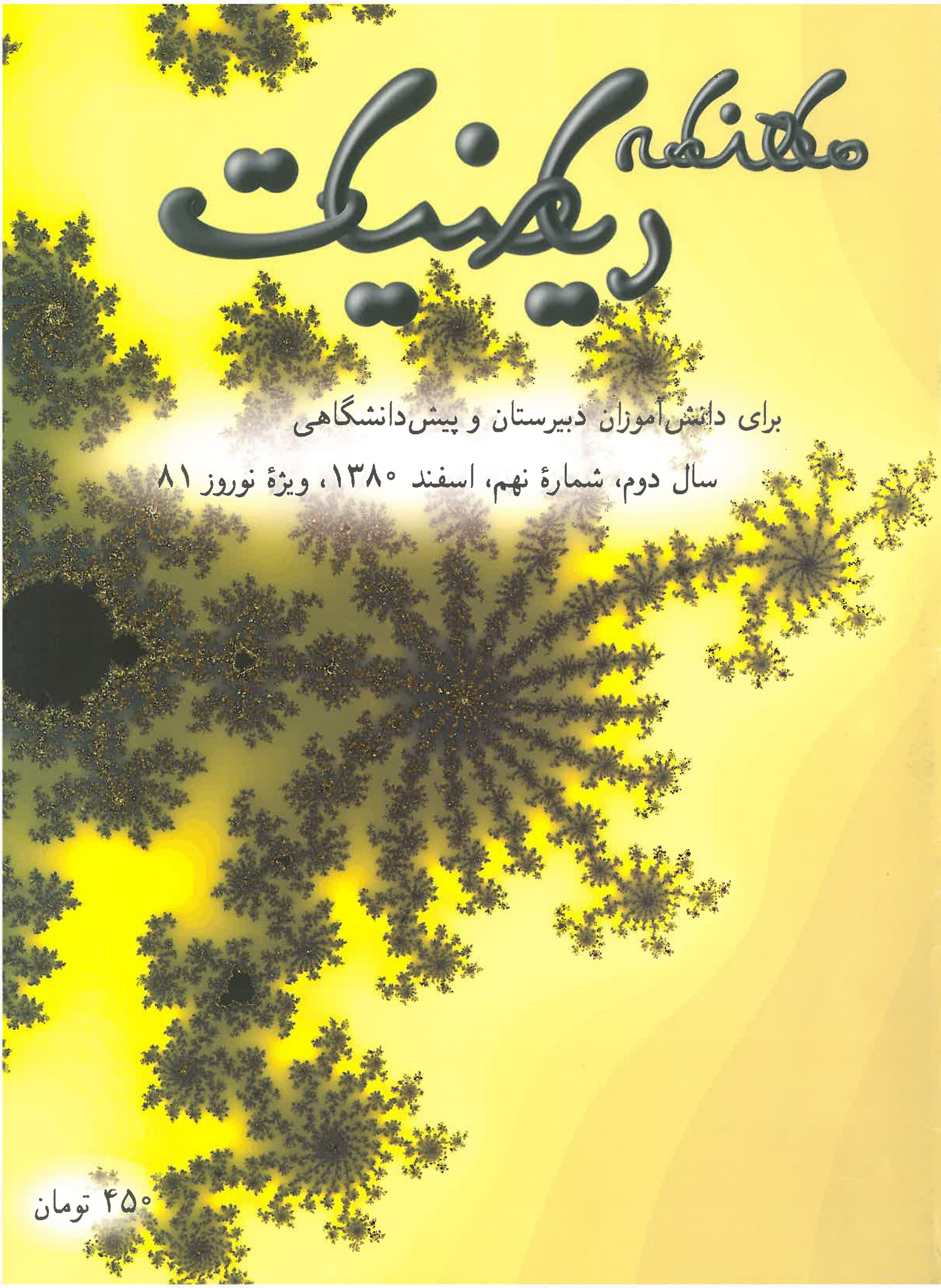


ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال دوم، شمارهٔ نهم، اسفند ۱۳۸۰، ویژهٔ نوروز ۸۱

۴۵۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال دوم، شمارهٔ نهم، اسفند ۱۳۸۰
ویژهٔ نوروز ۸۱

نشانی پستی ماهنامه
تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵
تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)
نمابر: ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

فهرست

روی جلد: قسمتی از مجموعهٔ مندلبرات (نگاه کنید به «فرکتال چیست؟»)
طرح پشت جلد: نگاه کنید به «توپولوژی و معما»

به جای یادداشت

از راست به چپ: نجمه سروشی، آزاده فرجی، سپیده چمن‌آرا، دکتر یحیی تابش، رویا درودی، امید نقشینه‌ارجمند، بردیا حسام.

• یحیی تابش

آن مرد گفته بود گورش جایی باشد که هر بهار شکوفه‌های گلابی بر آن ریزد. درکوچه باغ‌های نیشابورکه بگردیم و دنبال بهار باشیم به باغ خیام می‌رسیم و شکوفه‌های گلابی که بر مزار او می‌ریزند، انگار اصلاً حکیم آنجا حضور دارد و تقویم جلالی را زیر و رو می‌کند تا حلول سال نو را نوید

شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۷ـ۲

دهد و بعد می نشیند و است به‌کمک مقاطع مخروطی و روش‌های هندسی معادلات پیچیده جبری را حل می‌کند، اما هراس به دل می‌افتد یا صدای سم اسب سواران مغول می‌آید که نیزه به‌دست کوچه باغ‌های نیشابور را در می‌نوردند و کتابخانه‌ها را به آتش می‌کشند. سال‌ها بر تل خاکستر کتاب‌ها نشستیم وقتی شکوفه‌های گلابی نیز تسلایمان نداد که حکیم در خاک خفته بود و آن شور علمی رهایی بخش ما را وانهاده بود ولی کوچه باغ‌های نیشابور بوی عطر بهار را دارد، بهاری که ما را بر سپهر اطلاعاتی فرا می‌خواند تا با عشق و امید با ابزارهای توانمند کننده‌ای که پیش رویمان قرار داده است پرواز کنیم و اوج گیریم. شکوفه‌های گلابی را بر مزار آن حکیم می‌ریزیم.

• سپیده چمن‌آرا

آن زمان که خودم دانش‌آموز بودم، این موقع سال که می‌شد، شور و هیجان عجیبی زندگی مرا پُر می‌کرد. امتحان‌های ثلث دوم، خانه تکانی اطاق خودم و کمک به مادر در خانه تکانی منزل، فکر و برنامه‌ریزی برای تعطیلات نوروز و . . . و بالاخره درست کردن کارت تبریک عید برای معلم‌ها و دوستان و همکلاسی‌های عزیزم. برای همهٔ معلم‌هایم یک کارت تبریک نقاشی می‌کردم و روی هر یک جمله‌ای از سر محبت و تشکر و قدردانی می‌نوشتم. هیچ دوکارتی طرح و نوشتهٔ یکسان نداشت. اما نکتهٔ جالب اینجا بود که همیشه پس از اتمام کار، کارت‌ها را از نظر کیفیت نقاشی و نوع طرح برای خودم رده‌بندی می‌کردم و به‌ترتیب به معلمینی که بیشتر دوستشان داشتم می‌دادم و همیشه بهترین‌ها تقدیم به دبیران عزیز دروس ریاضی (جبر و مثلثات و هندسه و ریاضیات جدید) می‌شد! هنوز هم دوستشان دارم و هنوز هم قدردان زحمات بی‌شایبه‌شان هستم. امیدوارم هر جا که هستند، شاد باشند و سال خوبی را آغاز کنند. راستی نوروز بر شما دوستان جوانم و نیز بر همهٔ دبیران عزیز ریاضی در سراسر کشورمان مبارک باشد . . .

• بردیا حسام

«سال نو مبارک!» نه، این که یادداشت نشد . . . خوب؛ پس، «این عید سعید باستانی را . . .» نمی‌دانم، آخر الان هم وقت یادداشت نوشتن است؟ از خدا که پنهان نیست، از شما هم نباشد: من «تنبل»ام. نه خیلی، اما آن‌قدر تنبل هستم که همهٔ کارهایم را برای آخرین ساعت‌ها بگذارم و حالا، درست در همان آخرین ساعت‌ها، باید در حالی که در فکر بستن صفحه‌های مجله‌ام، «یادداشت» هم بنویسم. آخر این انصاف است؟!

به هر حال، یادم نیست که کی به ریاضیات علاقمند شده‌ام. یادم می‌آید که تا سوم دبیرستان هم به ریاضی خواندن در دانشگاه فکر نمی‌کردم؛ هر چند که از دوم دبیرستان، دوست خوبی ــ که آن وقت‌ها دانش‌جوی ریاضی بود ــ سعی می‌کرد که هرچه که برای خودش جالب بود به من هم یاد بدهد. آن روزها، چیزی را می‌دیدم که با کتاب ریاضی‌ام فرق داشت: «زیبا» بود و من می‌فهمیدم که «چرا» این طور می‌شود و مثلاً فلان فرمول «از کجا» می‌آید و این، مهم‌ترین خاصیت آن «ریاضیات» بود.

اولین بار که جدی به «جدی ریاضی خواندن» فکر کردم اما، بعد از مرحلهٔ اول کنکور بود (آخر، من از شما کمی پیرترم. نه به اندازهٔ یک تیرانوزوروس، فقط آن‌قدر که کنکورم دو مرحله‌ای باشد!). چلهٔ تابستان، گذارم یک روز به «شریف» افتاد و از مهر همان‌جا بست نشستم، تا همین امروز! البته، تا آن وقت که مجله به دست شما برسد، احتمالاً از رسالهٔ فوق لیسانس‌ام هم دفاع کرده‌ام . . . .

در این شش ــ هفت سال، سعی کرده‌ام که «ریاضی‌خوان حرفه‌ای» باشم، به امید «ریاضی‌دان حرفه‌ای» شدن. متأسفانه، نه درکودکی‌ام خرده نان شمرده‌ام و نه وقتی روی زمین شکل می‌کشیده‌ام کشته شده‌ام؛ بنا بر این نه گاوس هستم و نه ارشمیدس!

• رؤیا درودی

به تست چهارگزینه‌ای زیر پاسخ دهید:

احساس می‌کردم که مثل آدم‌هایی که آن علم را به‌وجود آورده‌اند فکر می‌کنم. در این مشخصه، ریاضی با همهٔ درس‌های دیگر متفاوت بود، یعنی تا حدودی توانایی دیدن مسیر.

مثل اغلب افراد موفقیت‌های دوران دبیرستانم انگیزه‌هایم را برای آموختن ریاضی بیش‌تر و بیش‌تر کرد. در دوران دبیرستان در نظریهٔ اعداد احساس لذت زیادی می‌کردم. این احساس بعدها وقتی با آنالیز ریاضی برخوردم، خیلی بیش‌تر در من به‌وجود آمد. آن چیزی که برای من مهم بود این بود که احساس می‌کردم آنالیز به‌طور طبیعی در دنیای ریاضی وجود دارد و به همین دلیل می‌توان مسیر حل مسأله را در آنالیز تا حدودی درک کرد. من در حال حاضر دانشجوی دورهٔ دکتری در دانشگاه ام.آی.تی [1] آمریکا هستم.

این مسأله همیشه برایم جالب بود. بد نیست شما هم چند دقیقه با آن سرگرم شوید.

مسأله. عدد حقیقی a به گونه‌ای است که با ۵ تا مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع واحد را پوشاند. ثابت کنید با ۴ تا نیز می‌توان این‌کار را کرد. اگر این مسأله را حل کردید سعی کنید به‌جای اعداد ۵ و ۴، اعداد دیگری بگذارید که مسأله باز هم درست باشد.

در پایان امیدوارم همان‌گونه که ریاضیات می‌سراید همیشه بیاندیشید.

محسن بیاتی

اصولاً از همان اواخر دبستان مسألهٔ ریاضی حل کردن برایم جالب بود. چون ریاضی تنها مبحثی بود که می‌شد در آن مسأله حل کنم. در دورهٔ راهنمایی با هندسه آشنا شدم وسط و جا برای مسأله بیش‌تر شد. در کل می‌شود گفت علاقه‌مندی‌ام به ریاضی از مسأله حل کردن شروع شد. در دبیرستان از هندسه، به‌خصوص و هم‌چنین ترکیبیات خوشم می‌آمد، چون کلی مسأله جالب در آن‌ها پیدا می‌شد. بعد از آن هم ریاضی خواندن جدی‌تر شد طوری که در دانشگاه هم رشتهٔ ریاضی را انتخاب کردم و حالا هم در «استانفورد» ریاضی می‌خوانم. الان شاخه‌ای که بیش‌تر روی آن تمرکز دارم همان هندسه است، البته به سبک دانشگاهی و هم‌چنین به توپولوژی نیز می‌پردازم.

امیدوارم این مسأله را نشنیده باشید.

مسأله. تعدادی سکه روی میز قرار دارد که بعضی از آن‌ها از طرف شیر هستند و بعضی از آن‌ها طرف خط. می‌دانیم که ۷ تا از سکه‌ها از طرف شیر هستند. تعداد سکه‌ها زیاد است و ما تعداد کل سکه‌ها را نمی‌دانیم. چشم‌های ما بسته است و ما تنها می‌توانیم سکه‌ها را پشت و رو کنیم، حتی نمی‌توانیم کل سکه‌ها را بشماریم. حالا مسأله این است که سکه‌ها را دو دستهٔ نه لزوماً برابر کنیم طوری که تعداد سکه‌هایی که از طرف شیر هستند در دو دسته، مساوی باشند.

رامین دانشی

نوشتن چند کلمه راجع به خودم خیلی مشکل‌تر از نوشتن چندین صفحه مطلب دربارهٔ ریاضیات است.

---

۱) MIT

راجع به این‌که کی به ریاضیات علاقمند شدم، واقعاً مبدأ خاصی را نمی‌دانم؛ چون زمانی بوده که از آن به شدت متنفر شده‌ام و یا میزان علاقمندی‌ام بدون حد بوده است. به هر حال از این مسأله مطمئنم که بعضی مسائل ریاضیات یا اشکال هندسی که عاشقان ریاضیات را در دوران کودکی تحت تأثیر قرار می‌داده تأثیر خاصی در من نداشتند. در واقع علاقه‌ام به ریاضیات به تدریج افزایش یافت شاید یک جور احساس لذت از مطالعه ریاضیات باشد، بعضی شاخه‌های آن هیچگاه برایم جذاب نبوده و بعضی شاخه‌های آن به شدت مرا مجذوب کرده. به طور مثال هندسه و آنالیز همیشه برایم هیجان انگیز بوده ولی مثلاً نظریه مجموعه‌ها و یا جبر همیشه برایم عجیب و خسته کننده بود.

در حال حاضر علاقه‌ام بیشتر در زمینه اقتصاد است و به کاربردهای ریاضیات بخصوص نظریه بازی‌ها در اقتصاد می‌پردازم. ارتباط بین اقتصاد و ریاضیات مطالعه آن بقدری برایم جالب است که تمام وقتم را صرف این موضوع می‌کنم.

هادی سلماسیان

تازه کلاس اول دبیرستان را تمام کرده بودم که در یک دورهٔ ۴ روزهٔ آشنایی با ریاضیات به اسم کارسوق ریاضی که توسط بچه‌های سال‌های بالاتر مدرسهٔ خودمان برای کوچک‌ترها برگزار شد شرکت کردم و اصلاً از همان موقع بود که فهمیدم ریاضیات چه‌قدر جالب است. بعد از آن هم طبیعتاً بیش از همه چیز به ریاضی و تا حدی هم فیزیک علاقه‌مند شدم. شرمنده‌ام از این‌که نه برای ادبیات مایهٔ چندانی داشتم و نه استعدادی در ورزش نشان دادم!

در حال حاضر در آمریکا، دانشجوی دکتری ریاضی در دانشگاه ییل [۱] هستم و به بررسی نمایش‌های گروه‌های لی مشغولم (به‌طور خلاصه، تقریباً «جبر کارم»).

مسأله. $n \geq ۲$ نقطه به‌دلخواه روی صفحه انتخاب شده‌اند. نشان دهید همیشه دو تا از آن نقاط را می‌شود انتخاب کرد طوری‌که درون یا روی دایره‌ای که آن دو نقطه دو سر یک قطرش هستند، حداقل $[\frac{n}{۳}]$ از نقطه‌ها قرار گرفته باشند.

(در اینجا $[\frac{n}{۳}]$ به معنای بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از $\frac{n}{۳}$ بیش‌تر نباشد.)

۱) Yale

یادداشت

پرویز شهریاری

از استاد پرویز شهریاری درخواست کردیم که مطلبی برای شماره ویژهٔ سال نو برای ماهنامهٔ ریاضیات ارسال کنند، از ایشان سپاسگزاریم که این یادداشت را ارسال کرده‌اند.

استاد شهریاری از دبیران پیش‌کسوت ریاضی کشور هستند که سال‌ها علاوه بر تدریس، کتاب‌های گوناگونی نیز اعم از کتاب‌های درسی یا جنب درسی تألیف و ترجمه کرده‌اند، استاد شهریاری نشریهٔ آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات را چندین سال منتشر کرده‌اند.

اجازه بدهید کمتر دربارهٔ خودم و بیش‌تر دربارهٔ مجلهٔ شما صحبت‌کنیم. وقتی نخستین شمارهٔ مجلهٔ ریاضیات را دیدم بسیار خوشحال شدم. بعد از مجله‌های «یکان» (با همت عبدالحسین مصحفی) و «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» (که ۷۰ شمارهٔ آن را منتشرکردم) نشریه‌ای برای دانش‌آموزان دبیرستانی که درگیر تست وکنکور نشده باشد و به مطالب اصلی ریاضیات بپردازد، نبود یا من ندیده بودم. مجلهٔ شما که با راهنمایی دکتر تابش و به یاری جوانانی که علاقه به ریاضیات دارند، منتشر می‌شود به دور از هیاهوی کنکور (که دانش مملکت را به ویرانی کشانده است) راه خود را می‌رود و آرام آرام راه خود را باز می‌کند. من بعد از انتشار نخستین شمارهٔ «ماهنامهٔ ریاضیات» چند کلمه نوشتم و انتشار آن‌را به دکتر تابش تبریک گفتم. با اجازهٔ شما به کمبودهای مجله بپردازیم، وگرنه به آن چه شما در صفحه‌های مجله می‌گذارید، ایرادی نیست. مجلهٔ شما یک نشریهٔ مربوط به ریاضیات نظری است که کوشش می‌کند موضوع‌ها و مسأله‌های ریاضیات مقدماتی را در محدودهٔ ریاضیات دبیرستانی مطرح کند و در این مسیر هم کم و بیش موفق است.

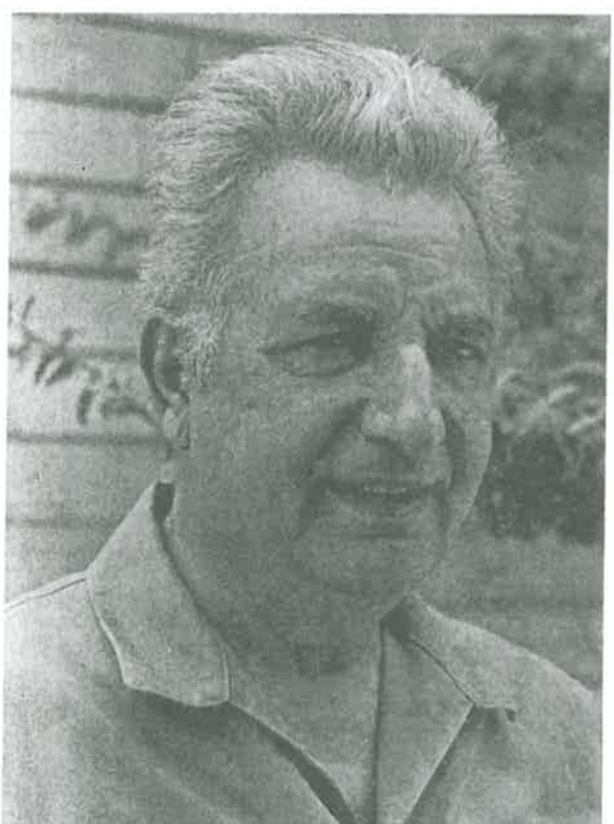
ریاضیات شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۹ـ۸

ولی در مجلهٔ شما خبری از تاریخ، فلسفه و کاربردهای ریاضیات، که به ندرت و آن هم با برگردان از نوشته‌های غربی‌ها، به چشم می‌خورد و از طنزها و سرگرمی‌های ریاضیات، که می‌تواند نظر دانش‌آموزان را جلب کند، دیده نمی‌شود. مجلهٔ شما بیش‌تر به المپیادهای ریاضی نظر دارد که آن هم بیش‌تر مربوط به ریاضیات نظری می‌شود. بسیاری از کسانی‌که به ریاضیات علاقه‌مندند و در بین آن‌ها کسانی پیدا می‌شود که تمام زندگی خود را صرف آن می‌کنند، به‌دلیل همین ناآگاهی از تاریخ گذشتهٔ ریاضیات و به احتمالی به دلیل پایین بودن سطح آگاهی آن‌ها از خودِ ریاضیات نظری، به راهی افتاده که بیش‌تر به «چاه ویل» می‌ماند و بعد از بیش از دو هزار سال، دوباره به یاد حل مسأله‌های «تبدیل دایره به مربع هم‌ارز آن»، «دو برابر کردن مکعب» و «پیدا کردن یک سوم زاویه به یاری پرگار و خط‌کش» افتاده‌اند و کارشان به جز برخی روزنامه‌ها، به تلویزیون هم کشیده شده است. یکی از کارهای مجلهٔ شما باید جلوگیری از اتلاف وقت این عزیزان باشد.

به‌ویژه، روشن کردن سودمندی‌های تاریخ گذشتهٔ ریاضیات، می‌تواند یکی از راه‌های چرخاندن ذهن جوانان ما به سمت مسأله‌ها و موضوع‌هایی باشد که ریاضیات امروز می‌طلبد. ریاضیات کشور ما ایران در تمامی دوران تا سدهٔ هفتم میلادی، ریاضیات کاربردی بوده است. به تقریب، همهٔ ریاضیات محاسبه‌ای (حساب، جبر، مثلثات) در ایران به‌وجود آمده و پیش رفته است. از دوره‌های نزدیک‌تر به ما، یعنی ریاضیات ایرانی سده‌های چهارم تا نهم هجری شمسی سندهای بیش‌تری در دست است، ولی از ایران پیش از سدهٔ هفتم میلادی و کارهایی که در ایران شده است، کم‌تر آگاهی داریم و جز نام‌هایی مثل «اُستانس» که مشهور به مَغ بزرگ بوده و یا از نامِ نوشته‌هایی مثل «زیج شهریار» اطلاعی نداریم. تنها می‌دانیم که نخستین ترجمه‌ها از کتاب‌های یونانی، از پهلوی و سریانی انجام گرفته است. پژوهش در تاریخ ریاضیات ایرانی، باید یکی از سرلوحه‌های کار ما ایرانیان باشد. در اکثر کتاب‌هایی که دربارهٔ تاریخ ریاضیات نوشته شده است، هنوز «جمشید کاشانی» را به نام «الکاشی» و «خیام‌نیشابوری» را به نام «الخیم» ریاضی‌دان عرب می‌دانند و «فضل تبریزی» را به‌نام «آناری‌توس» و پورسینا را به نام «آوسین» باز هم از تازیان می‌شمارند.

تاریخ ریاضیات، فلسفهٔ ریاضیات و کاربردهای ریاضیات، اگر به‌درستی و به‌صورت علمی و منطقی مطرح شود، به ویژه از نظر آموزش ریاضی می‌تواند سهم به‌سزایی داشته باشد. باید جوانان ریاضی‌دان را تشویق کرد کتاب‌های بزرگان ریاضی ما را از عربی به فارسی و با نمادها و اصطلاح‌های امروزی برگردانند، به‌نحوی که بتواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان و دانش‌جویان قرار گیرد و بحث مربوط به تاریخ ریاضیات را دامن بزنند.

من درددل‌های زیادی در زمینهٔ آموزش ریاضی دارم که جای آن در این مختصر نیست و معتقدم تا زمانی که این کنکور را برندارند و دست از تست نکشند، کار آموزش و از جمله آموزش ریاضی به جایی نمی‌رسد. این کنکور به شکلی که وجود دارد از یک طرف سطح آگاهی‌های جوانان را پایین نگه‌می‌دارد و از طرف دیگر به فرصت‌طلبان اجازه می‌دهد از نیاز جوانان ما سوء استفاده کنند و به مال‌اندوزی بپردازند. کنکور سال‌هاست که دانش مملکت را ویران کرده است و باید فکری عاجل برای آن کرد.



سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات اصفهان

سیدمصطفی سیادت‌موسوی

پس از برگزاری سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات اصفهان تحت عنوان جایزهٔ پرفسور رضا در سال ۱۳۷۹ که با حضور ایشان برگزار شد، تصمیم گرفته شد که در سال جاری علاوه بر طرح‌های پژوهشی انجام شده توسط دانش‌پژوهان خانهٔ ریاضیات، به‌منظور تشویق و گسترش فرهنگ پژوهش، به تمام مدارس و دانشگاه‌های سطح استان اصفهان به وسیلهٔ نامه و پوستر اطلاع داده شود که نتایج کارهای تحقیقاتی دانش‌آموزان و دانشجویان در زمینهٔ علوم ریاضی را نیز به جشنوارهٔ خانه ریاضیات ارسال دارند.

مجموعاً ۵۴ طرح برای داوری دریافت شد که ۸ طرح دانشجویی و ۲۰ طرح دانش‌آموزی از نقاط مختلف استان و ۲۶ طرح نیز از دانش‌پژوهان خانهٔ ریاضیات مورد داوری قرار گرفت.

برای داوری این طرح‌ها از ۲۶ نفر از اعضای هیأت علمی دانشگاه‌های صنعتی اصفهان، اصفهان و دبیران ریاضی کمک گرفته شد و کمیتهٔ داوری جشنواره متشکل از آقایان حسینعلی موحدی و محمود تلگینی (دبیران ریاضی)، دکتر احمد حقانی و دکتر علی همدانی (اعضای هیأت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان)، دکتر جعفر زعفرانی و دکتر محمود خاتون‌آبادی (اعضای هیأت علمی دانشگاه اصفهان) بود که نهایتاً طرح‌های برگزیدهٔ سومین جشنواره را در سه گروه انتخاب کردند:

گروه اول: طرح برگزیدهٔ دانشجویی.

اعداد اول، خواص شگفت‌انگیز و نتایج وابسته از آقای محمدعلی اللهیاری.

گروه دوم: طرح‌های برگزیدهٔ اول دانش‌آموزی (۵ طرح).

- الگوریتم‌های گراف: پویان امینی، سیدامین سیدی، هادی محضرنیا، کاوه مهدویانی، کیان میرجلالی.
- دریچه‌ای به‌سوی جهان فراکتالی: مهسا امیرعبداللهیان، نیلوفر بان، فاطمه فانی‌ثانی.
- رمزنگاری: خاطره حاجی‌زاده، رزیتا رشت‌چی، مریم سلیمانی، زهرا سینایی.
- دوران، تجانس، تجانس مارپیچی: مهشاد اسلامی‌فر، فروغ ماه‌پیشانیان.
- مدل دینامیکی کشف و استخراج گاز طبیعی: فهیمه باغبان، زهرا روح‌اللهی.

گروه سوم: طرح‌های برگزیدهٔ دوم دانش‌آموزی (۶ طرح).

- کاربرد کسرهای مسلسل: فریده طباطبایی، سهیلا کاوشی.
- ورود به دنیای سهمی: سمیرا خادم‌القرآن، مریم مهدیزاده
- اصل شمول و استثنا: فرنوش فروزان، راضیه گلاب‌بخش.
- اثباتی کوتاه از آخرین قضیهٔ فرما[1]: علیرضا بختیاری.
- بهترین روش تدریس ریاضی: مریم آقابابایی، نسرین احمدی.
- عالی‌قاپو: الهام‌السادات زهرایی، الهه شکل‌آبادی، لیلا شیخان، عصمت عسگرپور، زهرا هیبتی.

دو طرح الگوریتم‌های گراف و ورود به دنیای سهمی نیز برای ارایه در مراسم پایانی جشنواره برگزیده شد. جوایز جشنواره طی مراسمی که در روز ۱۴ دی‌ماه ۱۳۸۰ در محل خانهٔ ریاضیات و با حضور مسئولین شهر و استادان و دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان و خانوادهٔ آن‌ها برگزار شد، به‌دست استاد پیش‌کسوت ریاضی ایران آقای دکتر منوچهر وصال و آقای دکتر امیدعلی کرمزاده استاد دانشگاه اهواز و آقایان مهندس جوادی، شهردار محترم و مولایی، رییس محترم شورای اسلامی شهر اصفهان به برگزیدگان اهدا گردید.

لازم به یادآوری است که سومین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات از دهم الی چهاردهم دی‌ماه ۱۳۸۰ برگزار شد. در این جشنواره علاوه بر طرح‌های پژوهشی انجام شده در خانه، یک سخنرانی تحت عنوان «ابن هیثم و تبدیلات هندسی» توسط آقای دکتر معصومی همدانی و سخنرانی دیگری تحت عنوان «چگونه قضیه بسازیم» توسط آقای دکتر کرمزاده برای حاضرین ارایه شد.

گزارشی از جشنوارهٔ جوان خوارزمی.

یکی از طرح‌های پژوهشی خانهٔ ریاضیات اصفهان تحت عنوان «آشنایی با نظریهٔ گره‌ها» که توسط خانم‌ها ملیحه ابراهیمی، رزیتا رشت‌چی، مریم سلیمانی و زهرا سینایی انجام شده بود، در بخش دانش‌آموزی جشنوارهٔ خوارزمی در سال ۱۳۸۰ رتبهٔ نخست را کسب نمود. این، اولین طرح پژوهشی گروهی و یکی از معدود طرح‌های ریاضی است که توانسته چنین موقعیتی را کسب نماید.

---

۱) در این تحقیق حالت $n = ۲, ۳$ معادله فرما یعنی $x^n + y^n = z^n$ بررسی شده است. ماهنامهٔ ریاضیات.

روزآمد شدن مسأله‌ها

عبدالحسین مصحفی

استاد عبدالحسین مصحفی از پیش‌کسوتان جامعه ریاضیات ایران که سال‌ها **مجلهٔ یکان** را منتشر می‌کردند دعوت ماهنامه ریاضیات را اجابت کردند و برای این شماره این مقاله را ارسال کرده‌اند. از ایشان سپاس‌گزاریم و خوانندگان عزیز را به مطالعهٔ مقاله دعوت می‌کنیم.

آدمی از همان زمان که با اعداد سروکار یافته با مسأله‌هایی از حساب دست به‌گریبان بوده است. چگونگی انجام دادن عمل‌ها روی عددها از نخستین مسأله‌ها بوده‌اند. آن‌گاه هم که شیوه‌های گوناگون عدد نویسی به‌کار رفتند و آدمی توانست عددهای بزرگ را بنویسد و بخواند، انجام دادن عمل‌ها روی این‌گونه عددها به‌ویژه دست‌یابی به حاصل چنین عمل‌هایی، مسأله‌هایی بوده‌اند که تا به امروز هم بر جا مانده اما هر زمان بنا بر ابزارهای محاسبهٔ تازه پدید آمده، بیانی تازه و روزآمد را یافته‌اند. چندتایی از این مسأله‌ها هم در ردیف مسأله‌های تاریخی بارها و بارها بازگو شده‌اند و می‌شوند. مسألهٔ دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج، که در قالب یک داستان بیان می‌شود، از این‌گونه مسأله‌هاست. بنابر داستان، مخترع بازی شطرنج پس از نمودن آن بر پادشاه کشور و زمان خودش، مختار می‌شود پاداشی را به‌دل‌خواه خویش درخواست کند. او می‌خواهد که برای خانهٔ یک صفحهٔ شطرنج یک دانه گندم، برای خانهٔ دوم ۲ دانهٔ گندم، برای خانهٔ سوم ۴ دانهٔ گندم، و برای هر خانهٔ دیگر هم دانه‌های گندم به تعداد دو برابر خانهٔ پیش از آن‌را فراهم آورند و کل دانه‌های گندم فراهم شده را به او بدهند. شاه و درباریان این درخواست را ناچیز و ابلهانه می‌پندارند اما آن‌گاه که حاصل را برآورد می‌کنند در می‌یابند که از برآوردن آن عاجزند. در داستان از این‌که تعداد همهٔ دانه‌های گندم چگونه حساب شده است حرفی به میان نمی‌آید اما این پرسش به میان می‌آید که آن تعداد برابر با چه عددی است. شگفت این‌که هیچ یک از درباریان آن پادشاه به فکرش نمی‌رسد که درخواست مرد را با جوابی ملانصرالدینی می‌توان از سر واکرد؛ از ملا پرسیدند مرکز دنیا کجاست؟ پاسخ داد آن‌جا که میخ طویلهٔ افسار خرش را به‌زمین کوبیده است و گفت اگر باور ندارند اندازه‌گیری کنند. پرسشی را که تعلق به محال باشد با پاسخی تعلیق به محال می‌توان از سر واکرد. در برابر درخواست مخترع شطرنج می‌توانستند بگویند وسیلهٔ حمل گندم‌ها را بیاورد تا آن‌ها را به او تحویل دهند!

دانه‌های گندمِ درخواستی، تصاعدی هندسی با جملهٔ یکم برابر با یک، قدر نسبت برابر با ۲ و تعداد جمله‌های برابر با ۶۴ را می‌سازند و بنابر دستور مربوط به مجموع جمله‌ها، تعداد همهٔ دانه‌های گندم برابر است با

$$S = ۱ \times \frac{۲^{۶۴} - ۱}{۲ - ۱} = ۲^{۶۴} - ۱$$

امروزه که در محاسبه‌ها می‌توان حرف‌ها و نمادها را به‌کار برد و دستورهایی برای حالت‌های کلی به‌دست آورد محاسبهٔ مقدار S کاری ساده است. اما در دوره‌های گذشته، ریاضی‌دانان ناچار از

به‌کار بردن روش‌هایی ابتکاری بوده‌اند. به‌ویژه که مقدار S عددی بیست رقمی است و برابر است با:

۱۸٬۴۴۶٬۷۴۴٬۰۷۳٬۷۰۹٬۵۵۱٬۶۱۵

در آن زمان‌ها، محاسبه‌های پیچیده را به جزءهایی تقسیم می‌کرده و آن‌ها را با نام‌های محفوظ یکم، محفوظ دوم ، محفوظ سوم، ...، از یکدیگر بازشناسانده و مقدارشان را یکی پس از دیگری به‌دست می‌آورده‌اند. در مسألهٔ دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج هم، مجموع دانه‌های گندم نظیر هشت خانهٔ از هر ردیف را یک محفوظ می‌گرفته و با محاسبهٔ مقدار این محفوظ‌ها به مقدار S دست می‌یافته‌اند. تعداد دانه‌های گندم نظیر هشت خانهٔ ردیف یکم صفحهٔ شطرنج را محفوظ یکم می‌نامیده‌اند که مقدار آن می‌شده است ۲۵۵. آن‌گاه محفوظ دوم، یعنی تعداد دانه‌های گندم نظیر هشت خانهٔ ردیف دوم را، از ضرب ۲۵۶ در محفوظ یکم به‌دست می‌آورده‌اند و هر محفوظ دیگر را هم برابر با ۲۵۶ برابر محفوظ پیش از آن می‌گرفته‌اند و در پایان، حاصل جمع هشت محفوظ را حساب می‌کرده‌اند.

در واقع، آنان به‌جای تصاعد هندسی با جملهٔ اول برابر با یک، قدر نسبت برابر با ۲ و تعداد جمله‌های برابر با ۶۴، تصاعد هندسی با جملهٔ یکم برابر با ۲۵۵، قدر نسبت برابر با ۲۵۶ و تعداد جمله‌های برابر با ۸ را به‌کار می‌برده‌اند. زیرا مجموع جمله‌های این تصاعد هم با همان مقدار S برابر است.

$$S = ۲۵۵\left(\frac{۲۵۶^{۸} - ۱}{۲۵۶ - ۱}\right) = ۲۵۶^{۸} - ۱ = ۲^{۶۴} - ۱$$

بعضی از ریاضی‌دانان هم برای تجسم بزرگی عدد جواب مسأله، عنصرهایی شناسای همگان را به‌جای اصطلاح‌های ریاضی محفوظ‌ها به‌کار برده‌اند. ابوریحان بیرونی جمع دانه‌های گندم ردیف‌های از یکم تا هشتم را به‌ترتیب با نام‌هایی به‌معنی، یک انبان، یک بار شتر، یک قطار شتر، یک دشت، یک فلات، یک اقلیم، یک قاره و یک دنیا می‌نمایاند و بیان می‌کند که مقدار کل گندم‌های مسأله برابر است با این‌که دنیایی داشته باشیم شامل ۲۵۶ قاره، هر قاره شامل ۲۵۶ اقلیم، و هر اقلیم شامل ۲۵۶ فلات، هر فلات شامل ۲۵۶ دشت، هر دشت شامل ۲۵۶ شتر، بار هر شتر شامل ۲۵۶ انبان گندم و هر انبان گندم شامل ۲۵۵ دانهٔ گندم باشد.

شرف‌الدین یزدی، ریاضی‌دان و ادیب دربار تیمور، بلند نظری کرده و هر دانهٔ گندم را با یک سکهٔ زر جانشین نموده و به‌دست آورده است که جمع کل سکه‌ها برابر می‌شود با این‌که دنیایی داشته باشیم شامل ۲۵۶ کشور، هر کشور شامل ۲۵۶ استان، هر استان شامل ۲۵۶ شهر، هر شهر شامل ۲۵۶ خانه، هر خانه شامل ۲۵۶ اتاق، هر اتاق شامل ۲۵۶ صندوق، هر صندوق شامل ۲۵۶ انبان و هر انبان شامل ۲۵۵ سکهٔ زر باشد.

شرف‌الدین یزدی، هم‌چنین عددِ جمع کل دانه‌های گندم، یا سکه‌های زر را، در لباس دو بیت شعر زیر به‌دست داده است.

تضعیفِ یکی، نور بود هشتم بار
و آسان شود از سه ضرب و تنصیفی کار
در جمع، یکی ز مال ثالث بردار
دریاب جواب و شرف را به‌دعایی یادآر

تضعیف به معنی دو برابر کردن، نور به‌حساب ابجد برابر با ۲۵۶، مال به معنی مجذور، و مقصود از مال ثالث سه بار مجذور کردن است و معنی دو بیت شعر می‌شود: یک را دو برابر کن و این عمل را هشت بار انجام ده که ۲۵۶ به‌دست می‌آید. برای این عمل، آسان‌تر آن است که ۸ را سه بار در خودش ضرب و حاصل را نصف کنی. عدد ۲۵۶ را سه بار به توان دوم برسان و یک را از حاصل کم کن. جواب را به‌دست آورده‌ای و شرف را یاد کن.

مسألهٔ دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج مسأله‌هایی جانبی را هم به‌دنبال داشته است و دارد. با روی کار آمدن هر ابزار محاسبه، این مسأله به‌میان آمده است که به‌کمک آن آیا می‌توان عدد بیست رقمی دانه‌های گندم را به‌درستی به‌دست آورد؟ با چرتکه، با جدول‌های لگاریتم و خط‌کش محاسبه، و امروزه با ماشین حساب و با کامپیوتر؟ با هر کدام از این‌ها، مسأله به گونه‌ای روزآمد شده است. مسأله‌های جانبی دیگری را هم می‌توان در میان گذاشت. نمونه‌هایی از چنین مسأله‌هایی در تمرین پایان نوشتار نموده خواهد شد.

ریاضی‌دانان با مسأله‌های دیگری در زمینهٔ عددهای بزرگ روبه‌رو بوده‌اند. بر پایهٔ بعضی از این مسأله‌ها، شبه‌علم‌ها و خرافه‌هایی نیز ساخته و پرداخته شده‌اند که در آن‌ها، دست‌یابی

به‌گونه‌ای توانایی فوق طبیعی، موکول به حل مسأله‌ای حل نشدنی دانسته شده است. به‌دست آوردن تعداد جای‌گشت‌های چند چیز نمونه‌ای از مسأله‌هایی است که هم ریاضی‌دانان و هم وابستگان به شبه‌علم‌ها با آن‌ها سروکار داشته‌اند.

بنابر نوشته‌ای از ابوریحان بیرونی، برای یکی از دانشمندان آن زمان پیش می‌آید تا دریابد حرف‌های جملهٔ «ان القائم غیرالقاعد» را به چند گونه می‌توان با هم ترکیب کرد، به اصطلاح امروزی تعداد جای‌گشت‌های آن حرف‌ها چه عددی است. چهار نفر از حساب‌دانان آن زمان چهار عدد متفاوت زیر را به‌دست می‌دهند:

۱۶۳۸۴, ۱۸۴۳۲, ۲۵۸۰۸, ۱۲۸۴۵۰۵۶۰۰۰۰

سه نفر که به‌کلی از مرحله پرت بوده‌اند. نفر چهارم هر چند راه صحیح را رفته است اما در عمل محاسبه دچار اشتباه شده است. با شیوه‌هایی که در آن زمان برای انجام دادن چهار عمل اصلی حساب، به‌ویژه برای عمل‌های ضرب و تقسیم به‌کار می‌برده‌اند روی دادن اشتباه‌ها دور از انتظار نبوده است.

در آن‌چه علم حروف نامیده شده و در آن بر پایهٔ حساب جمل یا حساب ابجد، تبدیل‌های گوناگون حرف‌ها (یعنی ۲۸ حرف الفبای زبان عربی) و عددها به یک‌دیگر به‌کار می‌رفته، ترکیب‌هایی از حرف‌ها با نام‌های جفر صغیر، جفر کبیر، جفر جامع، ... تعریف و برای هر کدام فایده‌ای یادآوری شده است. فایده‌هایی از این‌گونه: اگر این جفر را فراهم آوردید و داشته باشید همهٔ آفریده‌ها به‌فرمان شما خواهند بود! اگر یکی از جفرها، که آن‌را جفر جای‌گشتی می‌نامیم، عبارت باشد از مجموعهٔ دفترهایی که در هر سطر از هر صفحهٔ آن‌ها یکی از جای‌گشت‌های ۲۸ حرف الفبای زبان عربی نوشته شود، تعداد سطرهای نوشته شدهٔ در این دفترها عددی سی رقمی خواهد بود که آن‌را با P نشان می‌دهیم. دست‌یابی به عدد P، نه به‌شکل نمایی بل‌که با وجود همهٔ رقم‌های آن، مسأله‌ای از گونهٔ مسأله دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج است و مسأله‌هایی جنبی و مربوط به ابزارهای محاسبه را نیز همراه خواهد داشت.

تمرین.

۱) عدد دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج در دستگاه عدد نویسی بر پایهٔ ۲ با چه عددی نموده می‌شود؟

۲) همان عدد در دستگاه عدد نویسی بر پایهٔ ۱۶ چگونه نموده می‌شود؟ بنابر آن‌که در این دستگاه رقم‌های به ارزش‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ به‌ترتیب با B، C، D، E، F نموده شوند.

۳) آیا با چرتکه، یا با ابزاری شبیه آن، می‌توان عدد دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج را به‌صورت کامل به‌دست آورد؟ چگونه؟

۴) ماشین حساب هشت رقمی، عددهای با بیش از هشت رقم را نمی‌پذیرد و عدد حاصل هر عمل را اگر بیش از هشت رقم داشته باشد به شکل نمایی نشان می‌دهد که در این‌صورت رقم‌هایی از عدد به صفر تبدیل می‌شوند. با این ماشین حساب، به‌شرط آن‌که همهٔ عمل‌ها با ماشین انجام گیرند و تنها بتوانید حاصل عمل‌هایی را روی کاغذ یادداشت کنید، به‌روش‌هایی گوناگون می‌توانید عدد دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج را به‌صورت کامل به‌دست آورید. ساده‌ترین روش کدام است؟

۵) اگر بنا باشد عدد دانه‌های گندم صفحهٔ شطرنج را به‌صورت کامل با کامپیوتر به‌دست آورید چه الگوریتمی را به‌کار می‌برید؟

۶) عدد P، تعداد سطرهای جفر جای‌گشتی، بر چه توانی از ۱۰ بخش‌پذیر است؟

۷) اگر به‌کمک کامپیوتر بخواهید عدد P را به‌صورت کامل به‌دست آورید چه الگوریتمی را به‌کار می‌برید؟

۸) در چه تعداد از سطرهای جفر جای‌گشتی، کلمهٔ «جفرکامل» وجود دارد؟

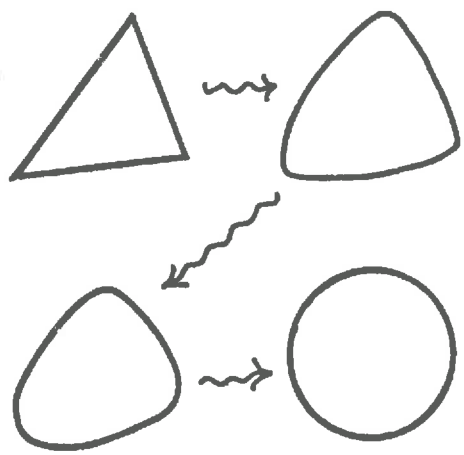
۹) برای آن‌که یک کامپیوتر، سطرهای جفر جای‌گشتی را یکی‌یکی روی چاپگرِ وصل به آن چاپ کند چه الگوریتمی را به‌کار می‌برید؟

۱۰) بنابر آن‌که چاپ شدن هر سطر از جفر جای‌گشتی به‌کمک کامپیوتر یک ثانیه طول بکشد، چاپ شدن همهٔ جفر در چه مدت انجام خواهد گرفت؟

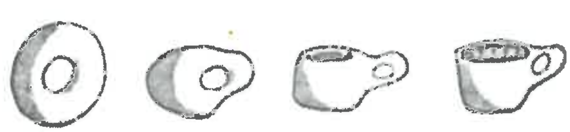
توپولوژی چیست؟

یحیی تابش

از نظر توپولوژی‌دان‌ها مثلث و دایره با هم «یکی» هستند، چون می‌توانیم آن‌ها را به هم تبدیل کنیم.



در واقع مثل این است که اگر مثلث را با یک سیم نرم ساخته باشیم می‌توانیم به‌آرامی آن را به دایره تبدیل کنیم. از این هم جالب‌تر این‌که مثلاً یک قطعه شیرینی که وسط آن یک سوراخ داشته باشد (این نوع شیرینی دُنات نامیده می‌شود) با یک فنجان از لحاظ توپولوژیکی هم ارز است و با هم یکی هستند:



شمارهٔ ۸
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۱۸_۱۴

کارگاه ۱

دو جسم زیر نیز از لحاظ توپولوژیکی هم ارز هستند

با مقداری خمیر مجسمه‌سازی ابتدا جسم دست چپ را درست کنید، سپس با تغییر شکل، به‌آرامی آن‌را به جسم دست راست (قندان) تبدیل کنید. آیا می‌توانید با خمیر مجسمه‌سازی اشیای دیگری نیز که از لحاظ توپولوژیک هم ارز باشند درست کنید؟

از مثال‌هایی که ذکر کردیم درمی‌یابیم که در واقع توپولوژی یک نوع هندسهٔ بدون «اندازه» است و در آن فقط وضعیت شکل اهمیت دارد و نه اندازهٔ آن. یعنی مثل این است که اشیاء را در یک صفحهٔ لاستیکی یا از جنس لاستیک در نظر گرفته‌ایم و هر چه‌قدر آن‌ها را بکشیم تا تغییر شکل ظاهری بدهیم ولی وضعیت آن‌ها تغییر نکند یعنی مثلاً پاره نشوند، اشیاء هم‌ارزی از لحاظ توپولوژیک حاصل می‌شوند. به‌عبارت دقیق‌تر:

توپولوژی مطالعهٔ آن دسته از خواص اشیاء هندسی است که بر اثر تبدیلات پیوستهٔ اشیاء دست‌خوش تغییر نمی‌شوند.

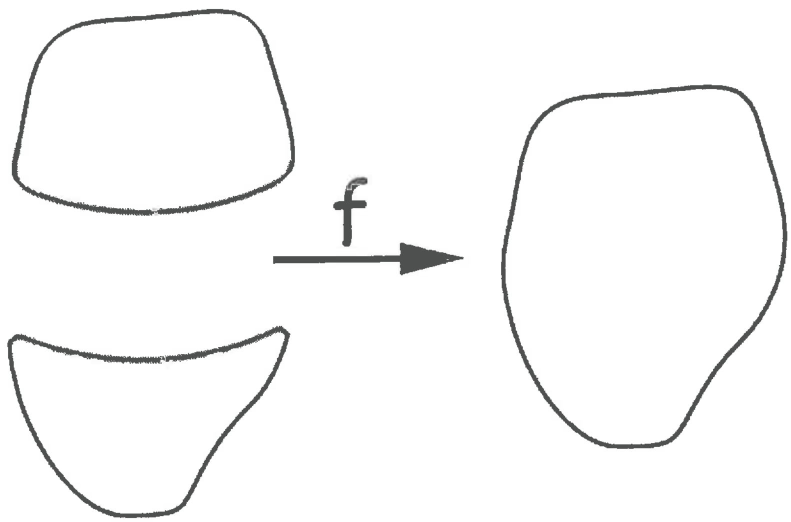
حال سؤال این است که تبدیل پیوسته ، چه تبدیلی است؟ تبدیل پیوسته تبدیلی است که در آن نقاطی که در ابتدا «نزدیک به‌هم» هستند در آخر تبدیل هم نزدیک به هم باشند، مثل خم کردن یا کشیدن، ولی شکستن یا پاره کردن مجاز نیست.

اشیاء اصلی مورد مطالعه در توپولوژی فضاهای توپولوژیک نامیده می‌شوند. به‌طور شهودی باید این فضاها را به‌صورت اشکال هندسی تصور کرد. از لحاظ ریاضی این فضاها مجموعه‌هایی هستند دارای ساختاری ویژه موسوم به توپولوژی. رویهٔ یک کره، یک چنبره یا یک چنبرهٔ دو سوراخه، همگی فضاهای توپولوژیک‌اند.

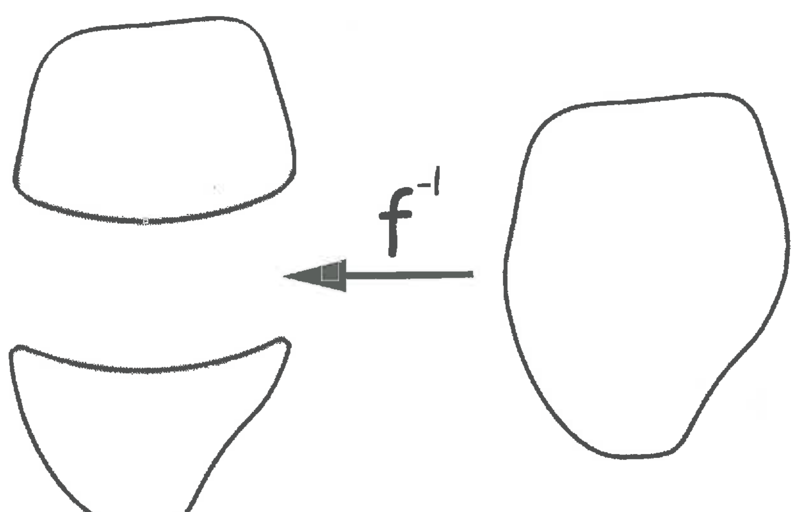
کره چنبره چنبرهٔ دوسوراخه

همان‌طور که ذکر کردیم یکی را به دیگری تبدیل کرد و نیز به‌طور پیوسته به وضع اول برگشت. این ضرب‌المثل معروف دو فضای توپولوژیک ، هم ارز توپولوژیک اند، اگر بتوان به‌طور پیوسته که برای یک توپولوژیست، دُنات و فنجان قهوه با یکدیگر فرقی ندارند، مثال خوبی برای این هم‌ارزی است!

به‌عبارت دقیق‌تر دو فضای توپولوژیک S و T، هم ارز توپولوژیک‌اند اگر یک تابع پیوسته f بین آن‌ها موجود باشد، $f : S \longrightarrow T$، که f وارون پذیر بوده و وارون آن یعنی f^{-1} نیز پیوسته باشد. برای فضاهای دل‌خواه، این که اگر f پیوسته باشد آن‌گاه f^{-1} نیز پیوسته است، به‌هیچ وجه بدیهی نیست. مثلاً اگر دو تکه خمیر جدا از هم را در نظر بگیریم و لبه‌های آن‌ها را به یکدیگر فشار دهیم تا یک تکه خمیر حاصل شود، با تبدیلی پیوسته سروکار داریم، زیرا نقاطی که در آغاز نزدیک هم بودند، نزدیک هم باقی می‌مانند.



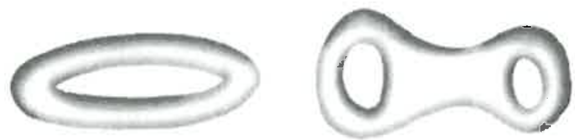
اما در تبدیل وارون، یک تکه خمیر به دو تکه تقسیم می‌شود، ولی این تبدیل پیوسته نیست.



زیرا نقاط نزدیک به همی که در دو طرف خط تقسیم قرار دارند، از یکدیگر دور می‌شوند!

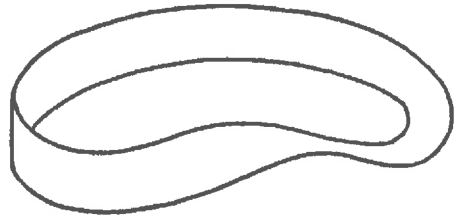
برای تشخیص هم‌ارز بودن دو فضای توپولوژیک، گذشته از پیدا کردن یک نگاشت پیوسته با وارون پیوسته بین آن‌ها، می‌توانیم به یکسان بودن ویژگی‌های توپولوژیک آن‌ها توجه کنیم، مثلاً تعداد سوراخ‌هایی که در یک شیء وجود دارد یک ویژگی توپولوژیک است:

یعنی دو شیء که از لحاظ توپولوژیک هم ارز باشند باید تعداد سوراخ‌هایشان مساوی باشد، پس چنبرهٔ یک سوراخه با چنبرهٔ دو سوراخه هم‌ارز نیست.



یا یک فنجان با یک قندان که دو تا دسته داشته باشد، هم ارز نیست!

اگر همهٔ فضاهای توپولوژیک به‌خوبی و سرراستی کره و چنبره بودند، شاید توپولوژی اهمیت چندانی پیدا نمی‌کرد ولی مطرح شدن بعضی از فضاهایی که تا حدودی عجیب و غریب بودند موجب شد که توپولوژی جایگاه ویژه‌ای در ریاضیات پیدا کند. یکی از این فضاها، نوار موبیوس است. موبیوس، ریاضی‌دان آلمانی که در اواسط قرن نوزدهم می‌زیست این فضا را مورد بررسی و شناسایی قرار داد. برای درست کردن نوار موبیوس کافی است یک نوار کاغذی را برداریم و دو سر آن‌را پس از یک تاب 180° به‌هم بچسبانیم.



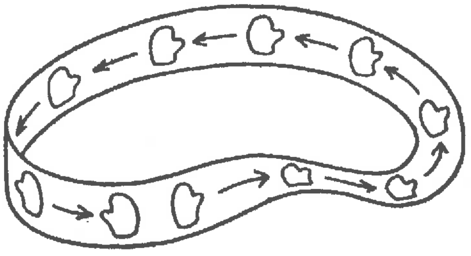
این نوار از لحاظ توپولوژیک با یک نوار استوانه‌ای تاب نخورده تفاوت دارد. این نوار تنها یک لبه دارد (بررسی کنید!) از آن‌جا که تعداد لبه‌ها یک خاصیت توپولوژیک است، و چون نوار استوانه‌ای دارای دو لبه است، این دو نوار هم ارز توپولوژیک نیستند.

خاصیت مهم‌تر نوار موبیوس این است که تنها یک طرف دارد. یک نوار استوانه‌ای را می‌توان از یک طرف آبی و از طرف دیگر قرمز رنگ کرد. اما اگر بخواهیم همین‌کار را با نوار موبیوس انجام دهیم، دو رنگ در جایی به یک‌دیگر می‌رسند!

بررسی یک طرفه بودن نوار موبیوس با دقت ریاضی چندان ساده نیست. نوار موبیوس ضخامتی ندارد، هر نقطهٔ آن‌را باید مانند نقاط صفحه که روی هر دو طرف آن است در نظر گرفت ولی نوار موبیوس را باید به‌عنوان یک فضای مستقل نه به‌عنوان زیر مجموعهٔ فضای ۳ ــ بعدی، مورد مطالعه قرار داد.

کارگاه ۲

موجود موبیوس ، موجودی است که روی نوار موبیوس زندگی می‌کند، این موجود یک روز سرد زمستانی می‌بیند که همهٔ لنگه‌های راست دستکش‌های خود را گم کرده است، یکی از دستکش‌ها را بر می‌دارد و آن‌را یک دور روی نوار موبیوس می‌چرخاند، دستکش دست چپ به دستکش دست راست تبدیل می‌شود!



یک نوار موبیوس با پلاسیک شفاف درست کنید و تجربهٔ موجود موبیوس را تکرار کنید!

ایده‌های اولیهٔ توپولوژی در اواسط قرن نوزدهم مطرح شد و ریاضی‌دانانی هم‌چون موبیوس، گاوس و ریمان، و قبل از آن‌ها اویلر را می‌توان پیشگامان این شاخه دانست. ولی در اوایل، تازگی روش‌ها در این مبحث تازه فرصتی برای ریاضی‌دانان باقی نمی‌گذاشت تا ابداعات و نتایج جدید را با دقت کامل ریاضی بیان کنند. ولی، همت ریاضی‌دانانی هم‌چون هانری پوانکاره، براوئر، لفشتز و دیگران در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم توانست به توپولوژی انسجام ریاضی لازم را ببخشد، و اهمیت توپولوژی تقریباً برای همهٔ ریاضیات مرتباً افزایش یافته است و هم‌چنان یکی از شاخه‌های پویا و فعال دانش ریاضی است.

مراجع

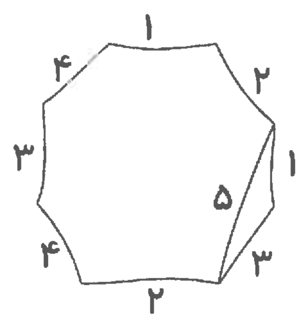
[۱] یان استیوارت، مفاهیم ریاضیات جدید، ترجمهٔ جمشید پرویزی. انتشارات خوارزمی، ۱۳۶۳.

[۲] ریچاردکورانت، هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟، ترجمهٔ سیامک کاظمی. نشر نی، ۱۳۷۹.

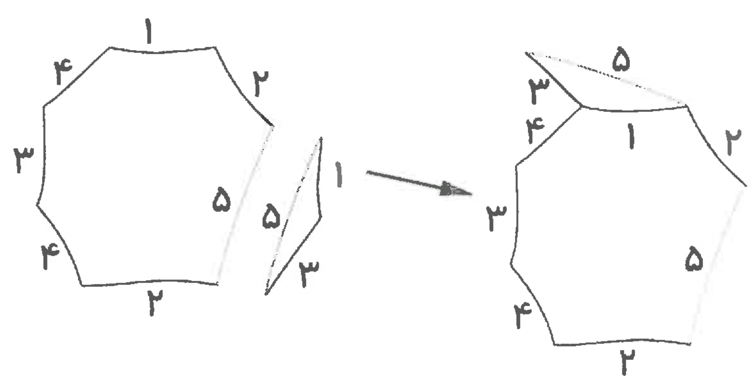
آرش در سیارهٔ تویاپ (قسمت هفتم)

ایمان افتخاری

آقای سای چند تا کاغذ را که پر از هشت‌ضلعی‌های تکه‌تکه شده (!) بود کنار گذاشت تا بالاخره یک کاغذ سفید پیدا کرد و روی آن یک خط کشید و توضیح داد:

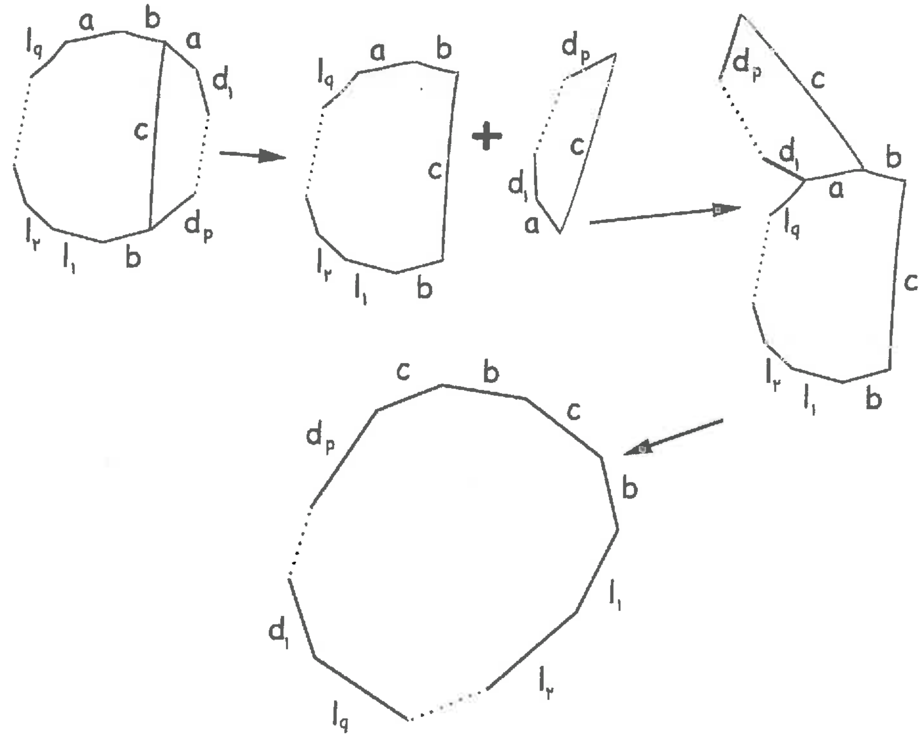


اگر روی این خط، هشت‌ضلعی را ببریم و دو قسمتِ حاصل را در امتداد اضلاعِ با شمارهٔ «۱» به هم بچسبانیم، هشت‌ضلعی جدیدی حاصل می‌شود و اگر روی ضلع جدید عدد «۵» بگذاریم می‌توانیم مراحل چسباندن را به این شکل نشان بدهیم.



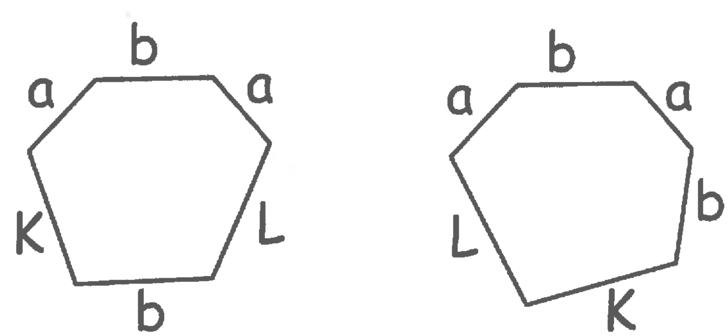
آرش که خیلی هیجان‌زده شده بود گفت: این همان شکل قبلی است و تفاوتی ندارد. منظورم همان تیوپ ماشین است که دو تا سوراخ دارد.

آقای خی گفت: خوب بد نبود. بگذارید این دفعه به‌جای آرش حکم کلی را نتیجه بگیریم: اگر ما در چندضلعی‌ها به شکلی مثل این برخورد کنیم، می‌توانیم آن‌را در راستای ضلع c ببریم و دو تکه را در راستای a به هم بچسبانیم و درنهایت به این شکل برسیم.



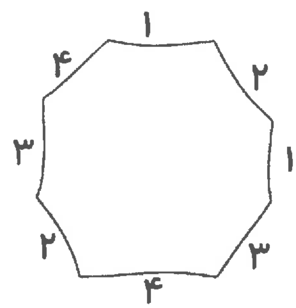
آقای سای نگاهی به پشت سرش کرد و با خوشحالی گفت: «خوب، غذا هم رسید.» و در حالی که آب دهانش را قورت می‌داد ادامه داد «فکر می‌کنم جایزهٔ خوبی برای پیدا کردن ضلع مناسب گرفتم!» و بدون اتلاف وقت مشغول خوردن غذا شد.

آرش گفت: خوب، این شکل خیلی خوب است. چون به‌نظر می‌رسد که هر وقت ما یک دنبالهٔ aba داشته باشیم و ضلع دیگر با شمارهٔ b جای دیگری هم باشد، می‌توانیم آن‌ها را کنار هم بیاوریم، یعنی اگر L و K دنباله‌های دل‌خواهی از ضلع‌ها باشند، روش ما نشان می‌دهد که این دو شکل به یک نتیجه منتهی می‌شوند. در واقع کافی است اسم c را a بگذاریم!

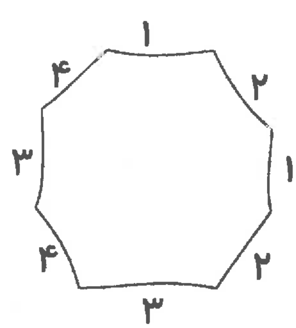


آقای خی هم غذا را جلو کشید و در حالی که کمی فلفل روی غذایش می‌ریخت گفت: درست است شاید بتوانیم از این روش برای بررسی حالت سوم هم استفاده کنیم.

سای گفت: «کاملاً!» و پس از نوشیدن کمی آب ادامه داد: «خوب در این حالت روش ما نتیجه می‌دهد که شکل حالت ۳



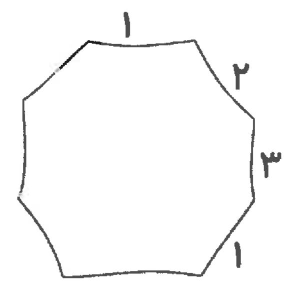
با این یکی شکل



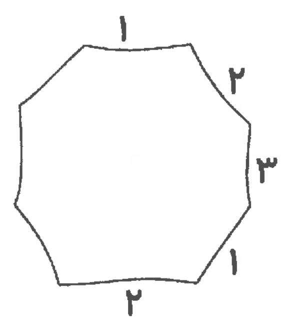
معادل است، که باز هم یک تیوپ با دو سوراخ خواهد بود. به این ترتیب حالتی که دو تا «۱» فاصلهٔ ۱ داشته باشند کاملاً بررسی شد.»

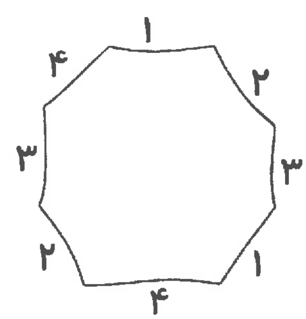
آقای خی: به این ترتیب اگر ما دو ضلع پیدا کنیم که فاصلهٔ «۱» داشته باشند می‌توانیم با عوض کردن اسم ضلع‌ها همین روش را به کار ببریم. یا از روش‌های قبلیِ ساده کردن استفاده می‌کنیم، و یا این‌که اگر ساده کردن امکان نداشت به یک تیوپ با ۲ سوراخ خواهیم رسید.

آقای سای: خوب به این ترتیب اگر فاصلهٔ هر دو ضلع با شماره یکسان لااقل ۲ باشد و دو تا ضلع با شماره «۱» فاصله ۲ داشته باشند ضلع پس از «۱» را می‌توان «۲» و بعدی را «۳» نامید. چون اگر بعد از «۲»، «۲» دیگری داشته باشیم شکل ساده می‌شود.



بعد از «۱» دوم، نمی‌توانیم «۳» داشته باشیم پس یا «۲» است یا می‌توانیم آن‌را «۴» بنامیم.



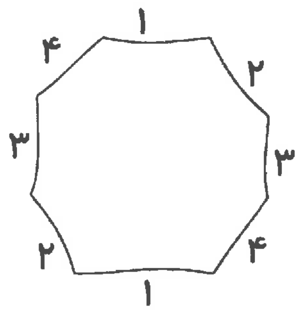


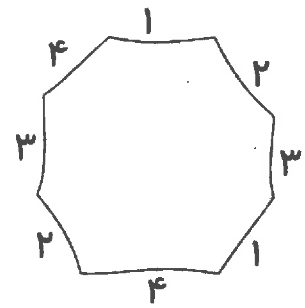
اگر «۴» باشد، تنها ضلع باقی‌مانده که می‌تواند شمارهٔ «۴» داشته باشد ضلع قبل از اولین «۱» است و چون دو ضلع باقی‌مانده باید شماره «۲» و «۳» داشته باشند و نباید دو بلوک «۲، ۳» با ترتیب متفاوت داشته باشیم، تنها حالت ممکن ترتیب «۱، ۲، ۳، ۱، ۴، ۲، ۳، ۴» است.

آرش: و اگر هم بعد از «۱» دوم، «۲» داشته باشیم دو تا از ۳ ضلع باقی‌مانده شماره«۴» خواهند داشت پس فاصلهٔ دو ضلع با شماره «۴»، یک یا صفر خواهد بود که به حالت‌های قبلی منجر خواهد می‌شود.

خی: پس احتمالاً تنها حالت جدید با این شرط ترتیب «۱، ۲، ۳، ۱، ۴، ۲، ۳، ۴» است. اگر دو ضلع با فاصلهٔ ۲ داشته باشیم می‌توانیم از آن‌ها به‌جای دو تا «۱» در این استدلال استفاده کنیم. پس تنها حالتی که بررسی آن باقی خواهد ماند، وقتی است که هر دو ضلع با شماره‌های مشابه، فاصلهٔ ۳ داشته باشند یعنی ترتیب «۱، ۲، ۳، ۴، ۱، ۲، ۳، ۴.»

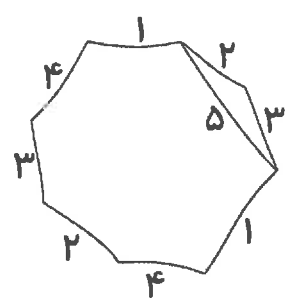
سای: پس باید فکری به حال این دو شکل بکنیم.





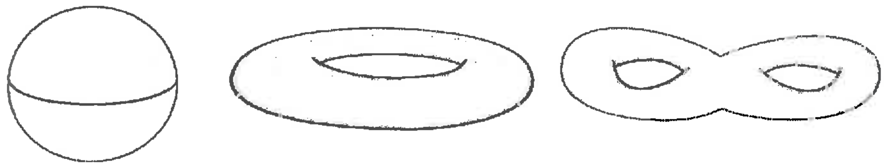
آرش: شاید بد نباشد که از همان روش بریدن استفاده کنیم.

خی: یک راه خیلی جالب به‌نظرم می‌رسد. مثلاً اگر این خط را با شمارهٔ «۵» در ترتیب «۱، ۲، ۳، ۱، ۴، ۲، ۳، ۴» در نظر بگیریم و در امتداد آن را ببریم و تکه‌های حاصل را در امتداد ضلع با شمارهٔ ۲ بچسبانیم، حاصل شکلی خواهد بود که در آن ۱، ۵، ۱ ظاهر می‌شود ...



و با روش قبلی خودمان می‌توانیم آن‌را به یک تیوپ با یک یا دو سوراخ تبدیل کنیم. به‌نظر من این کار را می‌شود برای ترتیب دیگر هم انجام داد و در انتهای ضلع با شمارهٔ «۱» را به هم وصل کرد، اسم ضلع جدید را «۵» گذاشت و در امتداد آن هشت ضلعی را برید و در امتداد ضلع با شمارهٔ «۲» دو تکه را به هم چسباند.

سای: به این ترتیب به‌نظر می‌رسد که در حالت هشت ضلعی، بررسی خودمان را تکمیل کرده‌ایم و تنها سه حالت ممکن به‌نظر می‌رسد. یک کره، یک تیوپ، یا یک تیوپ با دو سوراخ.



مدتی بود که غذا خوردن آن‌ها تمام شده بود.

آقای خی‌گفت: خوب شاید بد نباشد که به دفتر رییس برگردیم، فکر می‌کنم نتیجهٔ آمارگیری هم مشخص شده باشد. من خیلی مایل هستم نتیجه را بدانم.

آرش: حق با شماست. در ضمن، بحث ما هم به جای خوبی رسیده و می‌توانیم در صورت لزوم امروز عصر آن را ادامه بدهیم.

رئیس، آقای خی، آقای سای و آرش را به مرکز محاسبات برد. به‌نظر می‌رسید که در مدت کوتاهی همهٔ اطلاعات آماده خواهد بود. یکی از مسؤولین مرکز محاسبات نزد آن‌ها آمد و گفت که تا نیم ساعت دیگر زمان فرستادن اطلاعات به مرکز تمام خواهد شد و می‌توانند محاسبهٔ عددی را انجام دهند. هر چهار نفر دور میزی نشستند و در مدت زمانی که باقی بود، آقای خی خلاصه‌ای از ایده‌هایشان و مسألهٔ مورد بحث را برای رئیس توضیح داد. هر چند زمان برای توضیح دادن مطالب بسیار کوتاه بود، ولی رئیس کلیات داستان را فهمید و از نتیجهٔ کار آن‌ها راضی به‌نظر می‌رسید. در همین حال مسؤول مرکز محاسبات به میز نزدیک شد و از رئیس اجازه گرفت تا نتیجه آمارگیری را نشان بدهد.

رئیس نگاهی به کاغذ انداخت و قیافه‌ای کاملاً متعجب به خود گرفت. همه با کنجکاوی به او نگاه می‌کردند و منتظر بودند که رئیس صحبت کند. بعد از چند لحظه رئیس گفت: عدد خی صفر است! ...

داداش، داداش، پاشو! چقدر می‌خوابی؟ الان من خیلی وقت است که حاضرم. مگر قرار نبود با هم برویم پارک؟

آرش چشمانش را باز کرد. تا چند لحظه حالت سردرگمی داشت و کمی طول کشید تا متوجه اطرافش شود. خواهرش مریم او را صدا می‌زد. آرش در همان حالت خواب آلود پرسید: چی شده؟ من کجا هستم؟!

مریم: چیزی نشده! ولی مگر قرار نبود با هم برویم پارک؟ من آلان نزدیک یک ساعت است که آماده‌ام ولی تو از خواب بیدار نمی‌شوی.

مریم در کلاس اول راهنمایی درس می‌خواند. آرش خیلی دوست دارد چیزهایی را که یاد می‌گیرد تا جایی که می‌تواند به‌زبانی ساده برای خواهرش توضیح دهد. مریم هم گه‌گاه برای شنیدن این مطالب خیلی کنجکاوی می‌کند. عکس‌العمل‌های مریم نسبت به موضوعات مختلف برای آرش جالب است. به هر حال آن‌روز آرش فکر کرد که موضوع خوبی پیدا کرده است، اما ترجیح داد در تعریف کردن خواب برای خواهرش زیاد عجله نکند.

ادامه دارد ...

شمارهٔ بعدی ماهنامهٔ ریاضیات در اردیبهشت ۱۳۸۱ منتشر می‌شود.

چندجمله‌ای‌های رُخ

آزاده فرجی

چکیده

یک عروس و داماد برای جشن عروسی خود دچار مشکل شده‌اند. مشکل آنها این است که به دلیل اختلاف خانوادگی چهار نفر از خویشاوندانشان حاضر نیستند پهلوی یکدیگر بنشینند. در این مقاله چندجمله‌ایی به نام چندجمله‌ای رخ را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از این چندجمله‌ای می‌توان راه حلی برای نشاندن این خویشاوندان در مراسم عروسی (البته بدون درگیری!) پیدا کرد.

یک صفحهٔ شطرنجی در نظر بگیرید. با حرکت مهرهٔ رخ (یا قلعه) که آشنا هستید؛ این مهره می‌تواند به صورت افقی یا قائم به هر تعداد خانهٔ خالی که می‌خواهد حرکت کند. مثلاً در شکل ۱ رخی که در خانهٔ ۱ قرار دارد می‌تواند به خانه‌های ۴،۳،۲ یا ۷ حرکت کند و رخی که در خانهٔ ۵ قرار دارد می‌تواند به خانه‌های ۲،۶،۴ یا ۸ حرکت کند. حال اگر رخی که در خانهٔ ۱ قرار دارد به خانهٔ ۳ برود، رخی که در خانهٔ ۵ قرار دارد برای اینکه با رخ خانهٔ ۳ برخورد نکند می‌تواند به خانه‌های ۴ یا ۸ برود. این خانه‌ها، خانه‌هایی هستند که رخ خانهٔ ۵ می‌تواند به آنها برود و به‌علاوه در سطر و ستون خانهٔ ۳ نیز قرار ندارند.

1	2	3
		4
6	5	

شکل (۲)

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

شکل (۱)

برای $k \in \mathbb{N}$ می‌خواهیم تعداد راه‌هایی را بیابیم که k رخ می‌توانند بر یک صفحهٔ شطرنجی C قرار گیرند به‌طوری که هیچ دو تای آنها نتوانند به هم برخورد کنند؛ یعنی هیچ دو تای آنها در یک سطر یا یک ستون صفحهٔ شطرنج نباشند. این تعداد را با r_k نمایش می‌دهیم (گاهی اوقات که می‌خواهیم تأکید کنیم که در صفحهٔ C کار می‌کنیم، آن را $r_k(C)$ نمایش می‌دهیم). بنابراین در هر صفحهٔ شطرنجی r_1 تعداد خانه‌های آن صفحه است؛ زیرا یک مهرهٔ رخ می‌تواند به همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی حرکت کند. در صفحهٔ شطرنجی شکل ۲ فرض کنید که هیچ مهره‌ای نمی‌تواند در خانه‌های خاکستری قرار گیرد. به این ترتیب در این صفحهٔ شطرنجی، $r_1 = ۶$ است و دو مهرهٔ رخ می‌توانند در جفت مکان‌های $(۱,۶)$، $(۱,۸)$، $(۲,۷)$، $(۲,۶)$، $(۳,۷)$، $(۳,۸)$، $(۶,۷)$ و $(۶,۸)$ قرار بگیرند؛ پس $r_2 = ۸$. با استفاده از مکان‌های $(۱,۶,۷)$ و $(۲,۶,۸)$ به‌دست می‌آید $r_3 = ۲$ و برای $k \geq ۴$، $r_k = ۰$.

حال می‌توانیم چندجمله‌ای رخ را تعریف کنیم.

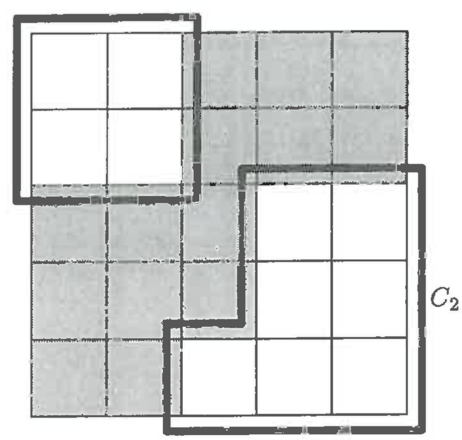
تعریف ۱ . برای صفحهٔ شطرنجی C با قرار دادن ۱ $= r_0$ تعریف می‌کنیم

$$r(C,x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots$$

$r(C,x)$ را چندجمله‌ای رخ صفحهٔ C نامیم.

پس در چندجمله‌ای رخ ضریب x^k برابر است با تعداد راه‌هایی که می‌توان k رخ را در صفحهٔ C قرار داد به‌طوری که هیچ دو تایی با هم برخورد نکنند. به این ترتیب چندجمله‌ای رخ شکل ۲ برابر است با $r(C,x) = ۱ + ۶x + ۸x^۲ + ۲x^۳$.

برای صفحات شطرنجی بزرگ‌تر محاسبهٔ این چندجمله‌ای کار چندان ساده‌ای نیست. می‌خواهیم با کمک دو قضیه، $r(C,k)$ را برای C های بزرگ راحت‌تر محاسبه کنیم. این کار را با مثال زیر شروع می‌کنیم.



شکل (۳)

صفحهٔ شطرنجی C شکل ۳ را در نظر بگیرید و باز فرض کنید که هیچ مهره‌ای مجاز نیست در خانه‌های خاکستری قرار گیرد. صفحهٔ C متشکل است از یک زیر صفحهٔ ۲ × ۲ با نام $C_۱$ و یک زیر صفحهٔ هفت خانه‌ای $C_۲$. توجه کنید که این زیر صفحه‌ها مجزا هستند؛ یعنی سطر یا ستون مشترک ندارند. با محاسباتی نظیر آنچه در مثال ۲ دیدید به‌دست می‌آید:

$$r(C_۱,x) = ۱ + ۴x + ۲x^۲ \qquad r(C_۲,x) = ۱ + ۷x + ۱۰x^۲ + ۲x^۳$$

$$r(C,x) = ۱ + ۱۱x + ۴۰x^۲ + ۵۶x^۳ + ۲۸x^۴ ۴x^۵$$

وقتی $r(C_۱,x) \times r(C_۲,x)$ را محاسبه می‌کنیم می‌بینیم که حاصلش با $r(C,x)$ برابر می‌شود. سؤالی که مطرح می‌شود این است که «آیا این رابطه تصادفی پیدا شده؟». جواب این سؤال همان اولین قضیه‌ای است که بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱ . *اگر صفحهٔ شطرنجی C از زیر صفحه‌های دوبه‌دو مجزای $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n ساخته شده باشد، آنگاه*

$$r(C,x) = r(C_1,x)r(C_2,x)\dots r(C_n,x).$$

ما دلیل برقراری تساوی $r(C,x) = r(C_1,x) \times r(C_2,x)$ را در مثال ۳ بیان می‌کنیم، برهان این قضیه نیز تعمیمی از برهان همین مثال است.

مثلاً برای به‌دست آوردن r_3 در C لازم است که بدانیم به چند راه می‌توانیم سه رخی را که با هم برخورد ندارند بر صفحهٔ C قرار دهیم. می‌دانیم که امکان ندارد سه رخ در زیر صفحهٔ C_1 باشند. پس در صفحهٔ C، برای سه رخی که با هم برخورد ندارند سه حالت وجود دارد:

الف) هر سه رخ در زیر صفحهٔ C_2 باشند، که در این‌صورت به ۲ روش می‌توان سه رخ را در این زیر صفحه قرار داد.

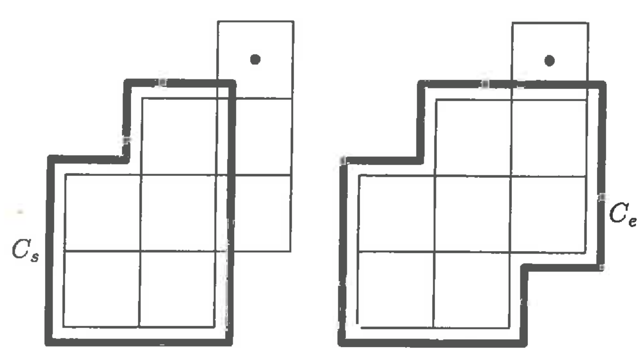
ب) یک رخ در زیر صفحهٔ C_1 و دو رخ در زیر صفحهٔ C_2 باشد. یک رخ را در زیر صفحهٔ C_1 به ۴ روش و دو رخ را درزیر صفحهٔ C_2 به ۱۰ روش، می‌توان قرار داد. پس کلاً به 10×4 روش در صفحهٔ C می‌توان دو رخ را در زیر صفحهٔ C_2 و یک رخ را در زیر صفحهٔ C_1 قرار داد طوری‌که با هم برخورد نداشته باشند.

ج) دو رخ در زیر صفحهٔ C_1 و یک رخ در زیرصفحهٔ C_2 باشد که در این‌صورت با محاسباتی مانند بالا تعداد حالت‌ها برابر با 7×2 می‌شود.

در نتیجه سه رخی را که با هم برخورد ندارند، می‌توان به $(2 \times 7) + (4 \times 10) + 2$ روش در صفحهٔ C قرار داد. از طرفی می‌بینیم که برای محاسبهٔ ضریب x^3؛ r_3؛ در $r(C_1,x) \times r(C_2,x)$ باید به ترتیب ضرایب $1 \times x^3$، $x \times x^2$ و $x^2 \times x$ را با هم جمع کنیم؛ یعنی مقادیر ۲، 4×10 و 7×2 را با هم جمع کنیم. می‌بینیم همان مقدار محاسبه شده در بالا به‌دست می‌آید.

تعریف ۲. در صفحهٔ شطرنجی C خانه‌ای را مشخص کنید. تعریف می‌کنیم C_s را صفحهٔ شطرنجی‌ای که از حذف سطر و ستون خانهٔ مشخص شده به‌دست می‌آید و C_e را صفحهٔ شطرنجی‌ای که از حذف خانهٔ مشخص شده به‌دست می‌آید.

در شکل زیر C_e و C_s نشان داده شده‌اند.



شکل (۴)

قضیه ۲. *صفحهٔ شطرنجی C مفروض است. خانهٔ دلخواهی را در C مشخص کنید. داریم*

$$r(C,x) = x \cdot r(C_s,x) + r(C_e,x).$$

برهان. فرض کنید $k \geq 1$ رخ داریم. می‌خواهیم $r_k(C)$ را محاسبه کنیم. برای هر خانهٔ C به عنوان یک خانهٔ مشخص شده، دو امکان بررسی وجود دارد. یا رخی در این خانه هست یا نیست. در حالت اول، $k-1$ رخ دیگر برای این‌که با این رخ برخورد نداشته باشند باید در صفحهٔ C_s قرار بگیرند و در حالت دوم، k رخ باید در صفحهٔ C_e قرار بگیرند. چون این دو حالت همهٔ حالت‌ها را در بر می‌گیرند و مجزا هستند، خواهیم داشت

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_s) + r_k(C_e)$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در x^k خواهیم داشت

$$r_k(C)x^k = r_{k-1}(C_s)x^k + r_k(C_e)x^k$$

اگر تعداد خانه‌های صفحهٔ شطرنجی برابر با n باشد، آنگاه تساوی بالا برای هر $1 \leq k \leq n$ برقرار است. پس

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = \sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^k + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k$$

معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

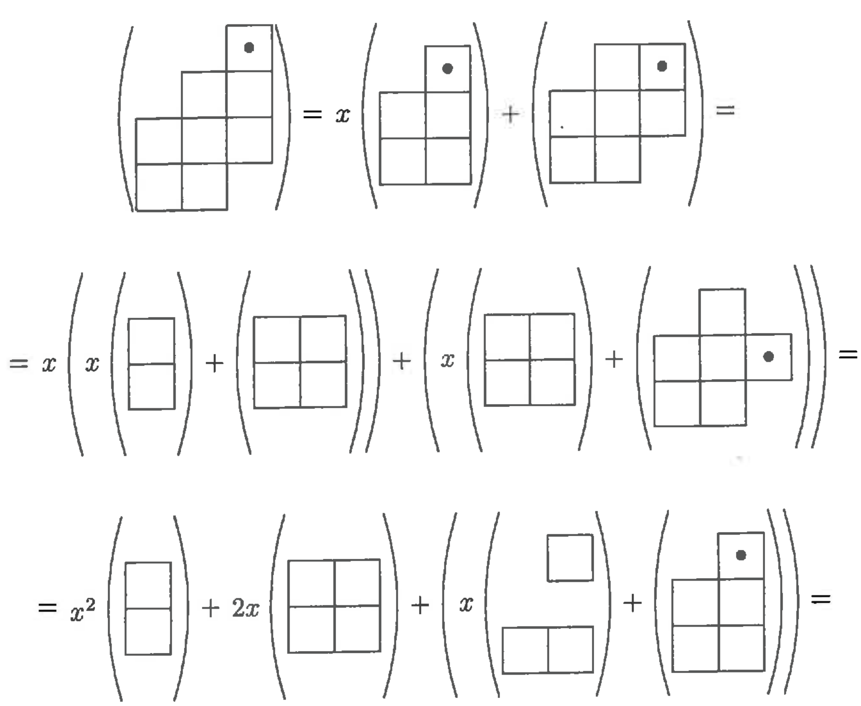
$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = x\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k$$

یا به‌صورت

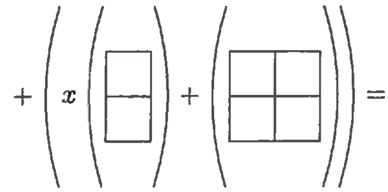
$$1 + \sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = xr(C_s, x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k + 1$$

نوشت، که از آن نتیجه می‌شود $r(C,x) = x \cdot r(C_s, x) + r(C_e, x)$.

حال با کمک قضیهٔ قبل چندجمله‌ای رخ شکل ۴ را محاسبه می‌کنیم.



$$= x^2(1+2x) + 2x(1+4x+2x^2) + x(1+3x+x^2)+$$



$$۳x + ۱۲x^۲ + ۷x^۳ + x(۱ + ۲x) + (۱ + ۴x + ۲x^۲) = ۱ + ۸x + ۱۶x^۲ + ۷x^۳.$$

برای نشان دادن کاربردی از چندجمله‌ای‌های رخ نیاز به بعضی تعاریف و قضایا داریم که در اینجا آن‌ها را بیان می‌کنیم.

فرض کنید S مجموعه‌ای با $N = |S|$ باشد و $c_۱$، $c_۲$، ...، c_t گردایه‌ای از شرط‌ها یا ویژگی‌ها باشد که بعضی از عناصر S یا همهٔ آن‌ها در این شرط‌ها صادق‌اند. بعضی از عناصر S ممکن است در بیش از یکی از شرط‌ها صدق کنند و برخی دیگر ممکن است در هیچ یک از آن‌ها صادق نباشد.

تعریف ۳. به‌ازای $۱ \leq i \leq t$، $N(c_i)$ را تعداد عنصرهایی از S تعریف می‌کنیم که در شرط c_i صدق می‌کنند. به همین ترتیب برای $۱ \leq i \neq j \leq t$، $N(c_ic_j)$ را تعداد عناصری از S می‌گیریم که در هر دو شرط c_i و c_j و شاید هم بیشتر صادق‌اند. این تعریف را می‌توان برای تعداد بیشتر نیز بیان کرد.

تعریف ۴. به‌ازای $۱ \leq i \leq t$، $N(\bar{c}_i) = N - N(c_i)$ و $N(\bar{c}_i\bar{c}_j)$ معرف تعداد عناصری از S است که در شرط‌های c_i و c_j صدق نمی‌کنند. این تعریف را نیز می‌توان برای تعداد بیشتر تعمیم داد.

برای سادگی کار از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم.

$$S_۰ = N$$

$$S_۱ = [N(c_۱) + N(c_۲) + \cdots + N(c_t)]$$

$$S_۲ = [N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + \cdots + N(c_۱c_t) + N(c_۲c_۳) + \cdots + N(c_{t-۱}c_t)]$$

و به طور کلی

$$S_k = \sum N(c_{i_۱}c_{i_۲}\cdots c_{i_k}) \quad ,۱ \leq k \leq t$$

حال قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳. *مجموعهٔ S را با $|S| = N$ و شرط‌های c_i، $۱ \leq i \leq t$ در نظر می‌گیریم. داریم*

$$\overline{N} = S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + \cdots + (-۱)^t S_t$$

اکنون ابزار لازم برای بیان مثالی از کاربرد چندجمله‌ای‌های رخ را در اختیار داریم. به مثال زیر به عنوان آخرین مطلب، توجه کنید.

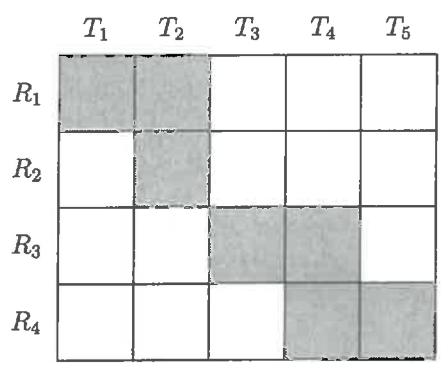
عروس و دامادی برای تنظیم صندلی‌های مدعوین در مراسم عروسی‌شان با چهار خویشاوند R_i، $۱ \leq i \leq ۴$، مواجه‌اند که هیچ‌یک مایل نیست پهلوی دیگری بنشیند. سر هر یک از پنج میز T_j، $۱ \leq j \leq ۵$، یک صندلی خالی گذاشته شده‌است. به دلیل اختلاف خانوادگی،

الف) R_1 سر میزهای T_1 یا T_2 نخواهد نشست   ب) R_2 سر میز T_2 نخواهد نشست

ج) R_3 سر میزهای T_3 یا T_4 نخواهد نشست د) R_4 سر میزهای T_4 یا T_5 نخواهد نشست

تعداد راه‌هایی را پیدا کنید که می‌توانیم این چهار نفر را بنشانیم به طوری که در شرایط (الف) تا (د) صدق کند.

حل. وضعیت شرایط (الف) تا (د) در شکل ۵ نشان داده شده‌است. تعداد راه‌هایی که می‌توانیم این چهار نفر را بنشانیم به طوری که در شرایط (الف) تا (د) نیز صدق کند، برابر با تعداد راه‌های قرار دادن چهار رخ بر صفحهٔ شطرنجی‌ای است که از خانه‌های سفید ساخته شده. توجه کنید که رخ‌ها نباید با هم برخورد کنند.



شکل (۵)

چون تعداد خانه‌های صفحهٔ شطرنجی خاکستری کمتر است با این صفحه کار می‌کنیم. حال در ادامهٔ کار از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. فرض کنید برای $1 \leq i \leq 4$، C_i شرط تخصیص دادن یک صندلی به خویشاوند R_i در یک جای ممنوع (خانه‌های خاکستری) باشد. تعداد کل راه‌هایی که می‌توانیم هر یک از این خویشاوندان را سر یک میز بنشانیم، برابر است با $|S| = N = 5!$. ∎

مراجع

[۱] جی. ای. باندی و یو. اس. آر. مورتی، نظریهٔ گراف و کاربردهای آن، ترجمهٔ حمید ضرابی‌زاده. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی هنری دیباگران تهران.

[۲] رالف گریمالدی، ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی (از دیدگاه کاربردی)، ترجمهٔ علی عمیدی. جلد اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

پاسخ تقویم تعطیلات

۲۹ اسفند:

۱) ۵. [راهنمایی: تعداد قطرهای یک $n-$ ضلعی منتظم را بر حسب n بیابید، سپس معادلهٔ مربوط به تساوی تعداد قطرها با تعداد اضلاع را حل کنید.]

۲) ۴۰ صندلی، زیرا حداقل تعدادی که باید اشغال شود، مدنظر است و اگر ۴۰ نفر روی صندلی‌های دوم و پنجم و ... و ۱۱۹ ـام (با فاصله‌های سه تایی) بنشینند، نفر ۴۱ ـام می‌تواند در کنار هر یک از آن‌ها بنشیند. برای درک بهتر موضوع حالت‌های کمتری مثل ۳ صندلی، یا ۶ صندلی یا ۹ صندلی را در نظر بگیرید و مسأله را برای آن‌ها حل کنید و سپس نتیجه را تعمیم دهید.

۲ فروردین:

۱) $۴\sqrt{۲}$ سانتی‌متر.

۲) صفر. زیرا میانه و میانگین پنج عدد صحیح متوالی، با یکدیگر برابرند.

۳ فروردین:

۱) ۳۶ یال.

۲) ۷۰۰، زیرا اگر به‌صورت زیر دسته‌بندی بکنیم، $\frac{۱۳۹+۱}{۲}$ تا دستهٔ ۱۰ داریم که مجموع‌شان ۷۰۰ است.

$$۱۰+[۳۰-۲۰]+\cdots+[۱۳۷۰-۱۳۶۰]+[۱۳۹۰-۱۳۸۰]$$

۴ فروردین:

۱) در ساعتِ $۴:۵\frac{۵}{۱۱}$ و $۴:۳۸\frac{۲}{۱۱}$، برای یافتن این پاسخ‌ها، توجه کنید که به‌ازای هر ۱ دقیقه‌ای که عقربهٔ بزرگ حرکت می‌کند، عقربهٔ کوچک $\frac{۵}{۶۰}$ دقیقه روی صفحهٔ ساعت جلو می‌آید.

۲) $\alpha = \arcsin\left(\frac{\pi}{۸}\right)$.

۵ فروردین:

۱) راهنمایی: از زاویه‌های محاطیِ پدید آمده در دایره کمک بگیرید و به این نکته توجه کنید که پنج‌ضلعی، منتظم است.

۲) ۸ حالت.

۶ فروردین:

۱) ضخامت دسته‌های صلیب باید ۱ باشد.

۲) $\frac{۱}{۱۵}$، زیرا ده عدد اول ابتدایی عبارتند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹. تنها ترکیب‌های ممکن برای این‌که حاصل‌جمع آن‌ها ۲۴ باشد، عبارتند از (۵, ۱۹)، (۱۹, ۵)، (۷, ۱۷)، (۱۷, ۷)، (۱۱, ۱۳)، (۱۳, ۱۱)، یعنی ۶ تا از $۹۰ = ۹ \times ۱۰$ ترکیب ممکن و $\frac{۱}{۱۵} = \frac{۶}{۹۰}$.

۷ فروردین:

۱) $n = ۵$. [راهنمایی: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام قرار گرفته در ارزش‌های مکانی با توان زوج ۱۰، منهای مجموع ارقام قرار گرفته در ارزش‌های مکانی با توان فرد ۱۰، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد (چرا؟)]

۲) راهنمایی: با استفادهٔ مکرر از تشابه مثلث‌ها، نتیجه بگیرید که $DG^۲ = EG \times FG$ و از آن‌جا نتیجه بگیرید $DG = ۴$.

۸ فروردین:

۱) این نسبت، ۱ : ۲ است. برای به‌دست آوردن این نتیجه، از قضیهٔ تالس و نسبت طول خطوطی که حاصل شده‌اند، کمک بگیرید.

۱۰ فروردین:

۲) ۹ ترکیبِ (۱, ۸)، (۸, ۱)، (۲, ۷)، (۷, ۲)، (۳, ۶)، (۶, ۳)، (۴, ۵)، (۵, ۴) و (۹, ۹). توجه کنید که z تأثیری در جواب ندارد.

تقویم تعطیلات نوروزی

چهارشنبه ۲۹ اسفند ۱۳۸۰

۱) تعداد قطرهای یک چندضلعی منتظم را از تعداد اضلاع آن کم کردیم، حاصل صفر شده است. تعداد اضلاع این چندضلعی چه‌قدر بوده است؟

۲) ۱۲۰ صندلی در یک ردیف چیده شده‌اند. لااقل چند تا از این صندلی‌ها باید اشغال شود تا نفر بعدی که می‌خواهد بنشیند، بتواند در کنار هر کسی بنشیند؟

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۴۱ د) ۶۰ ه) ۱۱۹

پنج‌شنبه ۱ فروردین ۱۳۸۱

سال نو مبارک!

جمعه ۲ فروردین ۱۳۸۱

۱) صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع ۶ سانتی‌متر را به سه قطاع مساوی تقسیم کرده و بریده‌ایم. با هر قطاع یک مخروط ساختیم (بدون آن‌که کاغذها را روی هم بچسبانیم). ارتفاع هر یک از این مخروط‌ها چند سانتی‌متر است؟

۲) مجموع یک عدد صحیح با چهار عدد صحیح بعدی آن، ۱۰۵ است. اگر میانگین این اعداد را از میانه‌ی آن‌ها کم کنیم، حاصل چیست؟

شنبه ۳ فروردین ۱۳۸۱

۱) هر یک از گوشه‌های یک مکعب مستطیل را بریده‌ایم. شکل جدید، چند یال دارد؟

۲) حاصل $۱۰ + ۲۰ - \ldots + ۱۳۶۰ - ۱۳۷۰ + ۱۳۸۰ - ۱۳۹۰$ چیست؟

الف) ۳۹۰- ب) ۱۰- ج) ۳۹۰ د) ۷۰۰ ه) ۱۳۹۰

یک‌شنبه ۴ فروردین ۱۳۸۱

۱) در چه ساعتی بین ساعت ۴ و ۵، عقربه‌ها بر یکدیگر عمودند؟

۲) مساحت مثلث ABC نصف مساحت نیم‌دایره‌ای به قطر AB است که از C می‌گذرد. اندازه‌ی $\hat{\alpha} = \widehat{ABC}$ چه‌قدر است؟

دوشنبه ۵ فروردین ۱۳۸۱

۱) در پنج‌ضلعی منتظم $ABCDE$، نقطهٔ F طوری روی AE قرار گرفته که BF نیم‌سازِ $\widehat{ABE}$ است. ثابت کنید BF بر BC عمود است.

۲) چهار کلید متوالی برای روشن ــ خاموش کردنِ چراغ‌ها داریم به چند طریق مختلف می‌توان آن‌ها را روشن یا خاموش کرد به‌شرطی که هیچ دو کلید متوالی، خاموش نباشند؟

سه‌شنبه ۶ فروردین ۱۳۸۱

۱) در وسط پرچمی مستطیل شکل به ابعادِ ۴×۳، صلیبی به‌صورت متقارن رسم شده است به‌طوری که ضخامت هر چهار دسته‌ی آن، یکسان است. ضخامت دسته‌های صلیب چه‌قدر باشد تا سطح صلیب، نصف سطح پرچم شود؟

۲) از بین ده عدد اولِ ابتدایی، دو عدد اول متمایز انتخاب کرده‌ایم. احتمال این‌که مجموع این دو عدد اول، ۲۴ باشد چه‌قدر است؟

چهارشنبه ۷ فروردین ۱۳۸۱

۱) اگر عدد هفت رقمیِ $۸۵۴n۵۲۶$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، n را بیابید.

۲) مستطیل $ABCD$ را در نظر بگیرید. F نقطه‌ای دلخواه روی AB است و امتدادهای DF و CB یک‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کرده‌اند. محل تلاقی AC و DF را نیز G می‌نامیم. اگر $FG = ۲$ و $EF = ۶$، طول DG را بیابید.

پنج‌شنبه ۸ فروردین ۱۳۸۱

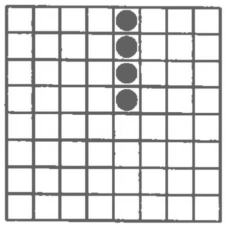
۱) در مثلث ABD، D و F ضلع AC و E و G، ضلع BC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند (نقطه‌های روی ضلع AC به‌ترتیب A، D، F و C هستند و نقطه‌های روی ضلع BC به‌ترتیب B، E، G و C). H وسط AB و J وسط DE است. مطلوب است نسبت مساحت مثلث DEH به مساحت مثلث FGJ.

جمعه ۹ فروردین ۱۳۸۱

امروز تعطیل !!!

شنبه ۱۰ فروردین ۱۳۸۱

۱) صفحه‌ی شطرنجی روبه‌رو را از روی اضلاع مربع‌ها چنان ببرید تا چهار ناحیه‌ی هم مساحت به‌دست آید که هر یک شامل یک دایره باشند.



۲) اگر x و y دو رقم متمایز غیر صفر و z عددی طبیعی باشد، چند ترکیب از x و y موجود است که عدد $10^z x + y$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد؟

یک‌شنبه ۱۱ فروردین ۱۳۸۱

۱) با استفاده از چهار رقم ۲، ۴، ۵ و ۷ دقیقاً می‌توان ۲۴ عدد چهار رقمی نوشت که رقم تکراری نداشته باشند. اگر این عددها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، هفدهمین عدد چیست؟

۲) همه‌ی عددهای پنج‌رقمی را که توسط ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ ساخته شده‌اند و هر رقم در هر عدد فقط یک‌بار به‌کار رفته است، در نظر بگیرید. مجموع این عددهای پنج رقمی چه‌قدر است؟

دوشنبه ۱۲ فروردین ۱۳۸۱

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را تا کرده و رأس A را روی نقطه‌ی A' که روی ضلع BC است، چسبانده‌ایم. اگر $BA' = 1$ و $A'C = 2$، طول خط PQ برابر است با

الف) $\frac{8}{5}$ ب) $\frac{7\sqrt{21}}{20}$ ج) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ د) $\frac{13}{8}$ ه) $\sqrt{3}$

سه‌شنبه ۱۳ فروردین ۱۳۸۱

۱) شکل زیر دارای شش مستطیل هم مساحت است. یکی از چوب‌کبریت‌ها را بردارید و با استفاده از دوازده چوب‌کبریت، شکل دیگری بسازید که دارای شش شکل هم مساحت باشد.

۲) با اضافه کردن تنها یک چوب‌کبریت دیگر، یک عبارت درست ریاضی بسازید.

چهارشنبه ۱۴ فروردین ۱۳۸۱

۱) نقطه‌ی P درون دایره‌ای به شعاع ۱۵ سانتی‌متر که به فاصله‌ی ۹ سانتی‌متر از مرکز دایره، قرار دارد. چند وتر از P می‌گذرد که طولشان عددی صحیح باشد؟

۲) بزرگ‌ترین عدد، میان پنج عدد زیر، کدام است؟

الف) $13579 + \frac{1}{2468}$ ب) $13579 - \frac{1}{2468}$ ج) $13579 \times \frac{1}{2468}$ د) $13579 \div \frac{1}{2468}$ ه) ۱۳۵۷۹٫۲۴۶۸

پنج‌شنبه ۱۵ فروردین ۱۳۸۱

۱) اگر $ABCD$ مربعی 2×2 باشد و E و F به‌ترتیب وسط‌های AB و BC و I محل تلاقیِ DE با AF و H محل تلاقی DB با AF، مساحت چهارضلعی $BEIH$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) $\frac{7}{15}$ د) $\frac{8}{15}$ ه) $\frac{3}{5}$

۲) ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n، رابطه‌ی زیر درست است:

$$i^{2n}+i^{2n+1}+i^{2n+2}+i^{2n+3} = \frac{1}{i^{2n}} + \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} + \frac{1}{i^{2n+3}}$$

که در آن، i عددی است که $i^2 = -1$.

جمعه ۱۶ فروردین ۱۳۸۱

۱) سه توپ سبز، هم‌وزنِ شش توپ آبی هستند. دو توپ زرد، هم وزنِ پنج توپ آبی، و شش توپ آبی، هم‌وزنِ چهار توپِ سفید. برای حفظ تعادل، در مقابل چهار توپ سبز و دو توپ زرد و دو توپ سفید، چند توپِ آبی باید قرار داد؟

۲) حاصل $|\pi - 3|$ چیست؟

الف) $\frac{1}{7}$ ب) ۰٫۱۴ ج) $\pi - 3$ د) $3 + \pi$ ه) $\pi - 3$

۱۱ فروردین:

۱) ۵۷۲۴، زیرا شش عدد با رقم ۲ آغاز می‌شود، شش تا با رقم ۴، شش تا با رقم ۵ (جمعاً تا اینجا ۱۸ تا) پس ۱۷ــ امین عدد، عددی است که با ۵ آغاز شده و رقم صدگان آن بزرگ‌ترین رقم بعدی یعنی ۷ است ولی از هجدهمین عدد که ۵۷۴۲ است کوچک‌تر است، پس عدد مطلوب ۵۷۲۴ است.

۲) این حاصل‌جمع برابر است با ۳۹۹۹۹۶۰. زیرا از هر یک از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در هر ستون ارزش مکانی، ۲۴ تا ظاهر می‌شود. پس جمع هر ستون ۳۶۰ است. حال با کمی دقت درمی‌یابیم که رقم یکان باید ۰ باشد، رقم دهگان ۶ (زیرا $۳۹۶ = ۳۶ + ۳۶۰$) و رقم صدگان به بعد، همه ۹ هستند (زیرا $۳۹۹ = ۳۹ + ۳۶۰$) و رقم آخر ۳ خواهد بود.

۱۲ فروردین:

۱) $\frac{۷\sqrt{۲۱}}{۲۰}$. زیرا $\widehat{BA'P} + \widehat{A'PB} + ۶۰° = ۱۸۰°$ و $\widehat{BA'P} + ۶۰° + \widehat{QA'C} = ۱۸۰°$ پس $\widehat{A'PB} = \widehat{QA'C}$.
لذا دو مثلث $QA'C$ و $A'PB$ متشابهند. قرار می‌دهیم $x = AP = A'P$ و $y = QA = QA'$. داریم

$$\frac{A'P}{QA'} = \frac{A'B}{QC} = \frac{PB}{A'C}$$

یا

$$\frac{x}{y} = \frac{۱}{۳ - y} = \frac{۳ - x}{۲}$$

که از حل آن خواهیم داشت $x = ۷/۵$ و $y = ۷/۴$. با استفاده از قانون کسینوس‌ها در مثلث PAQ که در آن $\widehat{A} = ۶۰°$، خواهیم داشت $PQ = \frac{۷\sqrt{۲۱}}{۲۰}$. البته راه‌حل‌های دیگری هم برای این مسأله هست.

۱۴ فروردین:

۱) ۱۲ تا. بلندترین وتر گذرا از P، قطر دایره است که طول آن ۳۰ سانتی‌متر است و کوتاه‌ترین وتر، عمود بر قطر گذرا از P است که طولش $۲\sqrt{۱۵^۲ - ۹^۲} = ۲۴$ است. از آن‌جا که با تغییر وترها، طول آن‌ها به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، با تغییر وترهای گذرا از P، از CD تا XY، طول آن‌ها تمام اعداد حقیقی بین ۲۴ و ۳۰ را دو بار به‌خود اختصاص می‌دهد. بین ۲۴ و ۳۰، دقیقاً ۵ عدد صحیح هست که وتری با طولِ هر یک از آن‌ها، ۲ بار ظاهر می‌شود و در کل $۱۲ = ۲ + ۵ \times ۲$ وتر با طول صحیح از P می‌گذرد.

۲) (د) صحیح است.

۱۵ فروردین:

۱) $\frac{۷}{۱۵}$. برای حل این مسأله راه‌حل‌های متنوعی وجود دارد. مثلاً یک راه این است که به تساوی مثلث‌های ABF و ADE توجه کنید و نیز به این موضوع که زاویهٔ $\widehat{AIE}$ قائمه است و لذا مثلث‌های AIE و ABF متشابه‌اند. هم‌چنین مثلث‌های BHF و DHA نیز متشابه‌اند، با استفاده از اندازه‌های داده شده و نسبت‌های تشابه، جواب به‌دست می‌آید.

۲)

$$\begin{aligned}
&i^{۲n} + i^{۲n+۱} + i^{۲n+۲} + i^{۲n+۳}\\
&= i^{۲n}(۱ + i + i^۲ + i^۳)\\
&= i^{۲n}(۱ + i - ۱ - i)\\
&= i^{۲n} \times ۰ = ۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{i^{۲n}} + \frac{۱}{i^{۲n+۱}} + \frac{۱}{i^{۲n+۲}} + \frac{۱}{i^{۲n+۳}}\\
&= \frac{۱}{i^{۲n}}\left(۱ + \frac{۱}{i} + \frac{۱}{i^۲} + \frac{۱}{i^۳}\right)\\
&= \frac{۱}{i^{۲n}}\left(\frac{i^۳ + i^۲ + i + ۱}{i^۳}\right)\\
&= \frac{۱}{i^{۲n}} \cdot \frac{۱}{i^۳}(-i - ۱ + i + ۱)\\
&= \frac{۱}{i^{۲n+۳}} \cdot ۰ = ۰
\end{aligned}$$

۱۶ فروردین:

۱) ۱۶ توپ آبی.

۲) $۳ - \pi$، زیرا حاصل قدرمطلق همواره عددی مثبت است.

تنظیم: سپیده چمن‌آرا

فرکتال چیست؟ (قسمت اول)

کسری علیشاهی، امید نقشینه‌ارجمند

مقدمه

تا یکی دو دههٔ پیش عمدهٔ توجه ریاضی‌دانان به مجموعه‌ها و توابعی معطوف بود که در چهارچوب حساب دیفرانسیل و انتگرال قابل بررسی بودند؛ مجموعه‌ها و توابع ناهموار به بهانهٔ این که بی‌ارزش و مهار ناپذیرند مطالعه‌نشده و ناشناخته بودند. اما این نظر اکنون تغییر کرده‌است. در حال حاضر عقیده بر این است که «فرکتال»ها [1] که اشکال ریاضی به‌شدت غیر کلاسیکی‌اند(!) برای شبیه‌سازی پدیده‌های طبیعی بسیار مناسب‌تر از اشیای هندسی کلاسیک‌اند.

تعریف فرکتال

مجموعه A را فرکتال گویند هرگاه .... واقعیت این است که هنوز آن‌هایی که با فرکتال سروکار دارند چنین تعریفی برای فرکتال نداده‌اند!

هیچ وقت فکر کرده‌اید هدف از «تعریف کردن» چیست؟ احتمالاً در بیش‌تر موارد هدف، ایجاد تفاهم بین دو یا چند نفر بر سر یک کلمه یا عبارت است. ولی تنها راهِ رسیدن به تفاهم تعریف کردن، آن هم به شکلی که در ریاضیات مرسوم است نیست. به‌عنوان مثال هر کس تا این‌جای این مقاله را خوانده، بی‌شک می‌داند منظور از «گربه» چیست، در حالی‌که عموماً این درک در افراد، با استفاده از «تعریف» به‌وجود نیامده است! قصد دارم شما را به‌همین صورت با فرکتال آشنا کنم، یعنی با ارایه چند مثال. البته در چنین روشی ممکن است در بعضی موارد بین دو نفر اختلاف نظر به‌وجود بیاید.

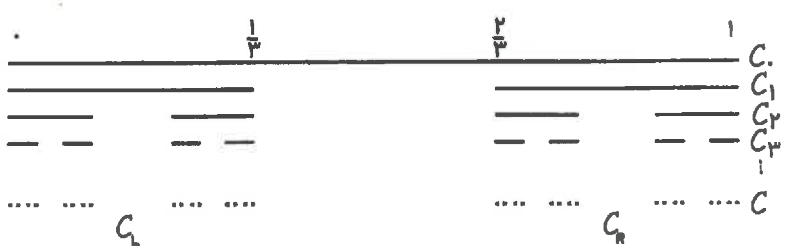
اولین مثال، مجموعه، کانتور [2]، یکی از معروف‌ترین مجموعه‌های ریاضی، است که با وجود سادگی، خواص اساسی فرکتال‌ها را به‌خوبی نشان می‌دهد: از بازهٔ بسته $[0,1]$ شروع کرده، آن را به سه بخش مساوی تقسیم و بخش میانی را حذف کنید. حال با دو قسمت باقیمانده، یعنی $[0,\frac{1}{3}]$ و $[\frac{2}{3},1]$ همین کار را انجام دهید و الی آخر.

---

۱) Fractal

۲) جرج کانتور (Georg Cantor) در ۱۸۴۵ میلادی در سن‌پترزبورگ به‌دنیا آمد. بیش‌تر عمر خود را در آلمان سپری کرد. وی به‌خاطر تحقیقاتش در نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌خصوص رده‌بندی مجموعه‌های نامتناهی معروف است. وی در ۱۹۱۸ میلادی درگذشت.

شمارهٔ ۹ (اسفند ۱۳۸۰) صص ۳۶ـ۳۱



شکل C، آن‌چه که پس از همهٔ این مراحل باقی می‌ماند، مجموعهٔ کانتور نام دارد. ممکن است فکر کنید که اصلاً چیزی باقی نمی‌ماند، ولی این‌طور نیست. در واقع می‌توان نشان داد که C دقیقاً از اعدادی تشکیل شده که در بسط مبنای سهٔ آن‌ها رقم ۱ به‌کار نرفته است. یعنی اعداد به‌شکل $(0/a_1a_2a_3\ldots)_3$ که a_iها، ۰ یا ۲ هستند.

قبل از این‌که به مثال بعدی بپردازیم اجازه دهید کمی مجموعهٔ کانتور را دقیق‌تر بررسی کنیم.

در زیر تعدادی از خواص شکل C (مجموعهٔ کانتور) را فهرست کرده‌ایم:

۱) شکل C «خود متشابه» است؛ قسمت‌هایی از C که در $[0, \frac{1}{3}]$ و در $[\frac{2}{3}, 1]$ قرار دارند از نظر هندسی با خودِ C متشابه‌اند و فقط با ضریب $\frac{1}{3}$ کوچک شده‌اند.

۲) C، ساختار ظریف دارد، به این معنی که با هر مقیاسی که به آن نگاه کنیم ساختار ساده‌ای پیدا نخواهیم کرد؛ هر چه‌قدر تصویر C را بزرگ‌تر کنیم شکاف‌های بیش‌تری در آن پدیدار می‌شوند.

۳) با وجود ساختار پیچیده، تعریف C ساده است (همان‌طور که دیدید در چند سطر، C را تعریف کردیم!).

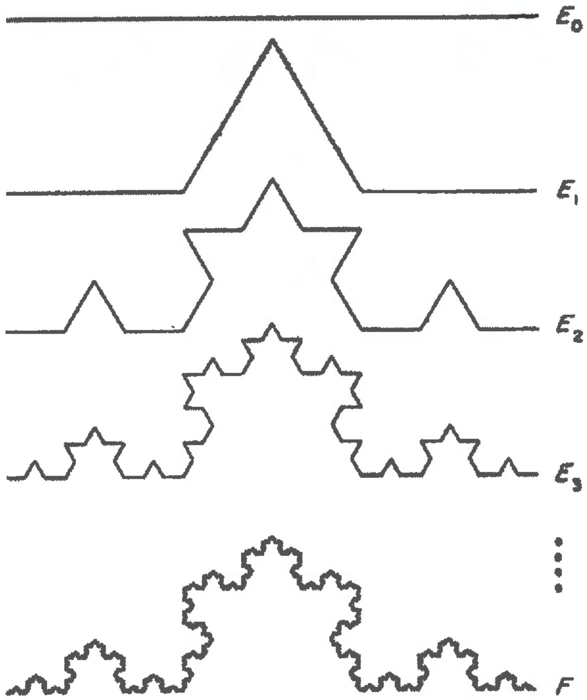
۴) C با یک فرایند بازگشتی ساخته می‌شود.

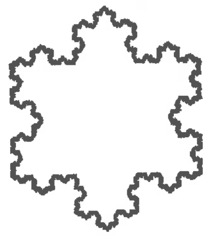
۵) توصیف C با ابزارهای هندسهٔ سنتی (خط، دایره، مکان هندسی و ...) میسر نیست.

مثال بعدی خم کخ [1] است: مجدداً با یک پاره‌خط به طول یک شروع کنید و آن را سه قسمت کنید و قسمت میانی را حذف کنید. اما این بار به‌جای قسمت حذف شده دو ضلع دیگر مثلث متساوی‌الاضلاع با آن ضلع را جایگزین کنید. حال با هرکدام از چهار قطعه این خط شکسته همان کار را انجام دهید. همان‌طور که در شکل می‌بینید با قرار دادن F و دو نسخه دیگر از آن در کنار هم تصویری شبیه به دانهٔ برف درست می‌شود.

---

۱) هلگ فن کخ (Helge von Kock) ریاضی‌دان سوئدی (۱۸۷۰ - ۱۹۲۴ میلادی)

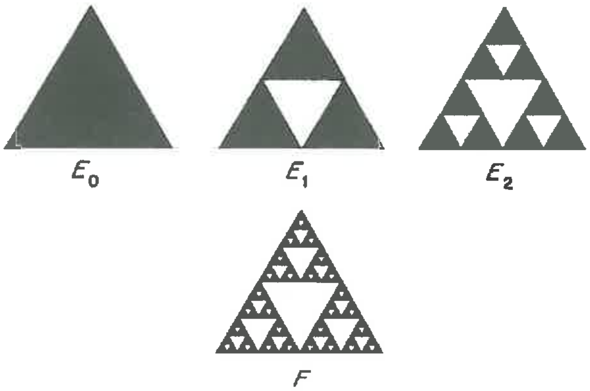




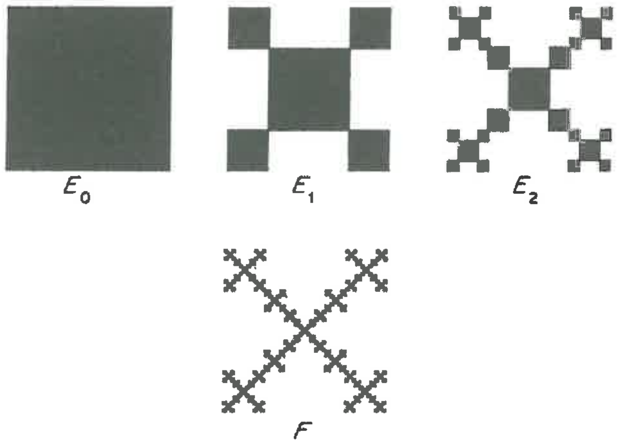
توجه کنید که در هر مرحله، هر قطعه شکل را با قطعه‌ای با طول $\frac{4}{3}$ برابر جایگزین کرده‌ایم و بنابراین درگام k ام طول شکل به‌دست آمده برابر $(\frac{4}{3})^k$ خواهد بود که با بزرگ شدن k، این مقدار به بی‌نهایت میل می‌کند؛ یعنی طول خم کخ بی‌نهایت است. اما ثابت می‌شود که مساحت آن صفر است بنابراین نه طول و نه مساحت، هیچ‌کدام معیار خوبی برای محاسبه بزرگی یک خم کخ نیستند. آیا می‌توانید مساحت داخل دانه برف کخ را محاسبه کنید؟

سومین مثال، مثلث سرپینسکی [1] است. خودتان با دیدن شکل می‌توانید بفهمید که نحوه ساختن آن چگونه است.

۱) واتسلاو سرپینسکی (Waclaw Sierpinski) ریاضی‌دان لهستانی (۱۸۸۲ - ۱۹۶۹ میلادی)



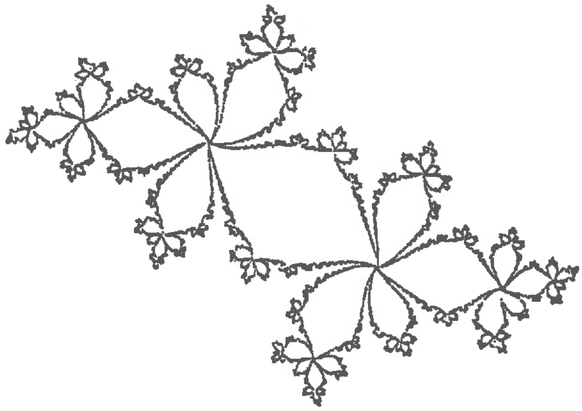
در مثال بعدی در هرگام از یک مربع ۵ مربع کوچک‌تر باقی می‌ماند ولی نسبت این مربع‌های کوچک‌تر با هم متفاوت است.



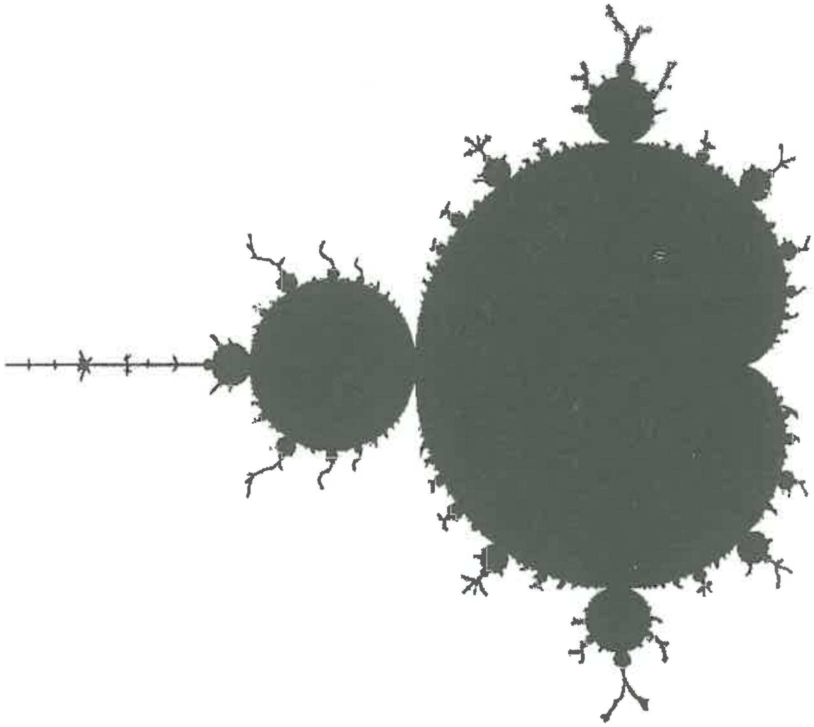
اگر کمی دقت کنید می‌بینید که بسیاری از خواص اخیر با اندکی تغییر بر فهرست خواص مجموعه کانتور منطبق است شکل‌های زیاد و متنوع دیگری نیز می‌توان ساخت که کمابیش دارای همین خواص باشند. شکل بعد از دسته‌ای از مجموعه‌ها به‌نام مجموعه‌های ژولیا[1] انتخاب شده است. تمام ظرافت و زیبایی این شکل از دل تابع $f(z) = z^2 + c$ (در اعداد مختلط) بیرون آمده است! همان‌طور که دیده می‌شود با وجود این‌که این شکل در مقایسه با مثال‌های قبل به‌طور مطلق خود متشابه نیست ولی می‌توان آن‌را تقریباً خود متشابه نامید (هیچ بخش کوچک‌تری از شکل دقیقاً متجانس کل شکل نیست، ولی ساختار بسیار نزدیکی به‌شکل اصلی دارد).

---

۱) گستن موریس ژولیا (Gaston Maurice Julia) ریاضی‌دان الجزایری (۱۸۹۳ - ۱۹۷۸ میلادی)

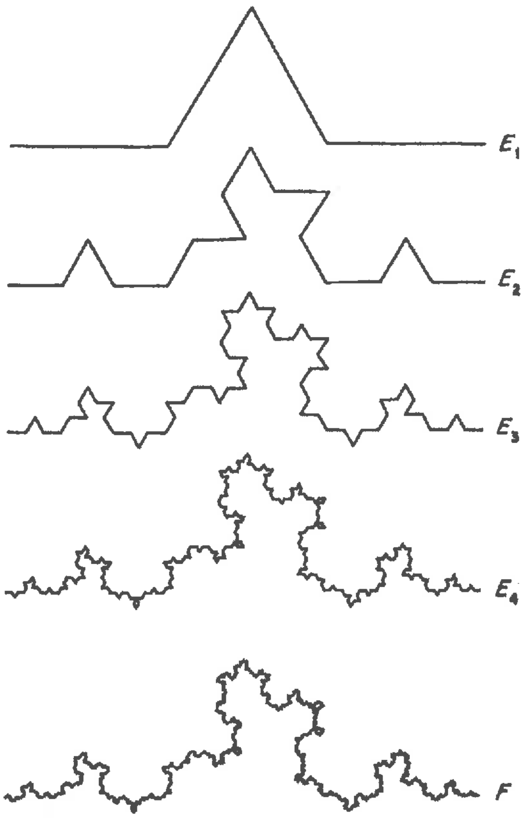


یکی دیگر از معروف‌ترین فرکتال‌ها مجموعهٔ مندلبرات [۱] است که ارتباط نزدیکی با مجموعه‌های ژولیا دارد.



بعضی از مثال‌های قبلی را می‌توان با وارد کردن عاملی جدید، «تصادفی» کرد. مثال دوم (خم کخ) را در نظر بگیرید و فرض کنید که هر بار، با پرتاب یک سکه تصمیم بگیریم که مثلث متساوی‌الاضلاع را در کدام طرف پاره‌خط حذف شده بنا کنیم. نتیجه نهایی را می‌توان یک خم کخ تصادفی نامید. در این حالت خود متشابه بودن به خاصیت ضعیف‌تری تبدیل می‌شود: تشابه آماری با خود!

۱) بنوا مندلبرات (Benoit Mandelbrot) ریاضی‌دان لهستانی که در ۱۹۲۴ به‌دنیا آمد. وی از پیش‌کسوتان هندسه فرکتالی است و با تحقیقات خود نشان داد که چگونه فرکتال‌ها در ریاضیات و در طبیعت ظاهر می‌شوند.



همهٔ این مثال‌ها، مثال‌هایی از فرکتال‌ها هستند. همهٔ آن‌ها کمابیش از خواص ذکر شده برای مجموعهٔ کانتور برخوردارند: ساختار ظریف، خود متشابه بودن (یا به معنی مطلق، یا تقریبی و یا به‌طور آماری) و این‌که ابزارهای هندسهٔ کلاسیک برای مطالعهٔ آن‌ها کفایت نمی‌کند.

بُعد فرکتالی

یکی از مفیدترین ابزارها برای بررسی فرکتال‌ها «بعد» است. شما می‌دانید که مثلاً لبهٔ یک دایره، یک‌بعدی و سطح یک مربع دو بعدی است. اما شاید عجیب باشد که بشنوید مجموعه کانتور $\frac{\log ۲}{\log ۳} \approx ۰/۶۳۱$ بعدی و خم کخ $\frac{\log ۴}{\log ۳} \approx ۱/۲۶۲$ بعدی است! این حرف را می‌توان به‌طریق زیر توجیه کرد:

در فضای n بعدی اگر شکلی را r برابر کنیم حجم آن r^n برابر می‌شود و مثلاً یک مکعب n بعدی به ضلع ۲ از ۲^n مکعب به ضلع ۱ تشکیل شده است. حال اگر فرض کنیم مجموعهٔ کانتور α بعدی باشد با توجه به این‌که با دو مجموعهٔ کانتور به‌طول ۱ می‌توان یک کانتور به‌طول ۳ ساخت، می‌توان گفت اندازهٔ کانتوری که شکل آن ۳ بار بزرگ شده ۲ برابر می‌شود، پس $۲ = ۳^\alpha$ یعنی $\alpha = \frac{\log ۲}{\log ۳}$. با همین استدلال نادقیق می‌توان بعد خم کخ، مثلث سرپینسکی و ... را پیدا کرد. ولی این روش یک محدودیت بزرگ دارد: بسیاری از فرکتال‌ها دقیقاً از تجانس قسمت‌های کوچک‌تر خود به‌دست نمی‌آیند! لذا این تعریف در چنین مواردی کارایی خود را از دست می‌دهد!

مسأله‌هایی دربارهٔ نامساوی‌ها

اکبر عنبرجعفری

دربعضی از مسایل مربوط به نامساوی‌ها با یک سری روابط سروکار داریم که این روابط باید با یک راه حل خوب به یک نامساوی بدیهی تبدیل شوند.

در ابتدا نام چند نامساوی مهم را بیان می‌کنیم، سپس با توجه به هرکدام مسایلی را حل می‌کنیم.

نامساوی کوشی.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

نامساوی فوق را می‌توان به راحتی با استقرا اثبات کرد (اثبات بر عهده شما).

نامساوی مثلثی.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

سعی کنید نامساوی مثلثی را به‌وسیلهٔ نامساوی کوشی اثبات کنید.

نامساوی کوشی ــ شوارتز.

اگر $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ و $b_1, \ldots, b_n \geq 0$ آنگاه داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

نامساوی شور.

اگر x و y و z و λ اعداد حقیقی مثبت باشند داریم

$$x^{\lambda}(x-y)(x-z) + y^{\lambda}(y-x)(y-z) + z^{\lambda}(z-x)(z-y) \geq 0$$

حال با دانستن این چند نامساوی مهم می‌خواهیم چند مسأله از نامساوی حل کنیم.

اولین مسأله‌ای که حل می‌کنیم سؤالی است که در المپیاد جهانی ریاضیات در سال ۲۰۰۰ مطرح شده است.

ثابت کنید برای هر a و b و c مثبت که $abc = 1$ داریم

مکتب ریاضیک شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۴۰ــ۳۷

$$\left(a-۱+\frac{۱}{b}\right)\left(b-۱+\frac{۱}{c}\right)\left(c-۱+\frac{۱}{a}\right)\leq ۱$$

حل. (راه حل توسط نویسنده مطرح شده است.)

اعداد حقیقی x و y و z موجودند که $a=\frac{x}{y}$ و $b=\frac{y}{z}$ و $c=\frac{z}{x}$، در نتیجه

$$\left(a-۱+\frac{۱}{b}\right)\left(b-۱+\frac{۱}{c}\right)\left(c-۱+\frac{۱}{a}\right)=\left(\frac{x}{y}-۱+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-۱+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-۱+\frac{y}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{x-y+z}{y}\right)\left(\frac{y+x-z}{z}\right)\left(\frac{z-x+y}{x}\right)=\left(\frac{(x-y+z)(z-x+y)(y-z+x)}{xyz}\right)$$

بدیهی است که امکان ندارد دو پرانتز از سه پرانتز صورت کسر منفی شود چون اگر $x-y+z<۰$ و $y-z+x<۰$،

$$(x-y+z)+(-z+x+y)=۲x<۰$$

که امکان ندارد. اگر فقط یکی از پرانتزها منفی باشد، کسر منفی شده و مسأله اثبات می‌شود.

پس فرض کنیم که هر سه پرانتز مثبت باشند. اعداد حقیقی و مثبت p و q و r را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$p=\tfrac{۱}{۲}(x-y+z)\qquad q=\tfrac{۱}{۲}(y-z+x)\qquad r=\tfrac{۱}{۲}(z-x+y)$$

در نتیجه

$$x=p+q\qquad y=q+r\qquad z=p+r$$

می‌دانیم $p+q\geq ۲\sqrt{pq}$ و $q+r\geq ۲\sqrt{qr}$ و $r+p\geq ۲\sqrt{rp}$ و در نتیجه

$$(p+q)(q+r)(r+p)\geq ۸pqr$$

پس

$$\frac{۲p\times ۲q\times ۲r}{(p+q)(q+r)(r+p)}\leq ۱$$

و در نتیجه

$$[a-۱+\frac{۱}{b}][b-۱+\frac{۱}{c}][c-۱+\frac{۱}{a}]\leq ۱$$

حال به مسألهٔ زیر نگاه کنید و سپس راه‌حلی برای آن پیشنهاد کنید:

اگر x و y و z و λ عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{x^{\lambda+1}}{y^\lambda} + \frac{y^{\lambda+1}}{z^\lambda} + \frac{z^{\lambda+1}}{x^\lambda} \geq x + y + z$$

حل. راه اول. باید ثابت کنیم که

$$x^\lambda z^\lambda (x^{\lambda+1} - y^{\lambda+1}) + x^\lambda y^\lambda (y^{\lambda+1} - z^{\lambda+1}) + y^\lambda z^\lambda (z^{\lambda+1} - x^{\lambda+1}) \geq 0$$

بدون این‌که به کلیت مسأله و اثباتمان لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم که $x \geq y \geq z$ در این‌صورت نامساوی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$z^\lambda (x^\lambda - y^\lambda) - (x^{\lambda+1} - y^{\lambda+1}) + y^\lambda (x^\lambda - z^\lambda)(y^{\lambda+1} - z^{\lambda+1}) \geq 0$$

معلوم است که این نابرابری هم درست است.

راه دوم. بیایید حکمی کلی‌تر را ثابت کنیم. اگر $x_1, \ldots, x_n$ و λ اعداد حقیقی مثبت باشند،

$$\frac{x_1^{\lambda+1}}{x_n^\lambda} + \cdots + \frac{x_n^{\lambda+1}}{x_1^\lambda} \geq x_1 + \cdots + x_n$$

حال نامساوی فوق را خودتان اثبات کنید (بدیهی است چرا؟).

حال نامساوی زیر را اثبات کنید.

اگر $a_1, \ldots, a_n$ عددهای غیرمنفی باشند ثابت کنید

$$a_1 a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} \right)^2$$

حل. اگر $0 \leq x \leq a$ با استفاده از نامساوی کوشی داریم

$$x(a - x) \leq \frac{a^2}{4}$$

بنابراین

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} \right)^2 \geq \left(\sum_{i \text{ فرد}} a_i \right) \left(\sum_{i \text{ زوج}} a_i \right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}$$

حال سعی کنید نامساوی فوق را حداقل از یک راه دیگر حل کنید!

اینک به نامساوی زیر توجه کنید.

اگر $a_1, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی باشند و

$$f(x) = a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx$$

و اگر به ازای هر عدد حقیقی مانند x، $|f(x)| \leq |\sin x|$ ثابت کنید

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

حل. می توان نوشت:

$$\begin{aligned}|a_1 + \cdots + na_n| &= |f'(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \leq 1\end{aligned}$$

حال به چند نامساوی زیر توجه کنید. این نامساوی‌ها را می‌توانید با استفاده از نامساوی‌های اول مقاله حل کنید.

۱) $x_1, \ldots, x_k$ و $y_1, \ldots, y_m$ عددهای صحیح‌اند و

$$1 < x_1 < \cdots < x_k < y_1 < \cdots < y_m$$

اگر

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{m} y_i$$

ثابت کنید

$$x_1 \cdots x_k \geq y_1 \cdots y_m.$$

۲) اگر a، b و c اعداد حقیقی باشند ثابت کنید

$$\min\left((a-b)^2,\ (b-c)^2,\ (c-a)^2\right) \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

۳) اگر x و y و z عددهای مثبت باشند ثابت کنید

$$\left(\sqrt{(x+y+z)^2+4xyz} - x - y - z + 1\right)(xy+yz+xz) \geq 6xyz.$$

۴) نامساوی مثلثی را اثبات کنید.

۵) اگر $a_1, \ldots, a_n$ عددهای حقیقی باشند که $a_i \geq 1$ و $1 \leq i \leq n$، ثابت کنید

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

مسأله‌های درسی

رؤیا درودی

- ریاضیات ۲

۱) اگر در یک تصاعد حسابی مجموع جملات چهارم و یازدهم ۶۰ باشد، مجموع جملات هفتم و هشتم را به‌دست آورید.

۲) در یک تصاعد هندسی حاصل‌ضرب جملهٔ چهارم و هشتم برابر ۸ است. جملهٔ ششم این تصاعد را به‌دست آورید.

۳) به‌ازای چه مقادیری از m، عدد $۲\sqrt{۶}$ واسطهٔ هندسی بین دو عدد $۳m$ و $m-۲$ است؟

۴) معادلهٔ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ را در دستگاه محورهای مختصات جدید که مبدأ آن $(۱,-۲)$ و محورهایش موازی و هم جهت محورهای قدیم است بنویسید.

- هندسه

۱) در چهار وجهی منتظم به طول یال ۵ سانتی‌متر، کره‌ای را محاط داخلی کرده‌ایم. شعاع کره را بیابید.

۲) مثلثی به اضلاع ۲ و ۳ و ۴ در دایره‌ای به شعاع r محاط شده است. r را به‌دست آورید.

۳) مستطیلی به اضلاع ۳ و ۴ مفروض است. اگر مستطیل را حول ضلع ۳ دوران بدهیم، حجم حاصل از دوران را به‌دست آورید.

۴) ورقه‌ای به اضلاع ۶ و ۴ مفروض است. دو ضلع موازی به اندازهٔ ۴ را به یکدیگر وصل کرده و یک استوانه می‌سازیم. مساحت جانبی، مساحت هر یک از قاعده‌ها و حجم کره را به‌دست آورید.

- جبر و احتمال

۱) دو عدد به تصادف در فاصلهٔ $[۰,۵]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد چیست؟

۲) دو عدد x و y را به تصادف از فاصلهٔ $[۰,۲]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که $x^۲+y^۲ > ۲$ چقدر است؟

۳) تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر کمتر از ۳ بیاید یک سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم و اگر کمتر از ۳ نیاید سکه را ۱ مرتبه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ شانس هر عضو این فضای نمونه‌ای چقدر است؟

۴) تاسی را ۷ بار می‌ریزیم، احتمال آن‌که دقیقاً ۴ بار ۵ بیاید چیست؟

- ریاضیات ۱

۱) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x^۳-۸| < x^۲+۲x+۴$ را به‌دست آورید.

۲) اگر $x+\frac{۱}{x}=a$، آن‌گاه $x^۴+\frac{۱}{x^۴}$ را برحسب a به‌دست آورید.

۳) حاصل $k=\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\dots}}}$ را به‌دست آورید.

۴) اگر $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+6}=A+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$ باشد آنگاه $A+\frac{B}{3}+\frac{C}{4}$ را به‌دست آورید.

- حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن اکیداً صعودی باشد. ثابت کنید که خط مماس بر نمودار f آن‌را در نقطه‌ای غیر از نقطهٔ تماس قطع نمی‌کند.

۲) حدهای زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{16}}[1^{15}+2^{15}+\dots+n^{15}]$

(ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$

۳) نامساوی‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) $\int_0^1\frac{x\cos x}{x^2+1}dx\le\int_0^1 xdx$

(ب) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\cos\pi xdx\le\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos\pi xdx$

۴) فرض کنید f تابعی باشد که در $[a,b]$ پیوسته است و $\int_a^b f(x)dx=0$. ثابت کنید وجود دارد $c\in[a,b]$ که $f(c)=0$.

- ریاضیات گسسته

۱) مسألهٔ منشی گیج: فرض کنید n نامه و n پاکت به یک منشی داده شده است و از او خواسته شده که هر نامه را در پاکت مخصوص به‌خود قرار دهد، اما او نامه‌ها را در پاکت‌های عوضی قرار داده است. به کمک اصل شمول و عدم شمول تعداد حالت‌هایی را به‌دست آورید که هیچ نامه‌ای در پاکت مخصوص به‌خود قرار نگرفته باشد.

۲) تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ را به‌دست آورید.

۳) در چند تا از زیرمجموعه‌های ۸ عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,17\}$ اعداد ۳ و ۵ و ۷ وجود دارند ولی اعداد ۱۰ و ۱۵ وجود ندارند؟

۴) در بسط $(x+y+z+w)^{14}$ ضریب جملهٔ $x^2y^3z^4w^5$ را به‌دست آورید.

- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱) فاصلهٔ مبدأ مختصات را از فصل مشترک دو صفحهٔ $2x=3$ و $y-5=0$ به‌دست آورید.

۲) مختصات نقطه‌ای را به‌دست آورید که از چهار نقطهٔ $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ و $D(3,2,2)$ به‌یک فاصله باشد.

۳) حجم هرم بنا شده بر صفحهٔ $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$ و صفحات مختصات را به‌دست آورید.

۴) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط D به معادلات $\begin{cases}x+y=z\\2x+z=0\end{cases}$ باشد و خط Δ به معادلهٔ $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=z$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

- حسابان

۱) مختصات نقطهٔ عطف تابع زیر را به‌دست آورید

$$y=(x-2a)^3+(x+2a)^3$$

۲) جهت تقعر و نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x|x|$ را تعیین کنید و نمودارهای توابع f و f' و f'' را رسم کنید.

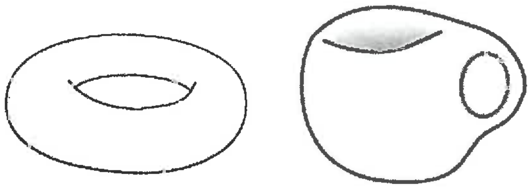
۳) در تابع $f(x)=a\cos x+\sin\frac{x}{2}+b$ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که خط $y=x$ در نقطه‌ای به‌طول $\frac{\pi}{2}$ بر منحنی مماس باشد.

۴) ضرایب a و b را چنان به‌دست آورید که تابع با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+4$ فقط در بازهٔ $(-1,1)$ نزولی باشد.

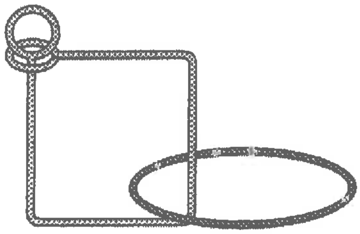
توپولوژی و معما

سپیده چمن‌آرا

توپولوژی[1]، دانش مطالعهٔ آن دسته از ویژگی‌های هندسی اشیاء است که تحت تغییر شکل[2]، حفظ می‌شوند. این تغییر شکل، عملی پیوسته روی شیء (مثل کشیده یا جمع کردن) است، بدون این‌که شیء بریده شود یا چیزی به چیزی چسبانیده شود. گاهی اوقات، توپولوژی را «هندسهٔ نوارکشی» نیز می‌نامند. وقتی با دیدگاه توپولوژی نگاه می‌کنیم، بین یک دونات[3] و یک فنجانِ قهوه تفاوتی وجود ندارد زیرا هر یک را می‌توان با تغییر شکل، به دیگری تبدیل کرد!



معماهای نخ و حلقهٔ زیادی هستند که بر اساس قوانین توپولوژیکی طراحی شده‌اند، با دانستن قوانین و اصول اندکی، می‌توان این معماها را تجزیه و تحلیل و حل کرد.



1) Topology 2) Deformation

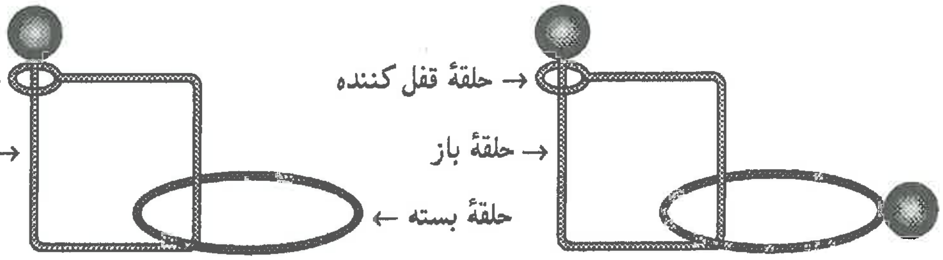
۳) نوعی پیراشکی

4) Lock Puzzles 5) Clef Puzzles 6) Chinese Rings Puzzle

ریاضیات شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۴۷ـ۴۳

معماهای حلقهٔ باز

معماهای قفل[۴]، معماهای کلید[۵] و معمای حلقه‌های چینی[۶]، همگی بر اساس معمای حلقهٔ باز[۱] هستند. یک حلقهٔ باز، یک ساختار حلقه مانند است که یک یا چند شکاف[۲] دارد. یک معمای حلقهٔ باز، حداقل از دو بخش تشکیل شده است؛ یکی یک حلقهٔ باز و دیگری یک حلقه (باز یا بسته) که از شکاف(های) حلقهٔ باز می‌تواند رد شود. در ابتدا، این دو بخش در هم گیر کرده‌اند، و هدف معما این است که آن‌ها را از یکدیگر جدا کند.



معماهای سادهٔ حلقهٔ باز

در هر یک از معمای شکل بالا، از مفتول و مهره برای ساختن حلقهٔ باز، استفاده شده است. یک سر مفتول، به مهره وصل شده است و سر دیگر آن به‌صورت یک دایرهٔ کوچک است که ما آن‌را حلقهٔ انتهایی[۳] می‌نامیم. حلقهٔ انتهایی، سر دیگر مفتول را درون خود نگه داشته است، و از این رو آن‌را حلقهٔ قفل کننده[۴] نیز می‌نامیم. مهرهٔ متصل به سر دیگر مفتول به‌قدری بزرگ است که از درون حلقهٔ قفل کننده عبور نمی‌کند.

درون هر یک از حلقه‌های باز، یک حلقهٔ بسته که از جنس طناب است، گیر کرده است. از نظر توپولوژی، یک حلقهٔ باز، در اصل یک حلقه نیست. چرا که اگر مهره را جمع و منقبض کنیم تا آن‌قدر کوچک شود که از داخل حلقهٔ قفل کننده عبور کند، دیگر حلقه‌ای که درون طناب گیر کرده باشد، وجود نخواهد داشت.

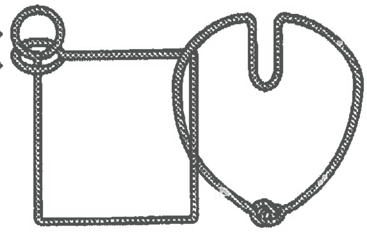
در همهٔ معماهای حلقهٔ باز، به‌نظر می‌رسد که دو تا حلقه بدجوری به‌هم گیر کرده‌اند و از یکدیگر جدا نمی‌شوند. البته اگر به ساختار حلقهٔ باز در معما توجه کنیم، همیشه می‌توانیم راهی برای عبور شیء گیر کرده درون حلقهٔ باز از سوراخ این حلقه بیابیم. در معمای بالا (شکل سمت چپ)، می‌توانیم طناب را از داخل حلقهٔ قفل کننده بیرون بکشیم تا از داخل مفتول خارج شود. اما معمای شکل سمت راست بالا را چگونه حل کنیم؟ در این معما ، مهره‌ای درون طناب است که از داخل حلقهٔ قفل کننده رد نمی‌شود. این معما را بسازید و کمی برای حل آن تلاش کنید. کار خیلی سختی نیست!

تا اینجا، تنها معماهایی از نوع معماهای حلقهٔ باز را مطرح کردیم که شیء گیر کرده درون حلقه، یک حلقهٔ بستهٔ طناب است. طناب‌ها انعطاف‌پذیرند و می‌توان آن‌ها را پیچاند یا تا کرد، بنابراین خارج کردن آن از درون سوراخ حلقهٔ باز کار ساده‌ای است. در اینجا چند معمای حلقهٔ باز دیگر مطرح می‌کنیم که کاملاً از جنس مفتول هستند. در یک معمای مفتولی، تمام قطعات دارای شکل‌های ثابتی هستند که

1) Open Loop Puzzles 2) Opening 3) End Loop 4) Locking loop

قابل تغییر نیست. این قبیل معماهای حلقهٔ باز مفتولی را چگونه حل کنیم؟

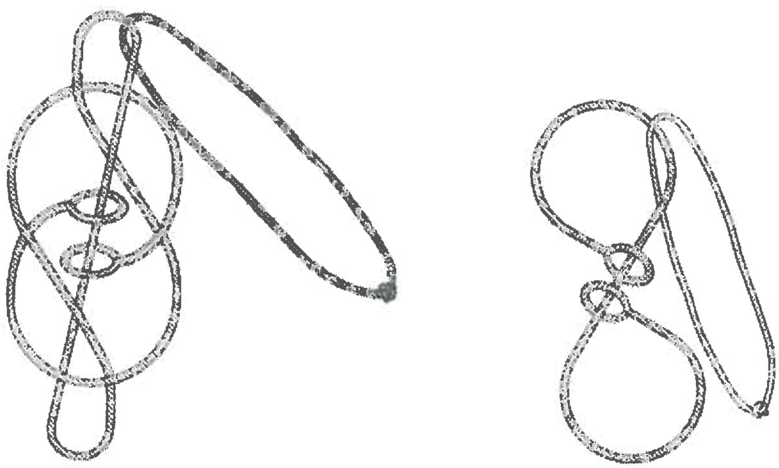
معمای قفل قلبی شکل[1] که در شکل نشان داده شده است، یکی از معماهای حلقهٔ باز مفتولی است. حلقهٔ مربع شکل، یک حلقهٔ باز است زیرا در انتهای آن، یک سوراخ وجود دارد و یک حلقهٔ بستهٔ قلب مانند داخل آن گیر کرده است. چگونه می‌توان قلب را از مربع جدا کرد؟



واضح است که عبور قلب از حلقهٔ قفل کنندهٔ مربع، غیر ممکن است، زیرا ندازهٔ قلب، خیلی بزرگ‌تر از حلقهٔ قفل کننده است در حالی‌که در اولین معما که با طناب بود، این‌کار به‌سادگی انجام شد. البته شاید بتوان با عبور جزئی قلب از درونِ حلقهٔ قفل کننده و رد کردن آن از حلقهٔ انتهایی، این دو را از هم جدا کرد. برای این منظور، باید قسمتی از قلب را که به‌اندازهٔ کافی نازک باشد که از حلقهٔ قفل کنندهٔ مربع عبور کند، بیابیم. در ضمن این قسمت باید آن‌قدر بلند باشد که از حلقهٔ انتهایی رد شود. بقیهٔ کار را به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم ....

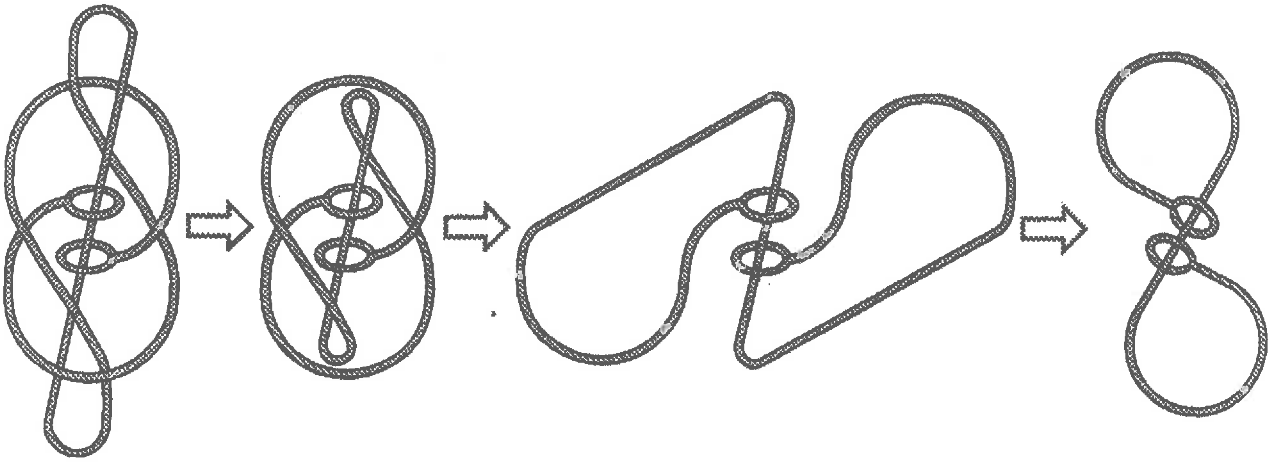
تغییر شکل معماهای حلقهٔ باز

بعضی معماها، مثل معمای کلید سُل دوتایی[2] ساختاری پیچیده دارند. وقتی می‌خواهیم به‌کمک توپولوژی، یک معما با ساختار پیچیده را حل کنیم، اولین کار این است که ساختار آن را ساده کنیم. یک راه این کار، کاهش تعداد تقاطع‌هاست. تقاطع [3] اصطلاحی است که در نظریهٔ گره‌ها (که شاخه‌ای از توپولوژی است) استفاده می‌شود و به‌جایی اطلاق می‌شود که دو قطعهٔ یک گره روی یکدیگر می‌افتند و یکی از آن‌ها از روی دیگری عبور می‌کند.



1) The Heart Lock Puzzle 2) Double Treble Clef 3) Crossing

بیایید معماهای کلید سُل دوتایی و شکل 8 را بررسی کنیم. معمای شکل[1] 8که در شکل بالا سمت راست نشان داده شده است، دارای دو تا حلقهٔ باز است که یک قطعه طناب را درون خود جا داده‌اند. هر حلقهٔ باز، نقش حلقهٔ انتهایی دیگری را نیز به‌عهده دارد. در این معما، هیچ تقاطعی وجود ندارد و ورود به هر یک از حلقه‌های باز، از طریق وسط سیمی است که بین دو حلقهٔ قفل کننده وجود دارد. شکل 8، معمای نسبتاً ساده‌ای است، در حالی‌که کلید سل دوتایی، با هشت تا تقاطع، یک معمای مشکل به‌نظر می‌رسد. اما اگر قدری با دقت بیشتر به ساختار آن نگاه کنید، می‌بینید که کلید سُل دوتایی و شکل 8، خیلی با هم تفاوت ندارند.



در شکل بالا، دنباله‌ای از تبدیلات که کلید سُل دوتایی را به شکل 8 تبدیل می‌کند، نشان داده شده است. توجه کنید که چگونه هشت تا تقاطع در کلید سُل در اثر باز شدن این شکل، ناپدید می‌شوند. آیا اکنون می‌توانید معمای کلید سُل دوتایی[۲] را حل کنید؟

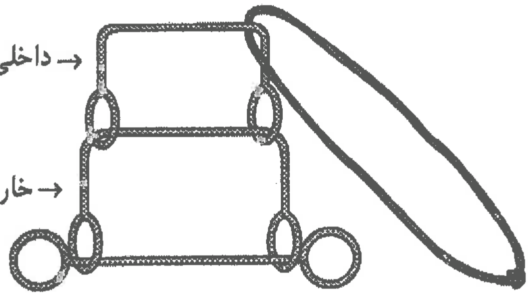
حلقه‌های بازِ تودرتو

با استفاده از حلقه‌های بازی که به یکدیگر متصل شده‌اند، می‌توان معماهای پیچیده‌تری ساخت. تابِ دوتایی[3] و حلقه‌های چینی، نمونه‌هایی از معماهای حلقهٔ بازِ تودرتو هستند. زمانی‌که با یک معمای حلقهٔ باز تودرتو مواجه هستیم، آن‌چه مهم است این است که بتوانیم ساختار هر یک از حلقه‌های باز را به‌تنهایی شناسایی کنیم، محل شکاف‌های آن‌ها را بیابیم و بفهمیم چگونه به یکدیگر متصل شده‌اند.

1) Figure 8 Puzzle

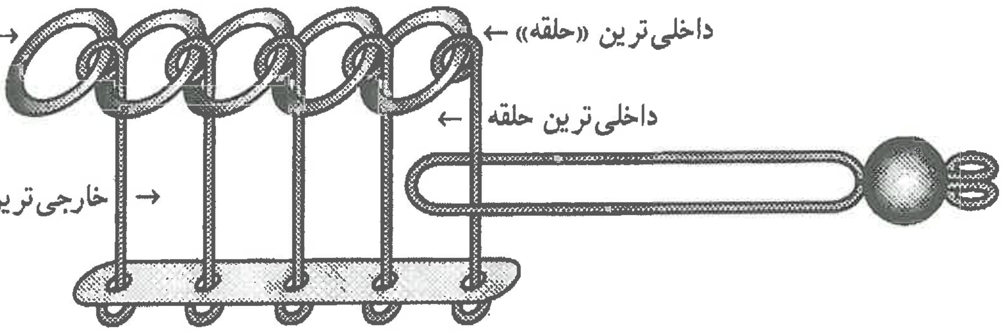
۲) نمونه‌ای از ابزار این معما را کانون پرورش فکری کودکان و نوجوانان تولید کرده است.

3) Double Trapeze



معمای تاب دوتایی، دارای دو تا حلقهٔ باز است که به‌یکدیگر متصل شده‌اند. شکاف هر دو تا حلقه در حلقه‌های انتهاییِ ساختارِ U شکلِ آن‌هاست. با استفاده از شکافِ حلقهٔ درونی، به حلقهٔ بیرونی می‌رسیم و شکافِ حلقهٔ بیرونی، منجر به خروج از کلِ معما می‌شود. برای آزاد کردنِ حلقهٔ طناب از درون معما، نخست آن‌را از حلقهٔ درونی به حلقهٔ بیرونی منتقل می‌کنیم و سپس آن‌را از حلقهٔ بیرونی، خارج می‌کنیم. این معما را بسازید و آن‌را حل کنید...

می‌توانیم هر تعداد حلقهٔ باز که می‌خواهیم، به یکدیگر متصل کنیم و معماهای به‌ظاهر پیچیده‌تری بسازیم. البته باید در عمل، تعداد حلقه‌های باز تو در تو را محدود کنیم تا بتوانیم در زمانی‌که زنده هستیم، آن‌را حل کنیم! معمای حلقه‌های چینی که در زیر آن‌را معرفی می‌کنیم، مثال خوبی از این امر است.



اسم این معما، در واقع از حلقه‌هایی گرفته شده که به تشکیل حلقه‌های باز تو در تو کمک می‌کنند. در شکل بالا، پنج «حلقه» داریم که تشکیل چهار حلقهٔ باز شونده داده‌اند. دستهٔ[1] سمت راست، یک حلقهٔ بسته است که درون داخلی‌ترین حلقهٔ باز گیر کرده است. هدف این است که دسته را از درون این حلقه‌ها دربیاوریم.

در معمای حلقه‌های چینی، دسته دارای شیاری است که آن‌قدر بلند است که «حلقه‌ها» به‌سادگی داخل آن شده یا از آن خارج می‌شوند و در عین حال، انتهای دسته به‌قدر کافی نازک است که به‌درون «حلقه‌ها» بلغزد یا از آن‌ها خارج شود.

در شماره‌های آیندهٔ ماهنامه، به بررسی راه حلِ معمای حلقه‌های چینی می‌پردازیم و معماهای توپولوژیک جدید دیگری نیز معرفی می‌کنیم.

1) Handle

آمادگی برای المپیاد ریاضی

هادی سلماسیان

۱۵. بیایید با یک مسألهٔ نه چندان دشوار شروع کنیم:

مسأله ۱. *یک «تصاعد حسابی» به زیر مجموعه‌ای مثل X از عددهای صحیح و مثبت گفته می‌شود که به‌ازای دو عدد صحیح و مثبت a و b، داشته باشیم*

$$X = \{a, a+b, a+۲b, \cdots\} = \{a+mb \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq ۰\}$$

فرض کنید $X_۱$، ...، X_k تصاعدهای حسابی مجزایی باشند (یعنی اشتراک هر دو تای متمایز آن‌ها تهی است) که اجتماعشان مساوی با مجموعهٔ عددهای صحیح و مثبت است. فرض کنید برای هر i

$$X_i = \{a_i + mb_i \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq ۰\}$$

نشان دهید $\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} = ۱$.

اجازه دهید قبل از این‌که اثبات دقیقی ارایه کنم، کمی سعی کنم که شما را به‌طور شهودی نسبت به درستی حکم مسأله قانع کنم. اگر چه این حرف دقیقی نیست، ولی به هر حال «عقل سلیم» تأیید می‌کند که عددهای زوج (و نیز اعداد فرد)، پنجاه درصد از کل عددهای صحیح و مثبت هستند. به دلیل مشابهی، مضرب‌های ۳، $\frac{۱}{۳}$ از کل عددهای طبیعی را تشکیل می‌دهند. خوب، فکر می‌کنید یک تصاعد حسابی مثل $x = \{a, a+b, a+۲b, \ldots\}$ تقریباً چه کسری از اعداد طبیعی را تشکیل می‌دهد؟ طبیعی است که $\frac{۱}{b}$.

اگر بخواهیم دقیق باشیم، می‌توانیم چنین عمل کنیم: می‌گوییم «چگالی» زیر مجموعهٔ X از اعداد صحیح و مثبت، برابر با عدد حقیقی a است، اگر و تنها اگر مقدار $x(n) = \frac{|X \cap \{۱,۲,\ldots,n\}|}{n}$ (که $|A|$، برای هر مجموعهٔ متناهی A، برابر با تعداد عضوهای A است) وقتی n به بی‌نهایت می‌رود، به عدد a میل کند![1]

با این تعریف، چگالی تصاعد حسابی X برابر است با $\frac{۱}{b}$: اگر $[x]$، برای هر عدد حقیقی x، به معنای بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد که از x بیش‌تر نیست (مثلاً $۳ = [۳]$، $۳ = [\pi]$ و $-۴ = [-\pi]$)، تعداد اعضای $X \cap \{۱, ۲, \cdots, n\}$ را می‌شود برحسب n به صورت $f(n)$ بیان کرد که

$$f(n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n-a}{b} \rfloor + ۱ & n \geq a \text{ اگر } \\ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

۱) اگر نمی‌دانید «میل کند» یعنی چه، و به عبارتی اگر تعریف «حد» را نمی‌دانید، عبارت بالا را به این معنا در نظر بگیرید که با بزرگ کردن n به میزان کافی می‌توانیم $x(n)$ را هر قدر که بخواهیم به a نزدیک کنیم.

مکتب ریاضیات شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۵۲ــ۴۸

روشن است که وقتی $n \geq a$، $\frac{\frac{n-a}{b}+۱-۱}{n} \leq x(n) \leq \frac{\frac{n-a}{b}+۱}{n}$ (بگویید چرا؟!) یعنی

$$\frac{۱}{b} - \frac{۱}{n}(\frac{a}{b}) \;\leq\; x(n) \;\leq\; \frac{۱}{b} + \frac{۱}{n}(۱-\frac{a}{b})$$

و با توجه به این‌که اگر n خیلی بزرگ باشد مقدار $\frac{۱}{n}$ خیلی به صفر نزدیک است، چگالی X همان $\frac{۱}{b}$ است که ادعا کردم!

بگذارید به راه‌حل برگردیم. اندیشهٔ راه‌حل این است: برای nهای خیلی بزرگ، تقریباً $\frac{n}{b_i}$ تا از اعضای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در X_i قرار دارد، و چون این مجموعه‌ها، دو به دو اشتراکی ندارند، پس جمع تعداد عضوهای $X_i \cap \{۱, \cdots, n\}$، برای i های مختلف، n می‌شود. یعنی

$$\frac{n}{b_۱} + \cdots + \frac{n}{b_k} \approx n \Longrightarrow \frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} \approx ۱$$

به بیان دقیق‌تر، اگر n از همهٔ عددهای فرد $a_۱, \ldots, a_k$ بزرگ‌تر باشد، تعداد اعضای $X_i \cap \{۱, \ldots, n\}$، برای هر i، برابر است با $\lfloor \frac{n-a_i}{b_i} \rfloor + ۱$. بنابراین

$$\left(\lfloor \frac{n-a_۱}{b_۱} \rfloor + ۱\right) + \cdots + \left(\lfloor \frac{n-a_k}{b_k} \rfloor + ۱\right) = n$$

اما همانند قبل، $\frac{n-a_i}{b_i} \leq \lfloor \frac{n-a_i}{b_i} \rfloor + ۱ \leq \frac{n-a_i}{b_i} + ۱$. پس

$$n(\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k}) - (\frac{a_۱}{b_۱} + \cdots + \frac{a_k}{b_k}) \leq n \leq n(\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k}) + k - (\frac{a_۱}{b_۱} + \cdots + \frac{a_k}{b_k})$$

فرض کنید $M_۱ = -(\frac{a_۱}{b_۱} + \cdots + \frac{a_k}{b_k})$ و $M_۲ = k - (\frac{a_۱}{b_۱} + \cdots + \frac{a_k}{b_k})$، در این‌صورت از دو نامساوی بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} + \frac{M_۱}{n} \;\leq\; ۱ \;\leq\; \frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} + \frac{M_۲}{n}$$

که $M_۱$ و $M_۲$ مقدارهای ثابتی هستند (یعنی به n بستگی ندارند). از نامساوی سمت راست نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} \geq ۱ - \frac{M_۲}{n}$$

که اگر به آن برای nهای خیلی بزرگ دقت کنیم، به‌راحتی نتیجه می‌گیریم $\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} \geq ۱$ (استدلال را کامل کنید). به‌طور مشابهی از نامساوی سمت چپ نتیجه می‌شود $\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} \leq ۱$. بنابراین روی هم رفته نتیجه می‌شود $\frac{۱}{b_۱} + \cdots + \frac{۱}{b_k} = ۱$.

تمرین ۱ . *مقدار «چگالی» مجموعهٔ عددهای مربع‌کامل (یعنی $\{۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, \ldots\}$) چه‌قدر است؟ مقدار چگالی یک زیر مجموعهٔ متناهی از عددهای صحیح و مثبت چه‌قدر است؟*

تمرین ۲ . *در یک دنبالهٔ نامتناهی $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$ از عددهای صحیح، که برای هر i، $x_i \in \{۱, \ldots, M\}$ (و M عدد صحیح و مثبت دل‌خواهی است)، دو جملهٔ x_p و x_q، که $x_p = x_q = A$ و $p < q$، را «متوالی» می‌نامیم اگر بین آن‌ها هیچ جمله‌ای از دنباله یافت نشود که مساوی با آن‌ها بشود (یعنی برای هر $p < j < q$، $x_j \neq A$). مثلاً در دنبالهٔ زیر*

$$۳, ۷, ۳, ۶, ۲, ۷, ۳, ۵, \ldots$$

$x_۱$ و $x_۷$ متوالی نیستند ولی $x_۲$ و $x_۶$ متوالی هستند.

آیا عدد M ای وجود دارد که بتوان چنین دنباله‌ای نوشت به‌نحوی که برای هر $A \in \{۱, \ldots, M\}$، بین هر دو جملهٔ متوالی و مساوی با A، دست کم ۲^A جملهٔ دیگر قرار بگیرد؟ (راهنمایی: سعی کنید شبیه مسألهٔ ۱ استدلال کنید! چه نامساویی را باید ثابت کنید؟ فراموش نکنید که $۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{۲M} > ۱$ (چرا؟!))

تعریف ۱. عدد صحیح و مثبت N، «خالی از مربع» نامیده می‌شود هرگاه N بر هیچ عدد مربع کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نباشد. در حقیقت، N دارای این خاصیت است که در تجزیهٔ آن به حاصل‌ضرب اعداد اول، هیچ عدد اولی با توانی بزرگ‌تر از یک ظاهر نمی‌شود.

مسأله ۲. *ثابت کنید هر عدد صحیح و مثبت $M > ۱$ را می‌شود به شکل مجموع دو عدد خالی از مربع بیان کرد (که البته لزوماً متمایز نیستند).*

خوب، طبیعی است که حتماً ارتباطی بین این مسأله، و چگالی عددهای خالی از مربع وجود دارد! ببینیم چه تعداد از عددهای بین ۱ تا n، خالی از مربع هستند.

تعداد عددهایی بین ۱ تا n که خالی از مربع نیستند را تخمین می‌زنیم: این عددها باید بر مربع حداقل یک عدد اول بخش‌پذیر باشند. ولی اگر $p^۲|n$، باید $p \le \sqrt{n}$. تعداد عددهای بین $\{۱, ۲, \dots, n\}$ هم که بر $p^۲$ بخش‌پذیر هستند، برابر است با $\lfloor \frac{n}{p^۲} \rfloor$. پس حداکثر تعداد عددهای غیرخالی از مربع، برابر است با

$$\frac{n}{۴} + \frac{n}{۹} + \frac{n}{۲۵} + \frac{n}{۴۹} + \cdots + \frac{n}{p_n^۲}$$

که p_n بزرگ‌ترین عدد اول کم‌تر از $\sqrt{n}$ است. اما عبارت بالا، از مقدار زیر بیش‌تر نیست.

$$n(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۵} + \frac{۱}{۴۹} + \frac{۱}{۱۲۱} + \frac{۱}{۱۶۹} + S)$$

که S برابر است با مجموع عددهای $\frac{۱}{k^۲}$ برای همهٔ k های صحیح و مثبت بین ۱۷ و $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

سؤال. چرا ادعای بالا صحیح است؟

اما از سوی دیگر، اگر $A = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$، و $A \ge ۱۷$،

$$S \le \tfrac{۱}{۱۷^۲} + \tfrac{۱}{۱۸^۲} + \cdots + \tfrac{۱}{A^۲} \le \tfrac{۱}{۱۷ \times ۱۶} + \tfrac{۱}{۱۸ \times ۱۷} + \cdots + \tfrac{۱}{A(A-۱)}$$

$$= (\tfrac{۱}{۱۶} - \tfrac{۱}{۱۷}) + (\tfrac{۱}{۱۷} - \tfrac{۱}{۱۸}) + \cdots + (\tfrac{۱}{A-۱} - \tfrac{۱}{A}) = \tfrac{۱}{۱۶} + (-\tfrac{۱}{۱۷} + \tfrac{۱}{۱۷}) + (-\tfrac{۱}{۱۸} + \tfrac{۱}{۱۸}) + \cdots - \tfrac{۱}{A}$$

یعنی [1]

$$S \le \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{A} < \frac{۱}{۱۶}$$

محاسبه نشان می‌دهد که $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۵} + \frac{۱}{۴۹} + \frac{۱}{۱۲۱} + \frac{۱}{۱۶۹} + \frac{۱}{۱۶} < \frac{۱}{۲}$ (حتماً این محاسبه را انجام دهید تا مطمئن باشید کلاه سرتان نگذاشته‌ام!) بنابراین بیش از نیمی از عددهای بین $\{۱, ۲, \dots, n\}$ خالی از مربع هستند. اما بگذارید به مسألهٔ اولیه برگردیم. چطور باید آن‌را حل کرد؟

تمرین ۳. *استدلال را تکمیل کنید.*(راهنمایی: جفت‌های $\{K, M-K\}$ از عددهای صحیح مثبت را در نظر بگیرید. چه چیزی را باید در مورد آن‌ها ثابت کرد تا نتیجه شود M به‌صورت مجموعی از دو عدد خالی از مربع قابل بیان است؟)

مسألهٔ بالا، شکل بسیار ضعیف شدهٔ مسألهٔ دیگری است که به حدس گلدباخ [2] معروف است.

۱) حیلهٔ جالبی که برای تخمین زدن S به‌کار رفته، خیلی معروف است! و خیلی جاها هم استفاده از حیله‌های مشابه به‌درد می‌خورد.

2) Goldbach

حدس گلدباخ. هر عدد طبیعی زوج $M > ۲$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

هنوزکسی نتوانسته این حدس را اثبات یا رد کند. این مسأله هم، همانند مسألهٔ فرما، از مسأله‌های مورد علاقهٔ «عاشقان سینه چاک» ریاضیات است، و هر از چند گاهی در یکی از «روزنامه‌های صبح و عصر»، خبر از آن می‌دهند که یکی از این آدم‌ها این مسأله را حل کرده است (که طبعاً اثبات است و نه ردا!) بگذریم ...!

وینوگرادوف[1]، ریاضی‌دان روس، ثابت کرده است که هر عدد فرد که «به‌قدرکافی بزرگ انتخاب شود» را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول بیان کرد (یعنی $N_\circ$ای وجود دارد که حکم ذکر شده، برای هر $N \geq N_\circ$ صحیح است.) ولی اثبات وی از روش‌های پیشرفته و ابزارهای نظریهٔ اعداد تحلیلی[2] استفاده می‌کند.

قسمت انتهایی استدلال بالا را می‌توان به طور مستقل نیز در نظر گرفت و به نتیجهٔ زیر رسید:

نتیجه ۱. *فرض کنید A مجموعه‌ای از عددهای صحیح و مثبت باشد که برای هر n، $A \cap \{۱, ۲, \ldots, n\}$ بیش‌تر از $\frac{n}{۲}$ عضو دارد. در این‌صورت هر عدد صحیح و مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع دو عضو از A (که لزوماً متمایز نیستند) بیان کرد.*

آیا می‌توان این نتیجه را عمومیت داد؟ مسألهٔ زیر یک روش تعمیم را نشان می‌دهد.

تمرین ۴. [3] *فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ عددهای صحیح و مثبت باشد که دارای این خاصیت است که عدد حقیقی $c > ۰$ وجود دارد که تعداد عضوهای $A \cap \{۱, \ldots, n\}$، برای هر n، دست‌کم cn است.*

نشان دهید عدد صحیح و مثبت k وجود دارد که هر عدد صحیح و مثبت دل‌خواه را بتوان به‌صورت مجموع حداکثر k عضو (نه لزوماً متمایز) از A نوشت.

(راهنمایی. نشان دهید مجموعهٔ $A + A$ شامل همهٔ اعداد صحیح و مثبتی که به‌شکل جمع حداکثر دو عضو از A هستند، دارای خاصیت زیر است: اگر $۱ \leq (۲c - c^۲)$، آن‌گاه $(A + A) \cap \{۱, \ldots, n\}$ برای هر n، حداقل $(۲c - c^۲)n$ عضو دارد. در حقیقت اگر اعضای $A \cap \{۱, \ldots n\}$، $a_۱ < \cdots < a_p$ باشند، برای هر j تعداد عضوهای $A + A$ که بین اعداد $a_j + ۱, \cdots, a_{j+۱} - ۱$ ظاهر می‌شوند، برابر است با تعداد عضوهای $A \cap \{۱, \ldots, a_{j+۱} - a_j - ۱\}$، که آن‌هم دست‌کم برابر است با $c(a_{j+۱} - a_j - ۱)$. یعنی تعداد عضوهای $(A + A) \cap \{۱, ۲, \ldots, n\}$، دست‌کم $p + \sum_{j=۱}^{p-۱} c(a_{j+۱} - a_j - ۱)$ می‌شود. نشان دهید این مقدار، برابر است با $p + c(n - p)$ و بقیهٔ استدلال را خودتان ادامه دهید! در نهایت برای حل مسأله مثلاً می‌توانید نشان دهید که اگر $p(x) = ۲x - x^۲$، آن‌وقت برای هر عدد حقیقی $۰ < x < ۱$، عدد صحیح و مثبت m (که می‌تواند وابسته به x باشد) وجود دارد که

$$\underbrace{p(p(\cdots(p(x))\cdots))}_{m\ \text{بار}} > \frac{۱}{۲}$$

در حقیقت، از مطلب ذکر شده در بالا، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ B، شامل همهٔ عددهای صحیح و مثبت که به‌صورت مجموع حداکثر ۲^m عضو از A قابل بیان هستند، دارای این خاصیت است که برای هر عدد صحیح و مثبت n، $B \cap \{۱, ۲, \ldots, n\}$ بیش از $\frac{n}{۲}$ عضو دارد.

1) I.M.Vinogradov

۲) Analytic Number Theory البته معنای واقعی این عبارت، «نظریه اعداد آنالیزی» است، یعنی استفاده از ابزارها و قضیه‌های آنالیز در نظریهٔ اعداد.

۳) این تمرین نسبتاً دشوار است. اگر در موقع خواندن مقاله نتوانستید حلش کنید، می توانید موقتاً آن‌را کنار گذاشته و مقاله را تمام کنید، و بعد به این تمرین برگردید.

اکنون از نتیجهٔ ۱، که در بالا ذکر شد، برای B استفاده کنید!)

خوب، تمرین بالا واقعاً دشوار است! در حقیقت آن‌قدر دشوار که اسم کسی که اولین بار آن‌را ثابت کرده رویش است! شنیرلمان[۱] اولین کسی بود که تعمیم ذکر شده در تمرین را مطرح کرد. وی توانست نشان دهد که اگر P مجموعهٔ همهٔ عددهای اول باشد، مجموعهٔ $A = (P+P)\cup\{۱\}$ شرط تمرین بالا را برقرار می‌کند. بنابراین عدد k وجود دارد که هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را بشود به‌صورت مجموع حداکثر k عدد اول بیان کرد. در حوالی سال ۱۹۳۰ که این مطالب ثابت شد، این‌ها گام‌های بزرگی در راه اثبات حدس گلدباخ به‌شمار می‌آمد. دقت کنید که خودِ P را نمی‌توان مستقیماً در تمرین بالا به‌کار برد چون می‌شود ثابت کرد که P شرط ذکر شده در تمرین را برقرار نمی‌کند!

اجازه دهید قدری به مسایل ساده‌تری بپردازیم! مثلاً بعد از طول و تفصیلات بالا، ممکن است این سؤال به ذهنتان خطور کند: آیا عدد k وجود دارد که هر عدد طبیعی را بشود به‌صورت مجموع حداکثر k عدد مربع کامل بیان کرد؟ و حتی به این مسأله کلی‌تر هم ممکن است فکر کرده باشید:

پرسش: عدد صحیح و مثبت M داده شده است. آیا عدد صحیح و مثبت k، که می‌تواند به M بستگی داشته باشد، وجود دارد که هر عدد صحیح و مثبت دل‌خواه، به شکل جمع حداکثر k عضو از مجموعهٔ $\{۱^M, ۲^M, ۳^M, \ldots\}$ قابل بیان باشد؟

خوب، اگر این سؤال به ذهنتان خطور کرده، اولین نفر نیستید! این مسأله به حدس وارینگ[۲] شهرت دارد و توسط هیلبرت[۳] حل شده است.[۴] من در این‌جا قصد ندارم بیش از این تاریخ نگاری کنم. هر چه باشد، عنوان سلسله مقالاتم مرا مجبور می‌کند که چارچوب مسأله و تمرین را حفظ کنم؛ اگر چه در این شماره کم‌تر از گذشته به المپیاد پرداختم. به هر حال، «حسن ختام» این شماره، تمرین زیر است.

تمرین ۵. *عدد صحیح و مثبت $M > ۱$ داده شده است.*

۱) *نشان دهید بی‌نهایت عدد صحیح و مثبت n وجود دارند که n را نمی‌شود به‌صورت جمع حداکثر $M - ۱$ عضو از مجموعهٔ $\{۱^M, ۲^M, ۳^M, \ldots\}$ نوشت. (راهنمایی. اگر $x_1^M + \cdots + x_{M-1}^M \leq n$، که x_iها عددهای صحیح و نامنفی هستند، آن‌وقت $x_i \leq \sqrt[M]{n}$، برای هر i. نشان دهید حداکثر تعداد اعدادی به شکل $x_1^M + \cdots + x_{M-1}^M$، برای هر i، $x_i \leq \sqrt[M]{n}$، برابر است با $\sqrt[M]{x^{M-1}}$ ، و بقیه استدلال را خودتان انجام دهید!)*

۲) *قسمت الف نشان می‌دهد که در مسألهٔ وارینگ، $k \geq M$. نشان دهید که در حقیقت $k \geq M + ۱$.*

1) Schnirelmann 2) Waring

۳) Hilbert از بزرگ‌ترین ریاضی‌دان‌های اوایل قرن بیستم.

۴) پاسخ مثبت است. همواره k وجود دارد!

مسأله‌های المپیادی

علی شوریده

۹ ـ ۱) تعداد توابع $f:\{1,\dots,n\}\longrightarrow\{1995,1996\}$ را بیابید که $f(1)+\cdots+f(1996)$ عددی فرد باشد.

۹ ـ ۲) سه جهانگرد روی رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع n قرار دارند. این مثلث به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم شده است. در حالت اولیه همهٔ خطوط شکل، آبی رنگ هستند. جهانگردها طبق قوانین زیر حرکت کرده و مسیر حرکت خود را قرمز می‌کنند.

الف) ابتدا A حرکت می‌کند. بعد B و سپس C. دوباره A و همین‌طور ادامه می‌دهند. در هر نوبت هر جهانگردی کل ضلع یک مثلث کوچک را طی می‌کند.

ب) هیچ جهانگردی نمی‌تواند روی پاره‌خطی که قبلاً قرمز شده حرکت کند؛ ولی می‌تواند در نوبت خودش روی رأس قرمز کار خود را پایان دهد، حتی اگر جهانگرد دیگری آن‌جا باشد.

نشان دهید برای هر $n>0$ می‌توان به این روش همهٔ پاره‌خط‌های آبی را قرمز کرد.

۹ ـ ۳) نشان دهید چند جمله‌ای $p(x)$ با درجه ۹۹۸ وجود ندارد که همهٔ ضرایبش حقیقی باشند و برای هر عدد حقیقی

$$p(x)^2-1=p(x^2+1)$$

۹ ـ ۴) فرض کنید ABC مثلث دل‌خواهی باشد. مربع‌های $ABED$ و $BCGF$ و $ACHT$ را خارج از آن روی اضلاعش بنا کنید. نشان دهید نقطه‌های D و E و F و G و H و I روی یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع یا متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی — شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۵۳ـ۵۴

حل مسأله‌های المپیادی (سری هفتم)

علی شوریده

۷-۱) واضح است که حکم مسأله معادل با این است که

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}<2$$

اگر قرار دهیم $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ خواهیم داشت

$$T_{n+1}=\frac{T_n}{2}+1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

(چرا؟) لذا اگر T_n از ۲ کوچک‌تر باشد T_{n+1} نیز از ۲ کوچک‌تر خواهد بود، و با توجه به این‌که $T_1=\frac{1}{2}<2$، حکم با استقرا نتیجه می‌شود.

۷-۲) اگر E محل برخورد OD و BI باشد، چون $E=90^\circ$ پس $EOBH$ که در آن H وسط AB است محاطی است و لذا زاویهٔ EOI با نصف زاویهٔ B برابر است. در نتیجه زاویهٔ COD هم برابر با نصف B است که همان $\widehat{IBD}$ می‌باشد. پس $BIOD$ محاطی است (چرا؟) و در نتیجه IDB با IOB برابر است و لذا $\widehat{IOB}$ برابر با زاویهٔ $\widehat{C}$ است، در نتیجه ID با AC موازی است.

۷-۳) ثابت می‌کنیم برای هر $n\geq 4$، $n+\frac{2}{n}<a_n^2<n+1$. به این نکته توجه کنید که تابع $f_n(x)=\frac{x}{n}+\frac{n}{x}$ روی بازه $[0,n]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[n,\infty)$ اکیداً صعودی است. پایه استقرا یعنی $n=4$ را می‌توان با کمی محاسبه بررسی کرد: $4+\frac{2}{4}<a_4^2=(\frac{13}{6})^2<5$.

اکنون فرض کنید $n\geq 4$ و $n+\frac{2}{n}<a_n^2<n+1$.

با توجه به این‌که $\sqrt{n+1}<n$، پس در ناحیه‌ای قرار داریم که f_n اکیداً نزولی است و در ضمن $a_{n+1}=f_n(a_n)$ در نتیجه

شمارهٔ ۹
(اسفند ۱۳۸۰) صص ۵۵–۵۴

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 < a_{n+1}^2 < \left(\frac{\sqrt{n+\frac{2}{n}}}{n}+\frac{n}{\sqrt{n+\frac{2}{n}}}\right)^2$$

و یا به عبارتی

$$\frac{n+1}{n^2}+\frac{n^2}{n+1}+2 < a_{n+1}^2 < \frac{n^2+2}{n^3}+\frac{n^3}{n^2+2}+2.$$

برای اتمام کار کافی است دو مطلب را نشان دهیم. یکی این که طرف راست کوچک‌تر یا مساوی $n+2$ است و دیگر این که طرف چپ بزرگ‌تر یا مساوی $n+1+\frac{2}{n+1}$ است.

$$n+2-\left(\frac{n^2+2}{n^3}+\frac{n^3}{n^2+2}+2\right)=\frac{2n^4-(n^2+2)^2}{n^3(n^2+2)}>0$$

$$\frac{n+1}{n^2}+\frac{n^2}{n+1}+2-\left(n+1+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{2n+1}{n^2(n+1)}>0$$

و این استقرا را کامل می‌کند.

۴-۷) برای $n=3$ داریم $2^3=8=1^2+1^2\times 7$. اگر x_n و y_n دو جواب برای $2^n=7x^2+y^2$ باشند، یکی از دو عدد $\frac{x_n+y_n}{2}$ و $\frac{x_n-y_n}{2}$ فرد است. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $\frac{x_n+y_n}{2}$ فرد باشد. قرار می‌دهیم $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ و $y_{n+1}=\frac{7x_n-y_n}{2}$؛ در این صورت خواهیم داشت

$$7x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=7\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^2+\left(\frac{7x_n-y_n}{2}\right)^2=2(7x_n^2+y_n^2)-2^{n+1}$$

و حکم ثابت می‌شود.

تصحیح

در مسایل المپیادی هفتم، در سؤال ۷-۲، O مرکز دایره محیطی و I مرکز دایره محاطی است.

سیراکوز توسط هارسلوس سه سال به تأخیر بیفتد.

خطوط دفاعی شهر سرانجام وقتی شکسته شد که سیراکوزی‌های مغرور، طی جشنی در داخل شهر، از نگهبانی غافل شدند و صبح که از خواب بیدار شدند سربازان رومی را در داخل شهر مشغول تاراج دیدند. مارسلوس که برای دشمن نابغهٔ خود احترام زیادی قائل بود به سربازان خود دستور داد تا ارشمیدس را یافته و نزد او آورند.

یک سرباز رومی ارشمیدس را در حالی یافت که بر زمین نشسته بود و مشغول تفکر بر روی اشکال هندسی بود که بر روی خاک رسم کرده بود. ارشمیدس که متوجه حضور رومی‌ها در سیراکوز و سربازان رومی نشده بود با مشاهدهٔ سربازی که بر روی اَشکال او ایستاده بود از سرباز خواست که دور شود و سرباز، خشمگین از خواستهٔ ارشمیدس، شمشیر خود را بر بدن پیرمرد هفتاد و پنج ساله فرو برد.

خبر مرگ ارشمیدس مارسلوس را سخت اندوه‌گین کرد و با غزت و احترام زیاد نابغه را به خاک سپرد. ارشمیدس که از یکی از کشفیات هندسی عظیم خود بسیار مسرور بود وصیت کرده بود تا کره و منشور مستدیر قائم محاط در آن بر سنگ قبرش حک شود و مارسلوس دستور داد تا وصیت او اجرا شود.

سال‌ها بعد در ۷۵ق.م سیسرون [1] که به‌عنوان خزانه‌دار به دولت روم و سیسیل خدمت می‌کرد، در مورد محل گور ارشمیدس به تحقیق پرداخت. سیسرون با تلاش فراوان همهٔ سنگ قبرها را در گورستان شهر جستجو نمود و بالاخره متوجه ستون کوچکی شد که کمی بالاتر از تپه‌ها و خارهای اطراف آن قرار داشت و شکل کره و استوانه محاط در آن پیدا بود.

سیسرون مردانی را برای جمع‌آوری خاشاک گماشت و دستور داد که اطراف آن‌را به همان صورت نگه‌داری نمایند. مشخص نیست که این مراقبت تا چند وقت ادامه داشت؛ چون قبر دوباره از نظرها پنهان شد تا سال ۱۹۶۵ که برای بنای یک هتل در یکی از محلات سیراکوز مشغول خاک‌برداری بودند، در بین تودهٔ خاک معدن بیل مکانیکی سنگ قبری مشاهده شد که کره و استوانهٔ محاط در آن بر آن حک شده بود.

1) Cicero

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۲۴۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۲۴۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

....

مسأله‌های جایزه‌دار!

در این شماره، دو مسألهٔ جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. منتظر دریافت راه‌حل‌های شما هستیم تا به راه‌حل‌های برگزیده، جوایز ارزنده‌ای اهدا شود.

۱) فرض کنید $a_1, \ldots, a_{1381}$ اعداد حقیقی غیرمنفی باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند،

$$a_1 + \cdots + a_{1381} = 2$$

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{1380} a_{1381} = 1$$

ماکزیمم و مینیمم $S = a_1^2 + \cdots + a_{1381}^2$ را پیدا کنید.

۲) یک ۱۳۸۱ ضلعی منتظم در نظر می‌گیریم، حداقل چند تا از رأس‌های این چند ضلعی را حذف کنیم که بین رأس‌های باقی‌مانده هیچ چهار رأسی تشکیل یک مربع ندهند؟

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد .... محل تولد .... دانش‌آموز سال .... رشته ....

نام و نشانی محل تحصیل: ....

....

....

شمارهٔ تلفن تماس:

شمارهٔ بعدی

اردیبهشت ۸۱ منتشر می‌شود.