد.

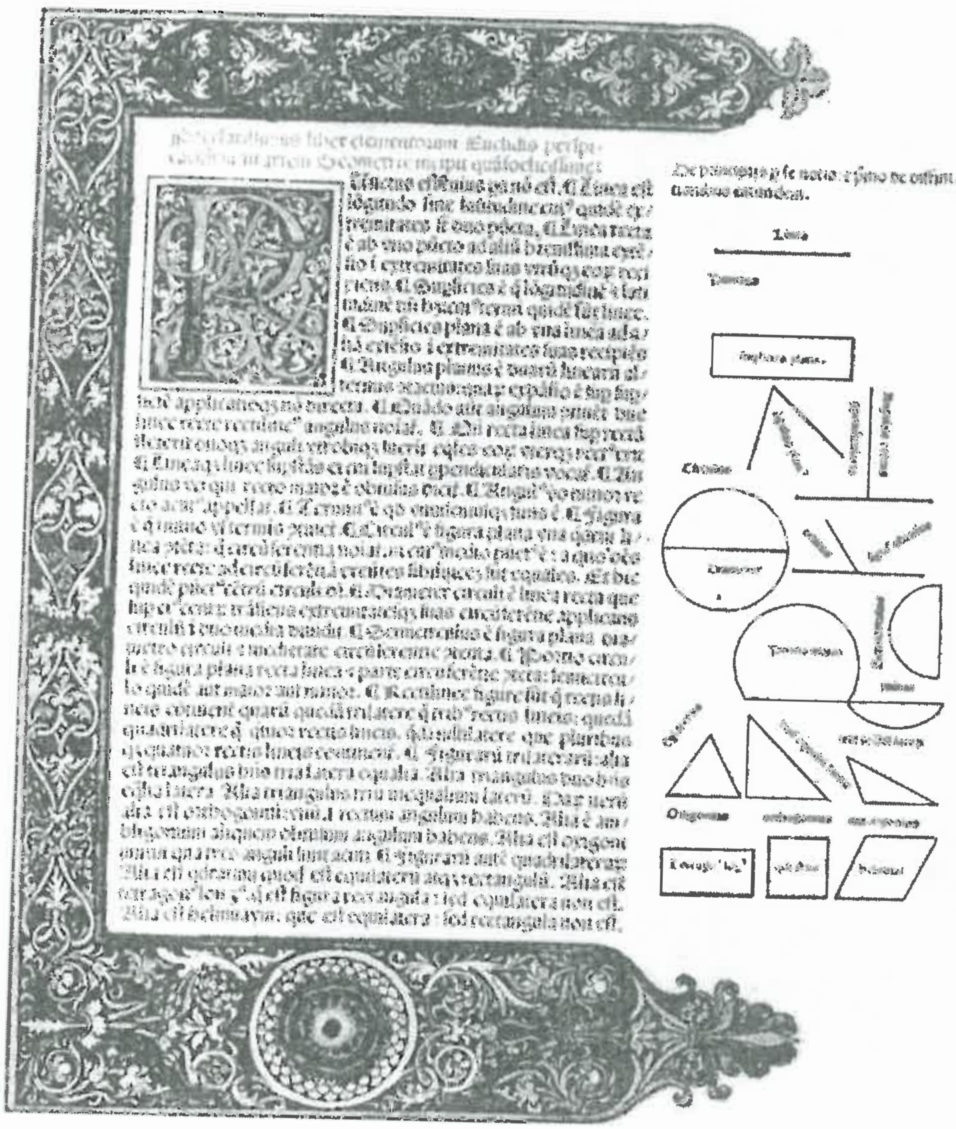
مهمترین اثر اقلیدس، کتاب «اصول» اوست که روی هم رفته شامل سیزده جلد کتاب می‌شود. «اصول» مهم‌ترین اثر از ده اثر معروف اقلیدس است که اکنون فقط متن کامل پنج‌تای آن‌ها موجود است.

اقلیدس علاوه بر تدوین نتایج جدید و اصول هندسهٔ خود درکتاب «اصول»، اقدام به جمع‌آوری و مرتب کردن نتایج و قضایای پیشینیان درکتاب خود کرد. اقلیدس در اثبات قضایا روش منظمی را در پیش گرفت، ابتدا فرض، نشان دادن با شکل، سلسلهٔ استنتاج برای رسیدن

1) Chaeronea

به حکم و سرانجام اثبات قضیه.

برخلاف تصورات رایج، «اصول» اقلیدس منحصر به هندسه نبوده بلکه شامل مقدار قابل‌توجهی مطلب راجع به نظریهٔ اعداد و جبر مقدماتی «هندسی» است.



با آن‌که مندرجات «اصول» مهم است، شاید آن‌چه مهم‌تر است، روش صوری عرضهٔ مندرجات و قضایای آن است. قطعاً یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای ریاضیدانان یونان قدیم، آفرینش شکل تفکر اصل موضوعی است. برای این‌که یک گزاره در یک دستگاه قیاسی ثابت شود باید نشان داد که این گزاره، نتیجهٔ منطقیِ چند گزارهٔ دیگر است که قبلاً به اثبات رسیده‌اند. گزاره‌های اخیر نیز باید خود به‌همین ترتیب حاصل شده باشند و چون این دور تسلسل نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد در ابتدا باید تعداد محدودی از گزاره‌ها، بدون اثبات پذیرفته شود.

تأثیر جنبهٔ صوری اصول اقلیدس بر نسل‌های بعدی آن‌چنان عظیم بود که این اثر به‌صورت الگویی برای نمایش دقت در ریاضیات در آمد.

اصول موضوعه که اقلیدس برای هندسهٔ خود در کتاب «اصول» برگزید مشتمل بر پنج اصل زیر است که تمامی قضایای هندسه درکتاب «اصول» از آن‌ها نتیجه شده‌اند.

۱) از هر نقطه می‌توان خط مستقیمی به هر نقطهٔ دیگر کشید.

۲) هر خط مستقیم متناهی را می‌توان روی همان خط به‌طور نامحدود امتداد داد.

۳) می‌توان دایره‌ای با هر نقطهٔ دلخواه به‌عنوان مرکز آن و شعاعی مساوی هر پاره خط رسم شده از مرکز آن‌را رسم کرد.

۴) همهٔ زوایای قائمه با هم مساوی‌اند.

۵) اگر خط مستقیمی دو خط مستقیم را قطع کند به طوری‌که مجموع زوایای داخلی یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد،درصورتی که این دو خط مستقیم به‌طور نامحدود امتداد داده شوند، در طرفی که دو زاویه مجموعاً از دو قائمه کمترند هم‌دیگر را قطع خواهند کرد.

مراجع.

[1] Heat, T.L, History of great Mathematics, vol. 1 New York, Oxford University Press, 1921.

[۲] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات جلد اول، محمدقاسم حیدری‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی.

[۳] جورج سارتون، تاریخ علم، احمد آرام، انتشارات امیرکبیر.

[۴] جان برنان، علم در تاریخ، ح.اسدپورپیرانفر و کامران فانی، انتشارات امیرکبیر.

محل فروش :

روزنامه فروشی ها و کتاب فروشی های معتبر سراسر کشور

نشانی : تهران ، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵

تلفن : ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)

دورنگار : ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)

پست الکترونیک : math@schoolnet.sharif.ac.ir